Random Walk

Introduzione Teorica

Gli esercizi 8 e 9 sono esempi del problema noto come Random Walk, rispettivamente nel caso monodimensionale e bidimensionale.
Con il termine Random Walk ci si riferisce alla formalizzazione matematica della statistica che descrive gli spostamenti di un oggetto che si muove in modo casuale.
Questo genere di simulazione è estremamente importante per un fisico e ha applicazioni nella meccanica statistica, fluidodinamica e meccanica quantistica.

Vediamo ora come si descrive il problema.

Consideriamo una pallina in un piano bidimensionale che, partendo dall'origine degli assi, si muove compiendo N spostamenti in direzione casuale di lunghezza unitaria.
Le posizioni della pallina saranno quindi descritte nel seguente modo:

$$
\begin{array}{lll}
i = 0 & p_0 & = (0,0); \\
i = 1 & p_1 & = (0 + x_1, 0 + y_1); \\
i = 2 & p_1 & = (0 + x_1 + x_2, 0 + y_1 + y_2); \\
. & . & . \\
. & . & . \\
. & . & . \\
i = N & p_N & = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \, , \sum_{i=1}^{N} y_i \right);
\end{array}
$$

Scriviamo ora (x_i, y_i) in funzione delle coordinate polari (r, θ): $\begin{cases} x_i = r_i \, cos(\theta_i) \\ y_i = r_i \, sin(\theta_i) \end{cases}$

Tuttavia, dato che gli spostamenti sono di modulo unitario, si ha che: $\begin{cases} x_i = \ cos(\theta_i) \\ y_i = \ sin(\theta_i) \end{cases}$

Quindi al passo N la distanza quadratica della pallina dal suo punto di partenza è data da:

$$d^2 = (p_{N,x} - p_{0,x})^2 + (p_{N,y} - p_{0,y})^2 = (p_{N,x})^2 + (p_{N,y})^2$$

Trattiamo ora separatamente $(p_{N,x})^2$ e $(p_{N,y})^2$:

$$(p_{N,x})^2 = \sum_{i=1}^{N} \cos(\theta_i) \cdot \sum_{j=1}^{N} \cos(\theta_j) = \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{N} \cos(\theta_i) \cdot \cos(\theta_i) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \cos(\theta_i) \cdot \cos(\theta_j)$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{N} \cos^2(\theta_i) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \cos(\theta_i) \cdot \cos(\theta_j)$$

$$(p_{N,y})^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{N} \sin^2(\theta_i) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \sin(\theta_i) \cdot \sin(\theta_j)$$

Quindi si ha che:

$$d^2 = (p_{N,x})^2 + (p_{N,y})^2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{N} \cos^2(\theta_i) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \cos(\theta_i) \cdot \cos(\theta_j) + \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{N} \sin^2(\theta_i) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \sin(\theta_i) \cdot \sin(\theta_j)$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i=j}}^{N} 1 + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \cos(\theta_i) \cdot \cos(\theta_j) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \sin(\theta_i) \cdot \sin(\theta_j) = N + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \cos(\theta_i) \cdot \cos(\theta_j) + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \sin(\theta_i) \cdot \sin(\theta_j)$$

Dal momento che la pallina effettua spostamenti casuali, non è possibile determinare il valore di d^2 in modo deterministico, senza conoscere esattamente la direzione scelta ad ogni passo.
È però possibile fare delle considerazioni statistiche andando a studiare la media $\langle d^2 \rangle_K$ della distanza quadratica tra il punto di arrivo e quello di partenza su K tentativi differenti con ugual numero N di passi.

$$\langle d_k^2 \rangle_K = \langle N \rangle_K + \langle \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \cos(\theta_{i,k}) \cdot \cos(\theta_{j,k}) \rangle_K + \langle \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \sin(\theta_{i,k}) \cdot \sin(\theta_{j,k}) \rangle_K$$

$$= N + \langle \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \cos(\theta_{i,k}) \cdot \cos(\theta_{j,k}) \rangle_K + \langle \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \sin(\theta_{i,k}) \cdot \sin(\theta_{j,k}) \rangle_K$$

$$= N + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \langle \cos(\theta_{i,k}) \cdot \cos(\theta_{j,k}) \rangle_K + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^{N} \langle \sin(\theta_{i,k}) \cdot \sin(\theta_{j,k}) \rangle_K$$

Per K che tende a infinito si hanno le seguenti relazioni:

$$\langle \cos(\theta_{i,k}) \cdot \cos(\theta_{j,k}) \rangle_K \to \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$\langle \sin(\theta_{i,k}) \cdot \sin(\theta_{j,k}) \rangle_K \to \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\pi}^{\pi} \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)\, d\alpha\, d\beta$$

Dove per semplicità sono stati sostituiti $\theta_{i,k}$ e $\theta_{j,k}$ con le variabili mute α e β.
Risolviamo la prima. Per la formula di Werner vale:

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)\, d\alpha\, d\beta = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} d\alpha\, d\beta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\pi + \beta) + \sin(\pi - \beta) - \sin(-\pi + \beta) - \sin(-\pi - \beta)}{2}\, d\beta =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(\pi + \beta) + \sin(\pi - \beta))\, d\beta = 0$$

Si dimostra analogamente che $\langle \sin(\theta_{i,k}) \cdot \sin(\theta_{j,k}) \rangle_K \to 0$.

Quindi per K→ ∞ e per passi di lunghezza unitaria si ha che $\langle d^2 \rangle = N$

Si può facilmente dimostrare che se i passi hanno lunghezza L, la relazione diventata $\langle d^2 \rangle = L^2 \cdot N$

Questo risultato è molto interessante in fisica perchè ci dice che anche un moto casuale ha in realtà una sua regolarità (solo che essa è visibile solo su tanti tentativi).

Esercizio

Partendo dal programma scritto per l'esercizio 9, scrivere un nuovo programma che a fissato numero N di passi di lunghezza unitaria, fa la media di K distanze quadratiche tra il punto di arrivo e il punto di partenza della pallina, calcolate utilizzando K seed diversi.

Le simulazioni effettuate dimostrano che $\langle d^2 \rangle = N$?
Ovviamente, dato che K non può essere infinito, sperimentalmente si osserverà: $\langle d^2 \rangle \approx N$.

Consigli:

- Ricordare che la distanza quadratica media non è uguale al quadrato della distanza media: $\langle d^2 \rangle \neq \langle d \rangle^2$
- Ricordare che i passi devono avere lunghezza unitaria.
- Per vedere una buona relazione impostare almeno N≈100 e K≈500.