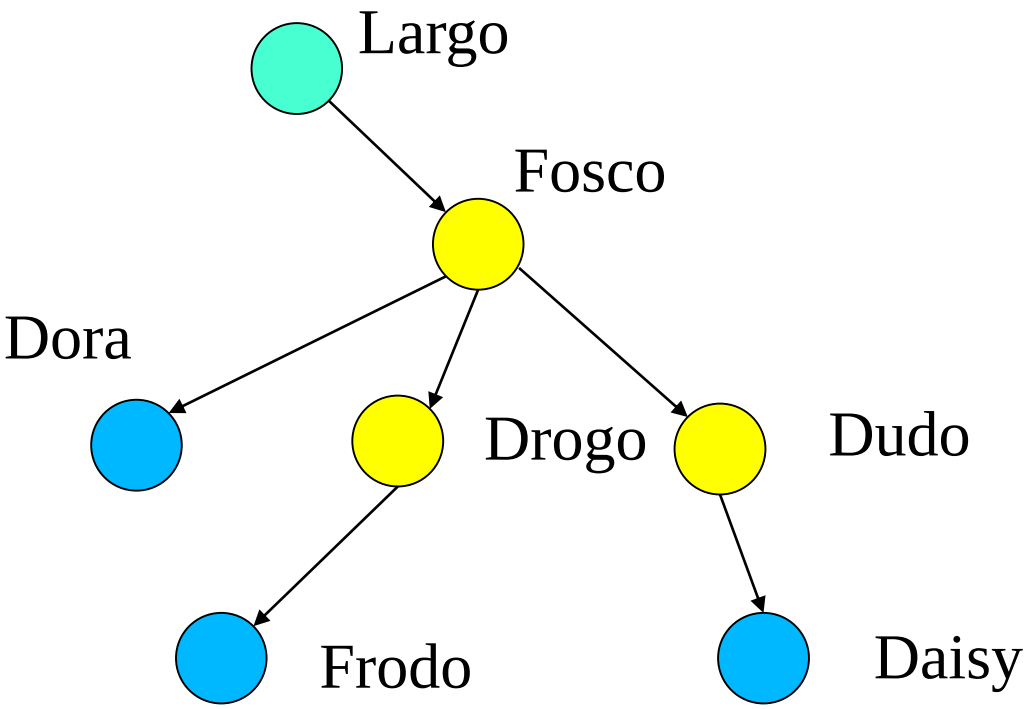
Alberi

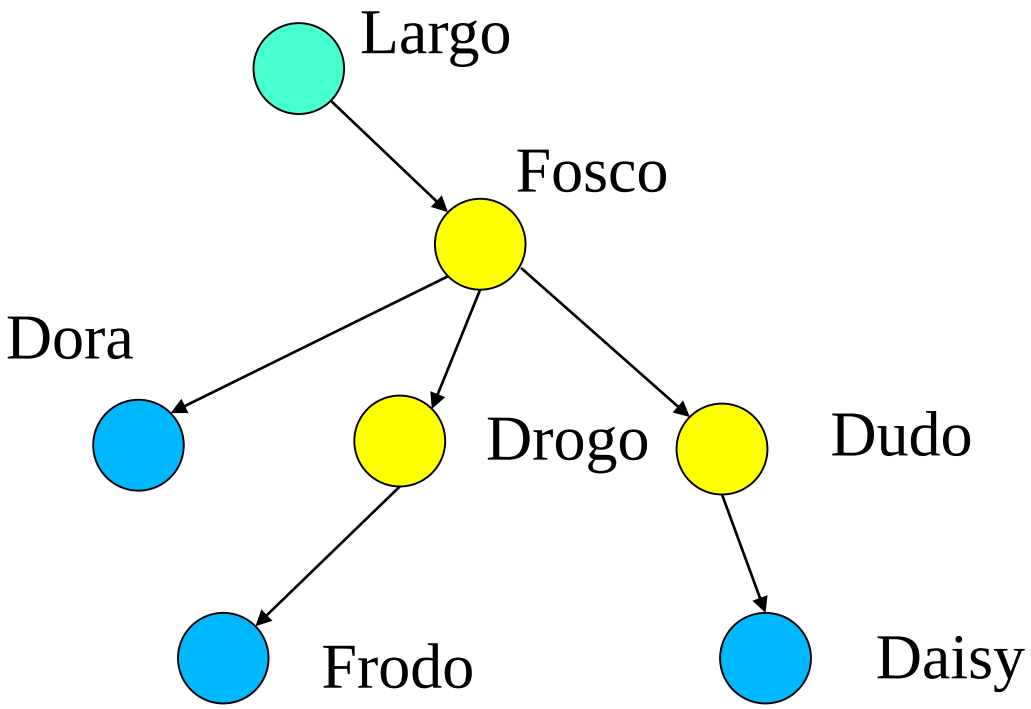
Alberi

- Gli alberi sono una generalizzazione delle liste che consente di modellare delle strutture gerarchiche come questa:



Alberi

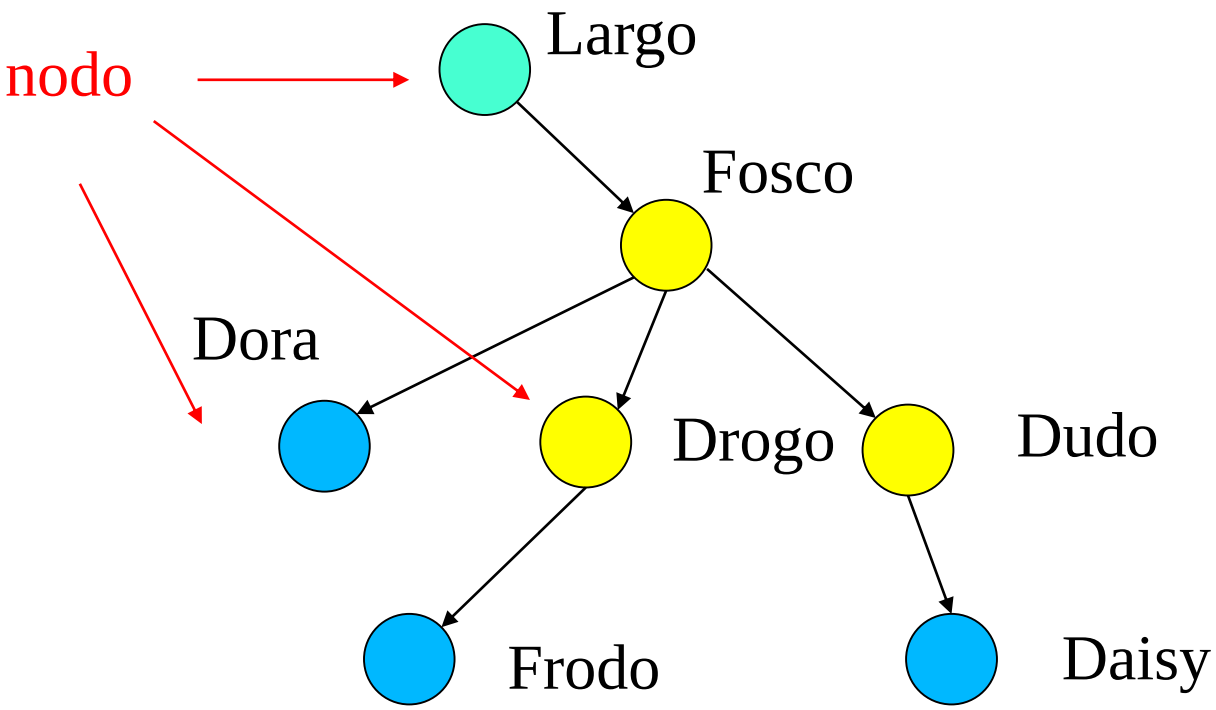
- Gli alberi sono una generalizzazione delle liste che consente di modellare delle strutture gerarchiche come questa:



L'albero genealogico della famiglia Baggins

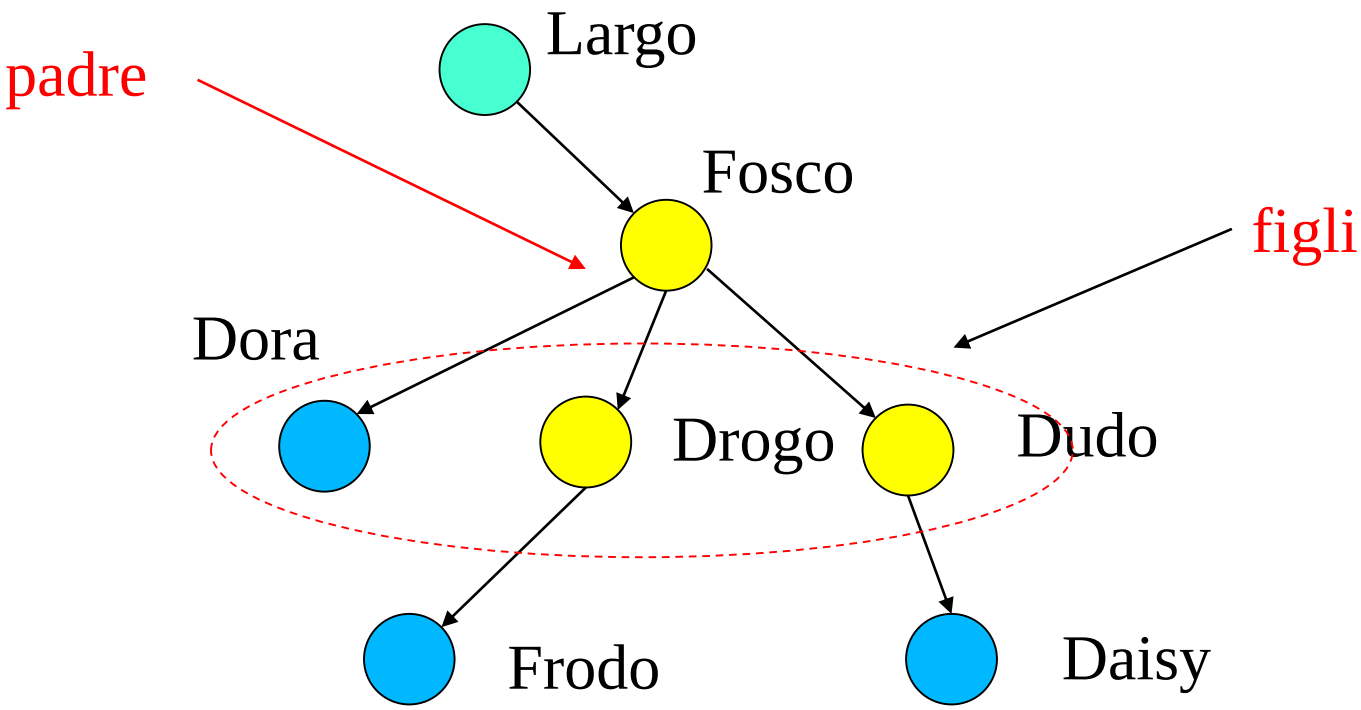
Alberi

- Terminologia: gli elementi sono detti nodi



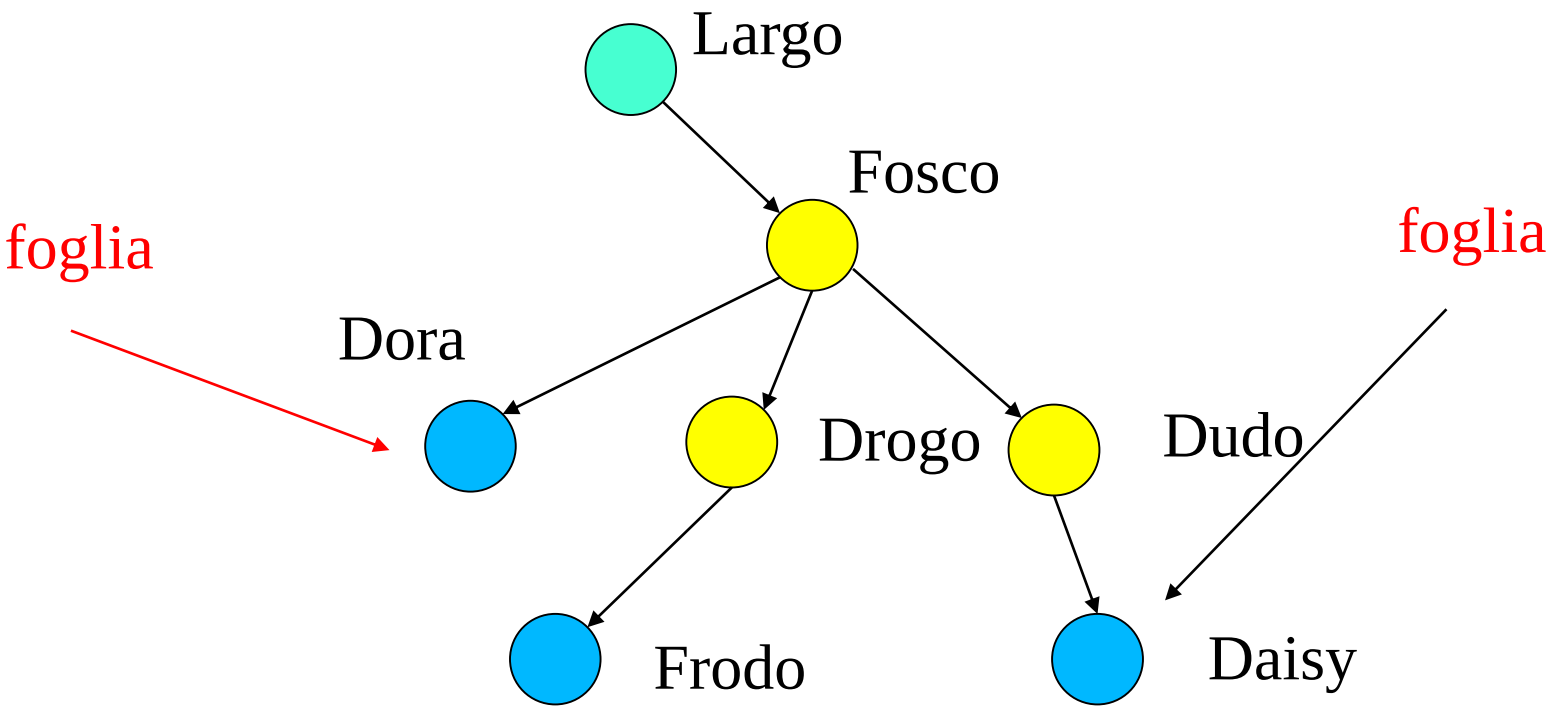
Alberi

- i successori sono detti figli ed i predecessori padre



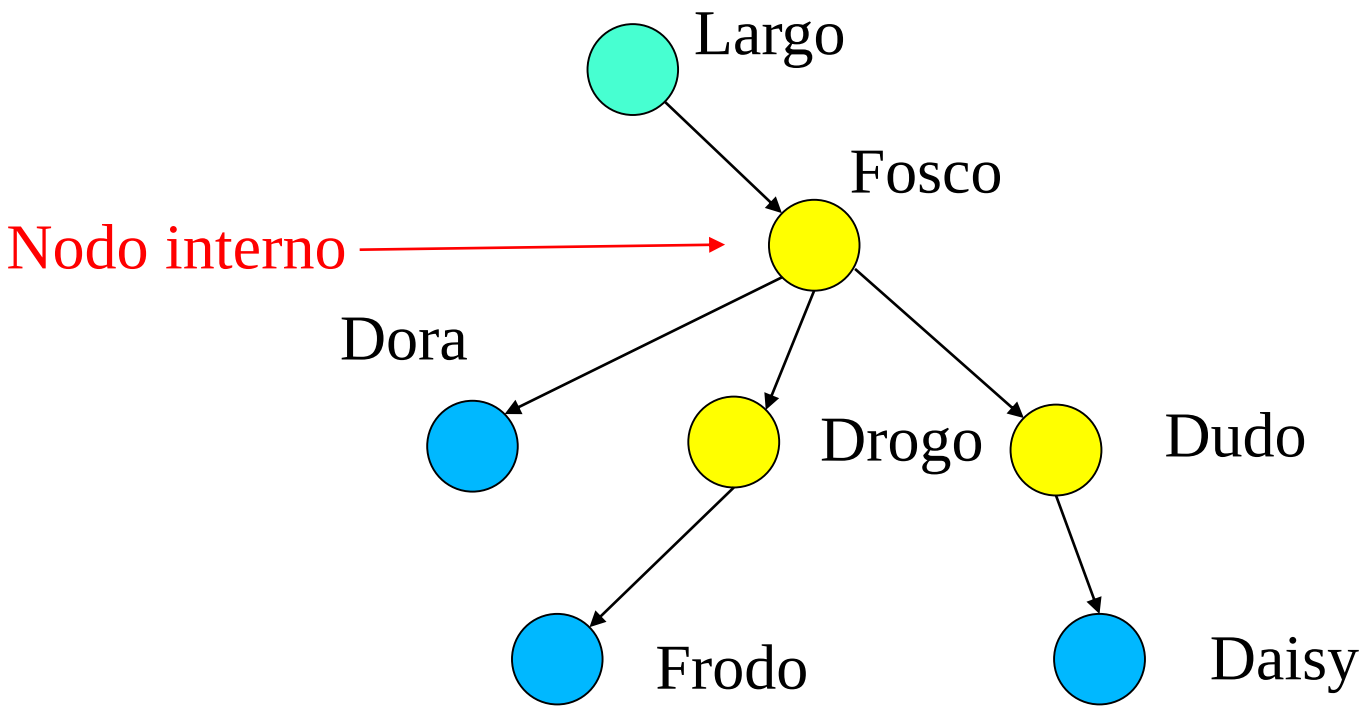
Alberi

- i nodi senza figli sono detti foglie (in azzurro)



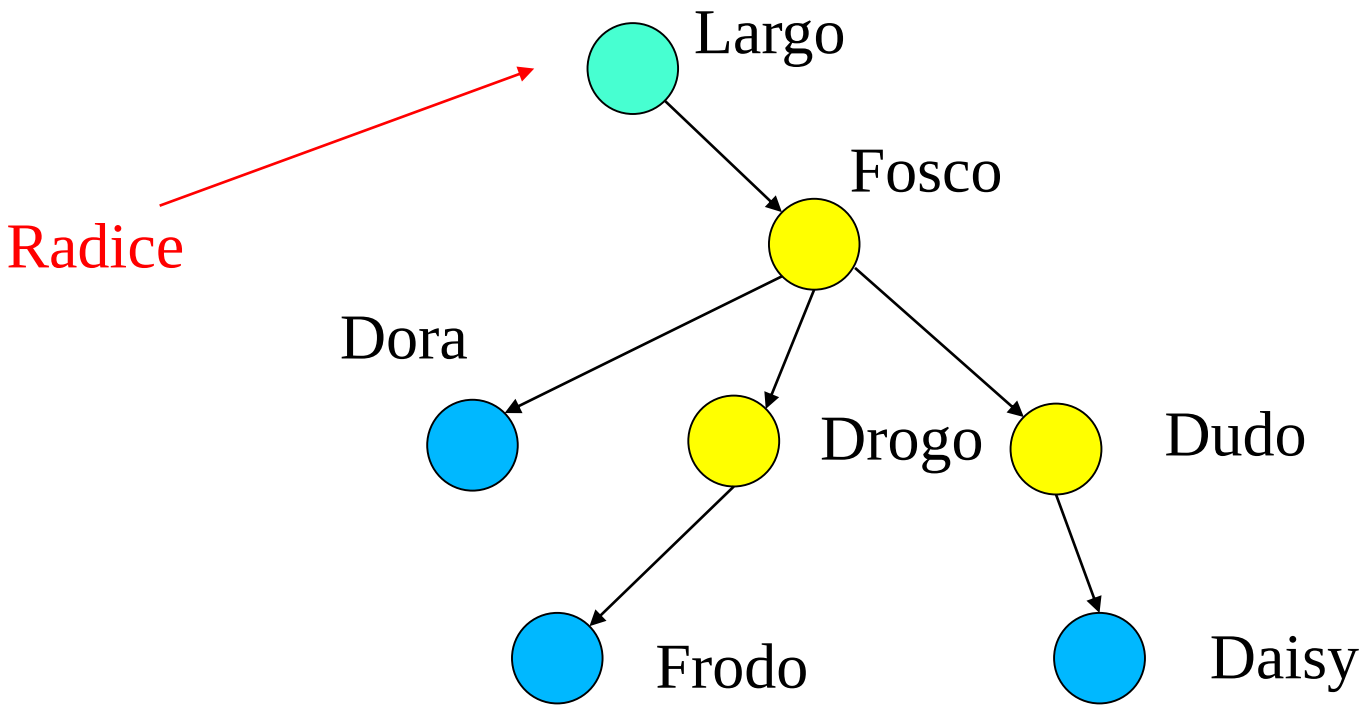
Alberi

- i nodi con figli sono detti interni (in giallo)



Alberi

- Il nodo iniziale è detto radice (in verde)

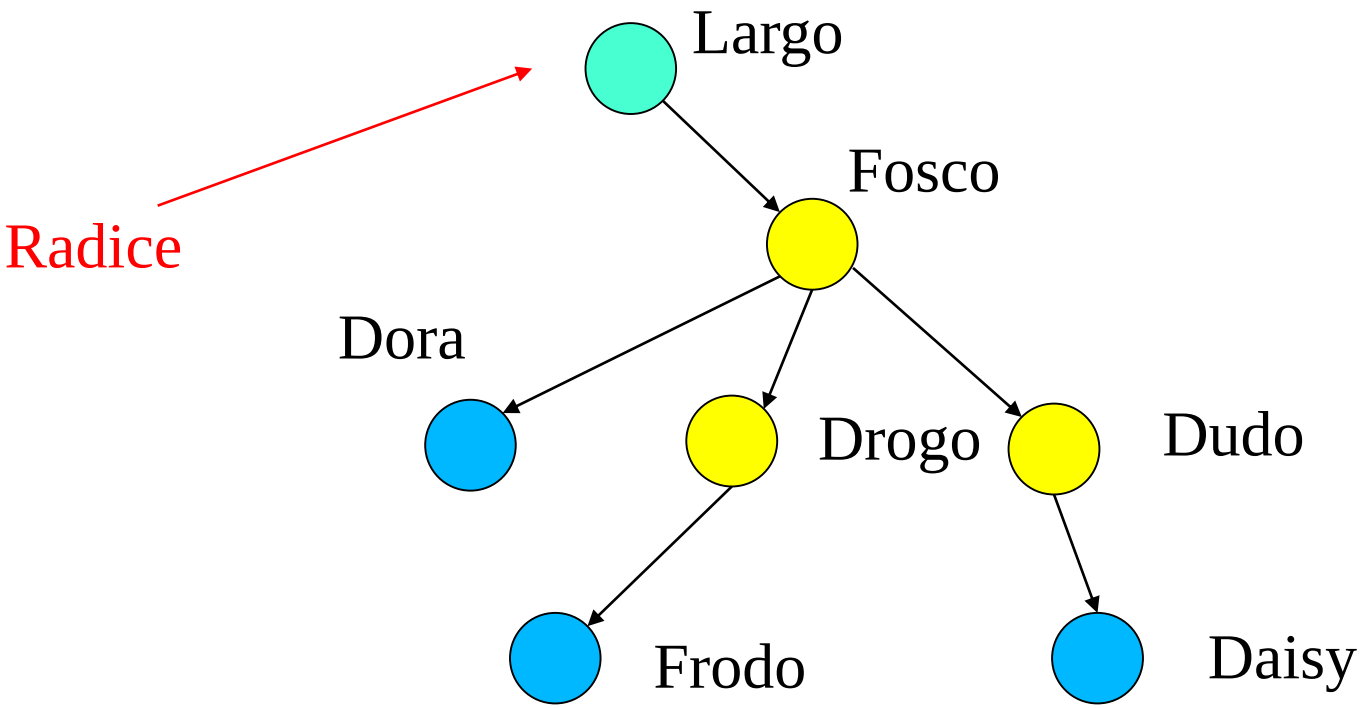


Alcune definizioni

- Cammino
  - una sequenza di nodi, in cui ogni nodo è figlio del nodo che lo precede nella sequenza
- Livello di un nodo
  - numero di nodi da attraversare per arrivare dal nodo alla radice
  - Definizione induttiva:
    - La radice ha livello 0
    - Se un nodo ha livello *n* i suoi figli hanno livello *n + 1*
- Livello *k* dell'albero
  - È l'insieme di tutti e soli i nodi di livello uguale a *k*
- Altezza dell'albero
  - È il livello massimo dei nodi nell'albero

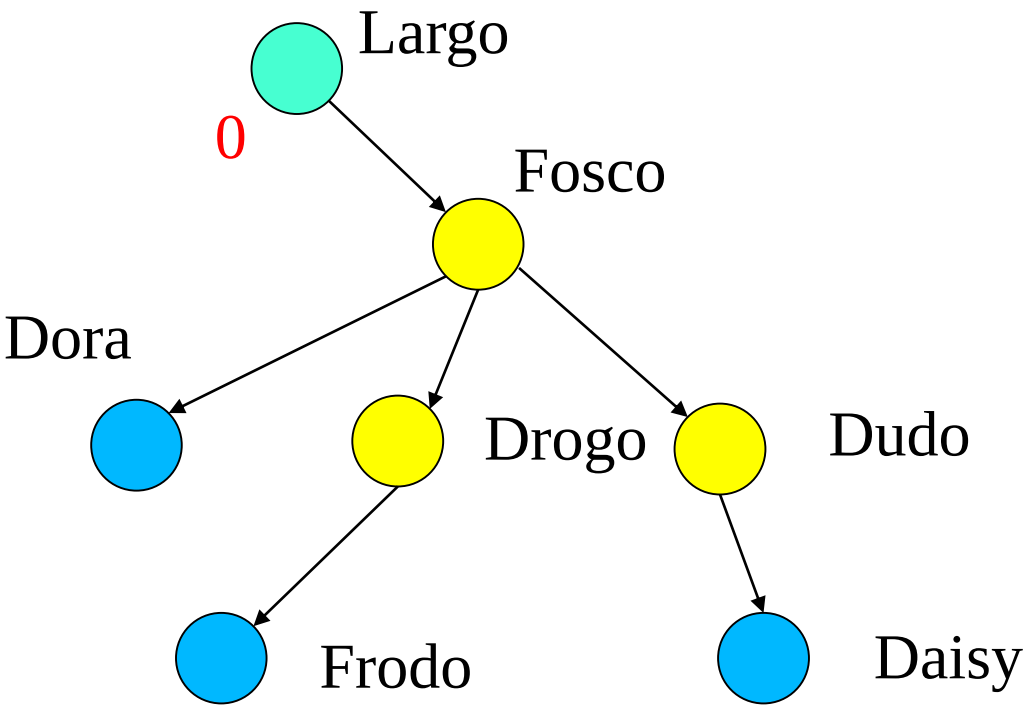
Esempio

- Cammini
  - (Largo,Fosco,Dudo, Daisy) (Fosco,Dora) (Fosco,Drogo,Frodo) ...



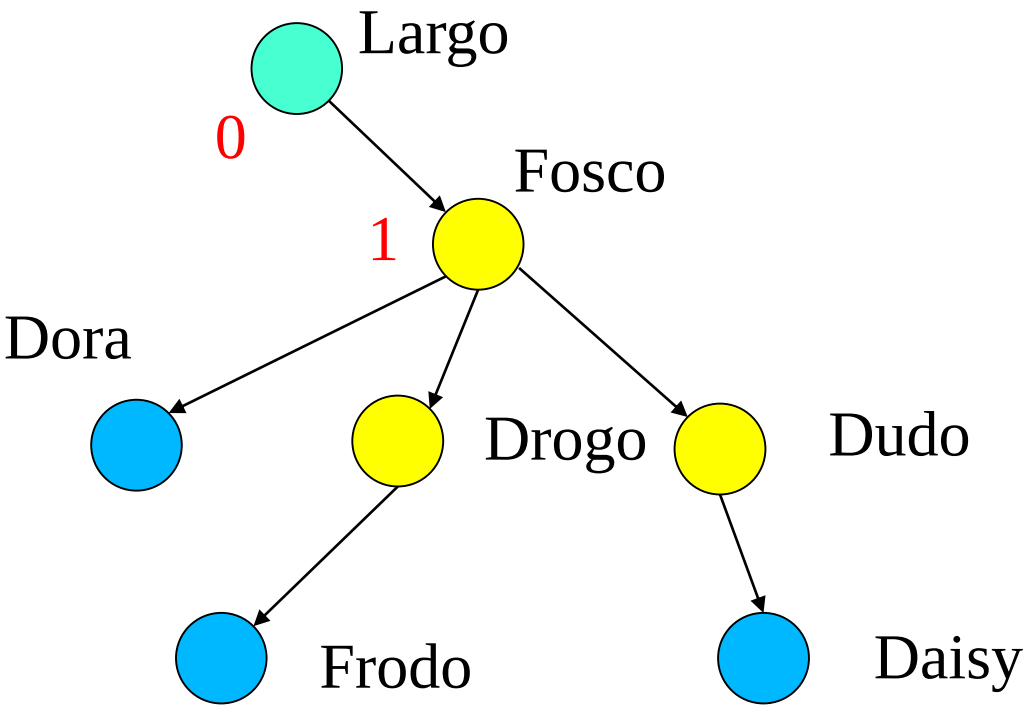
Esempio

- Livelli



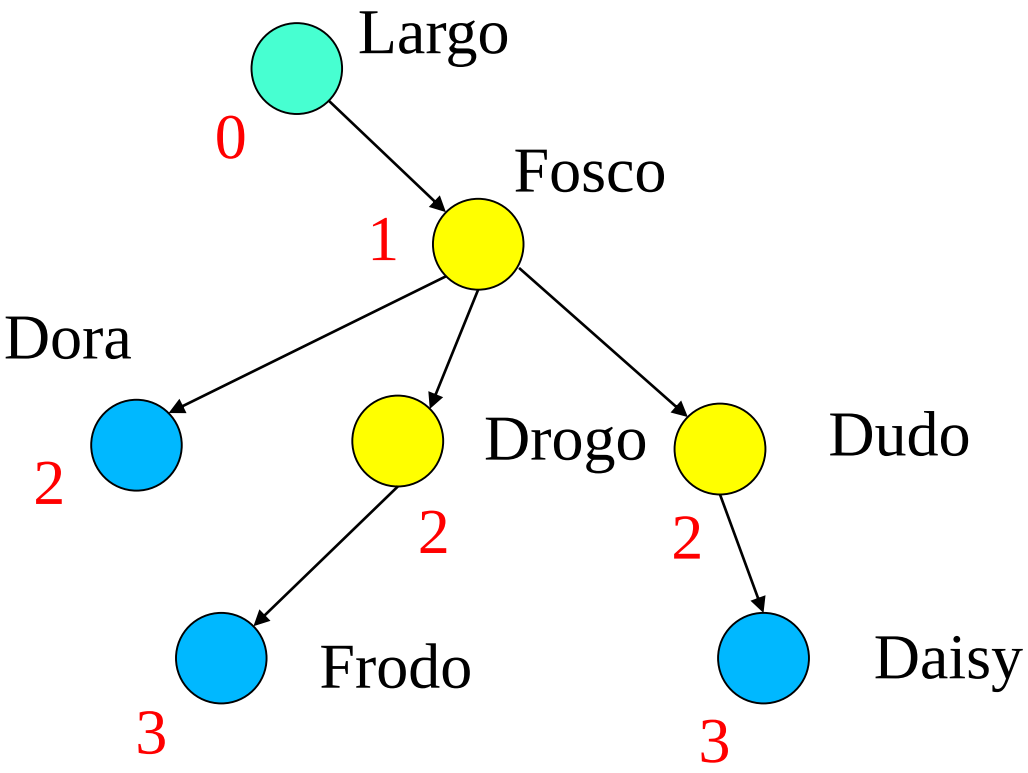
Esempio

- Livelli



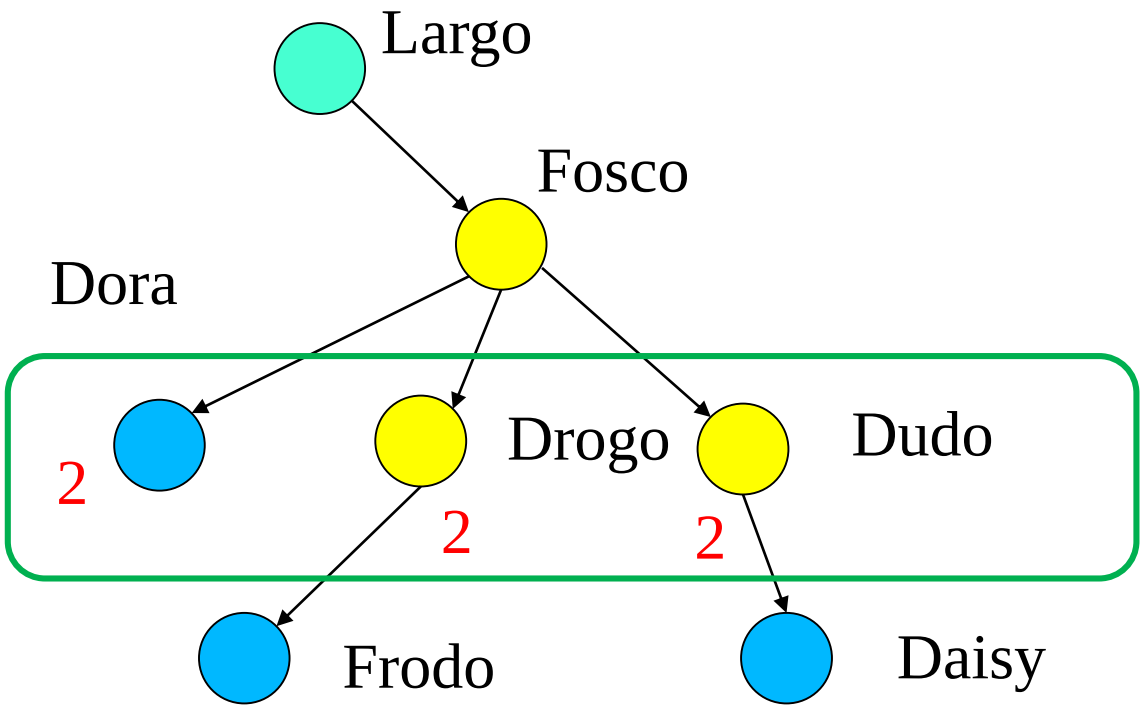
Esempio

- Livelli



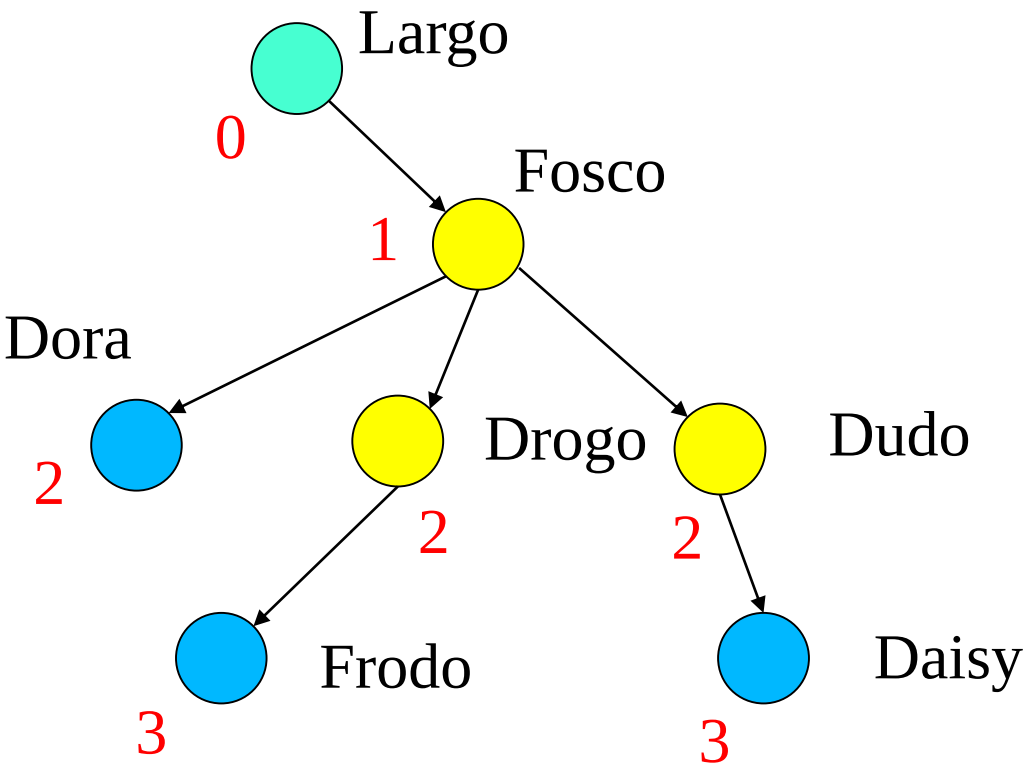
Esempio

- Livello 2



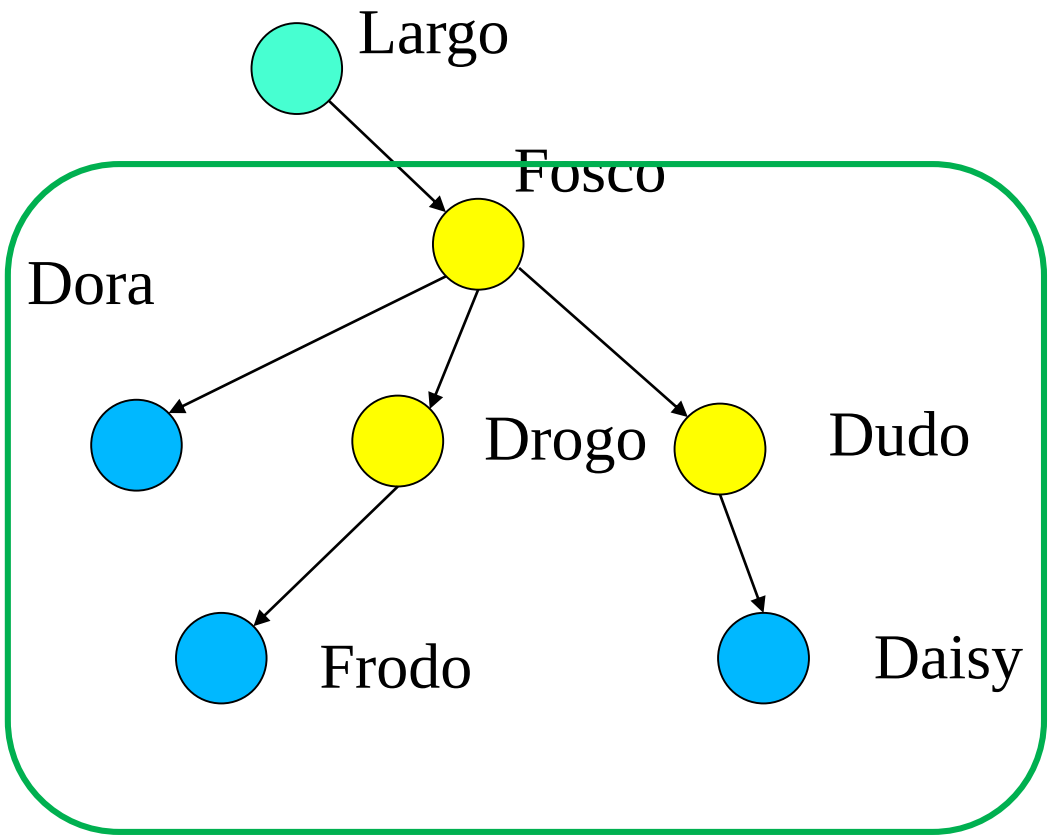
Esempio

- L'albero ha altezza 3



Esempio

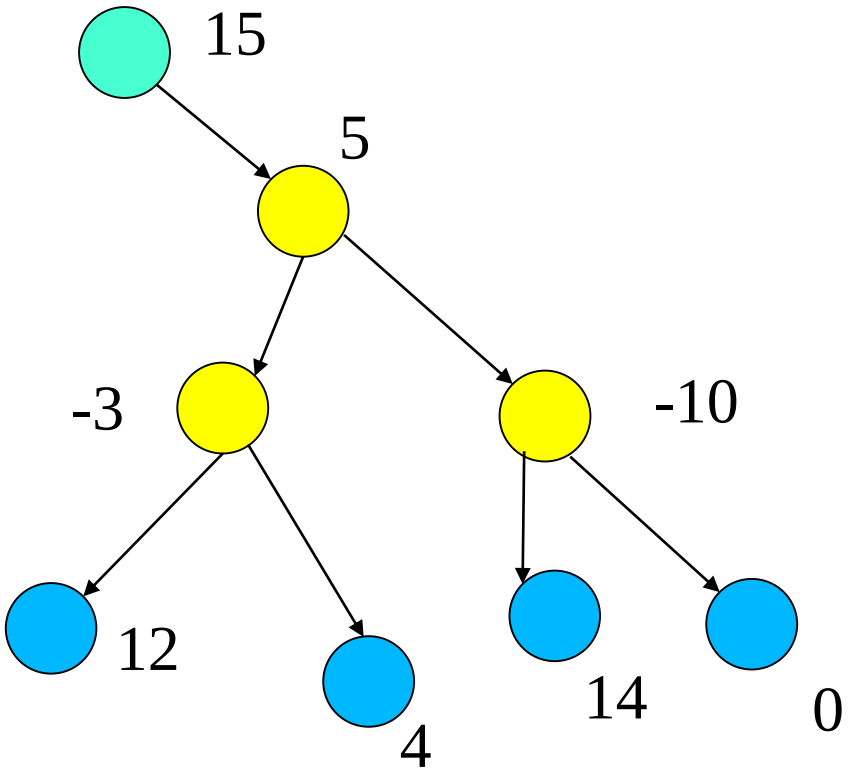
- Ogni nodo può essere visto come la radice di un albero più piccolo (sottoalbero)



Sottoalbero di radice Fosco

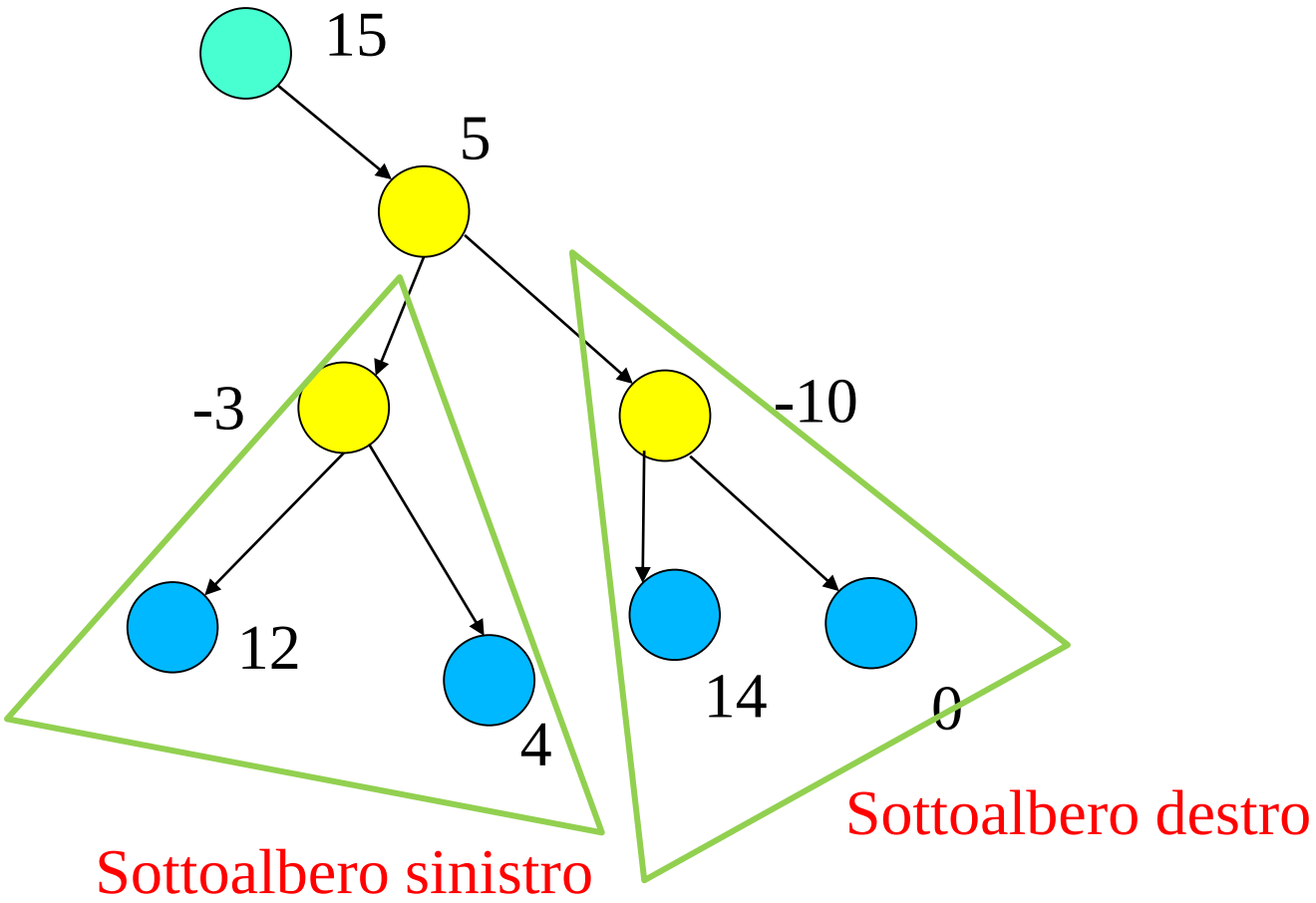
Alberi binari

- Alberi con solo due figli
  - Detti figlio destro e figlio sinistro
- Esempio:



Alberi binari

- Alberi con solo due figli
  - Detti figlio destro e figlio sinistro
- Esempio:



Alberi in C

- Come si realizza un albero binario in C ?
  - Ogni nodo è una struttura che contiene al suo interno due puntatori al suo stesso tipo, ad esempio se l'etichetta è un numero intero posso utilizzare:

```
typedef struct albero {
        int val;
        struct albero * left;
        struct albero * right;
    } albero_t ;
```

  - Il puntatore left contiene il puntatore al figlio di sinistra mentre il puntatore right contiene il puntatore al figlio di destra
  - Le foglie utilizzano due puntatori nulli (**NULL**) nei campi **right left**

Esempio: raddoppiare i pari

- Vogliamo raddoppiare solo le etichette pari
  - Lavorando con gli alberi è naturale usare funzioni ricorsive
  - Ragioniamo sul caso base:
    - Se l'albero è vuoto non devo fare niente
    - Se l'albero contiene solo un nodo foglia devo controllare se l'etichetta è pari e se lo è raddoppiare il valore
  - Supponiamo di saper risolvere il problema per un albero di livello *n*, allora per risolvere il problema per un albero di livello *n+1* posso:
    - Controllare l'etichetta della radice e raddoppiarla se è pari
    - Chiamare ricorsivamente la funzione che risolve il problema per un albero di livello *n* sia sul sottoalbero destro che sul sottoalbero sinistro

Esempio: raddoppiare i pari

- Codifica

```
void raddoppia_pari(albero_t* r) {
    if ( r == NULL ) return ;
    if ( ( r -> val ) % 2 == 0 )
          r -> val = 2 * ( r -> val ) ;
    raddoppia_pari(r->left);
    raddoppia_pari(r->right);
}
```

Osservazioni

- Nell'esempio precedente abbiamo scelto di operare analizzando nell'ordine
  - La radice dell'albero
  - Il sottoalbero di sinistra
  - Il sottoalbero di destra
- Poiche l'analisi dei sottoalberi sinistro e destro avviene utilizzando la stessa procedura ricorsiva, anche la loro analisi opera allo stesso modo
  - (prima la radice, poi il sottoalbero sx, quindi il sottoalbero dx . . .)

Osservazioni

- Avremmo potuto procedere diversamente :

```
void raddoppia_pari(albero_t* r) {
    if ( r == NULL ) return ;
     raddoppia_pari(r->left);
     if ( ( r -> val ) % 2 == 0 )
          r -> val = 2 * ( r -> val ) ;
     raddoppia_pari(r->right);
}
```

- Oppure .....

Osservazioni

- Oppure .....

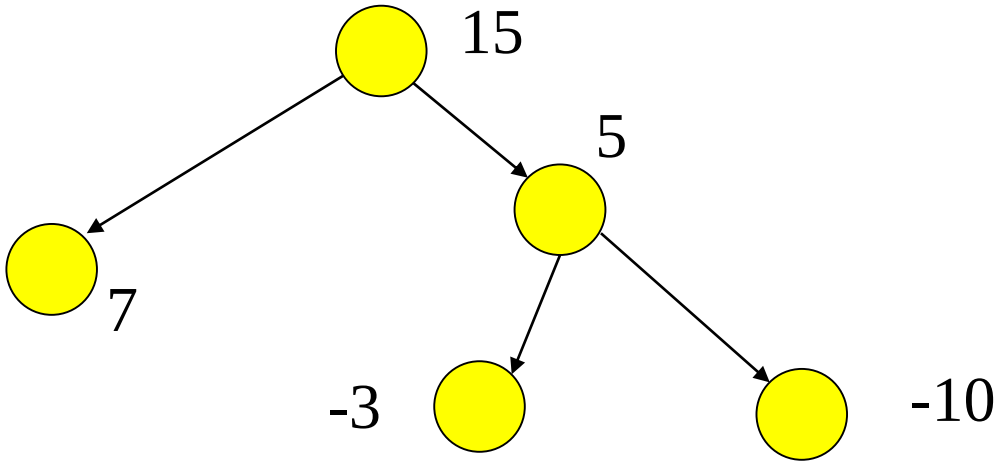
```
void raddoppia_pari(albero_t* r) {
    if ( r == NULL ) return ;
     raddoppia_pari(r->left);
     raddoppia_pari(r->right);

      if ( ( r -> val ) % 2 == 0 )
          r -> val = 2 * ( r -> val ) ;
}
```

- In questo caso è indifferente, perchè è indifferente l'ordine in cui elaboriamo i nodi dell'albero ....

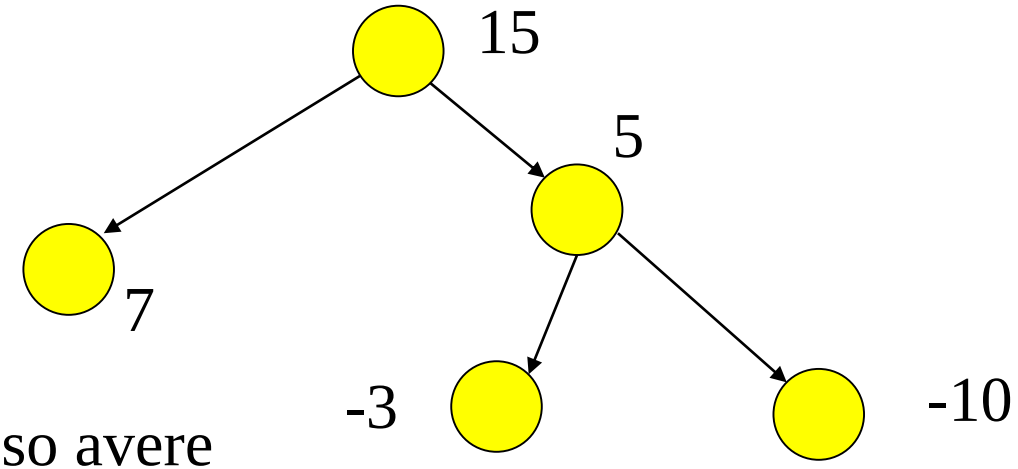
Osservazioni

- Ci sono molti casi in cui l'ordine in cui vengono elaborati i nodi di un albero è rilevante e modifica il risultato
- Un esempio è la stampa delle etichette,



Osservazioni

- Ci sono molti casi in cui l'ordine in cui vengono elaborati i nodi di un albero è rilevante e modifica il risultato
- Un esempio è la stampa delle etichette,



Posso avere

7, 15, -3, 5, -10 (prima il sottoalbero di sinistra)

-10, 5, -3, 15, 7 (prima il sottoalbero di destra)

15, 7, 5, -3, -10 (prima la radice, poi sx) .... etc

Visita di un albero

- Visitare un albero significa analizzare in sequenza tutti i suoi nodi
  - Molti problemi sugli alberi sono varianti del problema di effettuare una visita
- Ci sono diversi tipi di visita, che differiscono nell'ordine in cui vengono analizzati i nodi
  - Visite depth-first (in profondità), sono di tre tipi :
    - visita anticipata: si analizza la radice, poi si effettua la visita anticipata del sottoalbero SX e poi si effettua la visita anticipata del sottoalbero DX
    - visita simmetrica: si effettua la visita simmetrica del sottoalbero SX, poi si analizza la radice e poi si effettua la visita simmetrica del sottoalbero DX
    - visita posticipata: si effettua la visita posticipata del sottoalbero SX, poi si effettua la visita posticipata del sottoalbero DX, e infine si analizza la radice

Visita di un albero

- Visitare un albero significa analizzare in sequenza tutti i suoi nodi
  - Molti problemi sugli alberi sono varianti del problema di effettuare una visita
- Ci sono diversi tipi di visita, che differiscono nell'ordine in cui vengono analizzati i nodi
  - Visite depth-first (in profondità), sono di tre tipi :
    - visita anticipata
    - visita simmetrica
    - visita posticipata
  - Visita breadth-first (per livelli): si visita prima la radice (livello 0), poi si visitano tutti i nodi di livello 1, poi tutti i nodi di livello 2, etc ....

Visita simmetrica

- Supponiamo di avere una funzione

```
void analizza_nodo(albero_t* n);
```

  Questa funzione elabora il valore del singolo nodo, secondo il problema che dobbiamo risolvere, eventualmente modificandolo

- Quindi la funzione che effettua la visita simmetrica è

```
void visitaSimmetrica (albero_t* bt){
  if (bt == NULL) return;
  visitaSimmetrica(bt -> left);
  analizza_nodo(bt);
  visitaSimmetrica(bt -> right);
}
```

Visita anticipata

```
void visitaAnticipata (albero_t* bt){
  if (bt == NULL) return;
  analizza_nodo(bt);
  visitaAnticipata(bt -> left);
  visitaAnticipata(bt -> right);
}
```

Visita posticipata

```
void visitaPosticipata (albero_t* bt){
  if (bt == NULL) return;
  visitaPisticipata(bt -> left);
  visitaPosticipata(bt -> right);
  analizza_nodo(bt);
}
```

Esempio : ricerca

- Supponiamo di avere un tipo albero in cui l'etichetta dei nodi è una stringa
- Scrivere una funzione di prototipo

```
int ricerca (albero_t* bt, char * s);
```

che restituisce 1 se esiste la stringa **`s`** nell'albero **`bt`** e 0 altrimenti

Esempio : ricerca

- Possiamo modificare una qualsiasi delle tre visite viste.
  - Scegliamo la visita anticipata,
  - Nel nostro caso l'analisi del nodo richiede il confronto di due stringhe
  - Inoltre bisogna riportare correttamente il valore restituito dalle chiamate ricorsive alla funzione

Esempio : ricerca

```
int ricerca (albero_t* bt, char* s){
  if (bt == NULL) return 0;
  if (strcmp(bt->val,s) == 0 ) return 1;
  if ( ricerca(bt -> left,s) == 1 )
    return 1;
  return ricerca(bt -> right,s);
}
```

Esempio : somma

- Supponiamo di avere un tipo albero in cui l'etichetta dei nodi è un double
- Scrivere una funzione di prototipo

```
double somma (albero_t* bt);
```

che restituisce la somma di tutte le etichette presenti nell'albero

Esempio : somma

- Possiamo modificare una qualsiasi delle tre visite viste.
  - Scegliamo la visita posticipata
  - Nel nostro caso l'analisi del nodo richiede la somma con i valori ottenuti dal sottoalbero di destra e di sinistra

Esempio : somma

```
double somma_alb (albero_t* bt){
  double sx, dx;
  if (bt == NULL) return 0;
  sx = somma_alb(bt -> left);
  dx = somma_alb(bt -> right);
  return sx + bt->val + dx;
}
```

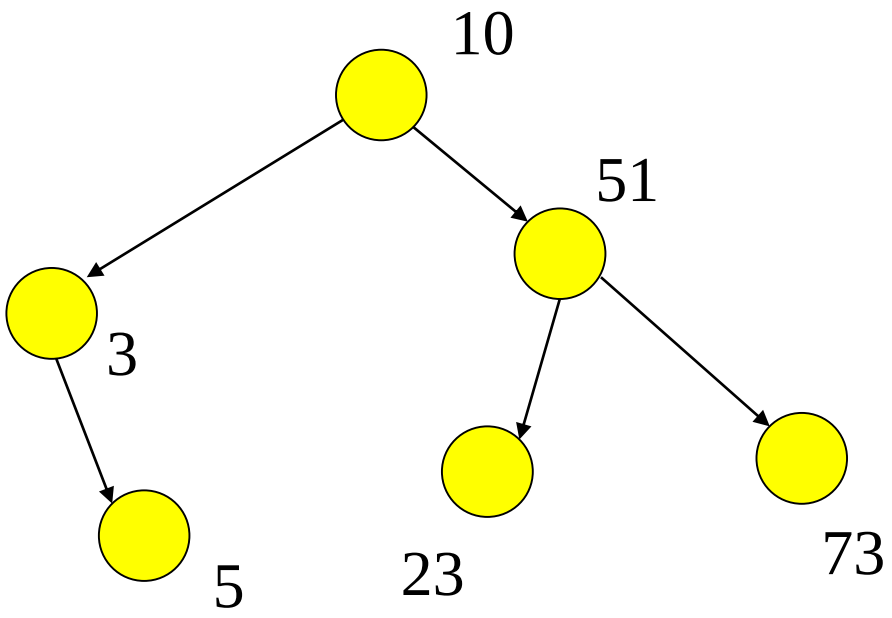
Esempio : alberi binari di ricerca

- Supponiamo di avere un albero binario tale che sulle etichette dei nodi è definito un ordinamento totale
  - Interi, reali, stringhe
  - Indichiamo l'operatore con $\leq$
- Un albero binario di ricerca è un albero in cui
  - Per ogni nodo *n*, indicati con *s(n)* e *d(n)* il figlio di di sinistra e destra, le etichette verificano le seguente relazione

$$E\big(s(n)\big) \leq E(n) \leq E\big(d(n)\big)$$

Ad esempio

- Etichette intere, operatore minore o uguale



Esercizi

- Supponiamo di avere un albero binario di ricerca con etichette intere
  - Scrivere una funzione che cerca se un valore *x* è presente nell'albero con un numero di passi pari all'altezza dell'albero
  - Scrivere una funzione che inserisce una nuova etichetta *x* nell'albero mantenendo l'ordinamento fra i nodi
  - Scrivere una funzione che cancella un nodo dell'albero con una certa etichetta *x* mantenendo l'albero ordinato