Si può ora dimostrare che il problema decisionale della soddisfattibilità, enunciato nel paragrafo 7.2.2, si riduce al problema decisionale del sottografo completo. Data una forma normale congiuntiva $F(x_1, ..., x_n)$ si tratta di costruire in tempo polinomiale un grafo G che, per un opportuno valore di k dipendente da F, abbia un sottografo completo di k nodi se e solo se esiste un assegnamento di valori di $x_1, ..., x_n$ che soddisfa la F. Questa dimostrazione sarà ora esposta in dettaglio: chi fosse interessato solo ai risultati può saltare direttamente al teorema successivo.

Poniamo che la F sia composta di k clausole: $F = C_1 \wedge C_2 \wedge ... \wedge C_k$. Ogni apparizione di una variabile x_i nella F, sia essa in forma diretta o negata, è detta un *letterale* di F. Il grafo G avrà un nodo per ogni letterale di F: la coppia (z, j) indicherà il nodo corrispondente alla presenza del letterale z nella clausola C_j. Gli archi di G uniranno le coppie di nodi $(z, j), (w, h)$, con $z \neq \overline{w}$ e $j \neq h$: gli archi indicheranno cioè coppie di letterali appartenenti a clausole diverse $(j \neq h)$, che possono avere contemporaneamente valore *vero* $(z \neq \overline{w})$. Seguiamo la costruzione di G sull'esempio di figura 32. La F è costruita su $n = 3$ variabili a, b, c, ed è composta di $k = 3$ clausole. Il corrispondente grafo ha sei nodi, quanti sono i letterali nella F; vi compare, ad esempio, l'arco tra $(a, 1)$ e $(\overline{b}, 2)$; ma non vi compare l'arco tra $(a, 1)$ e $(b, 1)$, perché i nodi sono relativi alla stessa clausola, o l'arco tra $(a, 1)$ e $(\overline{a}, 2)$, perché i nodi corrispondono alla stessa variabile in forma diretta e negata.

Il sottografo completo G' da ricercare in G avrà k nodi, ciascuno relativo a un letterale in una diversa clausola di F (si noti che G' non può avere due nodi relativi alla stessa clausola, poiché non esisterebbe l'arco corrispondente, contro l'ipotesi che G' sia completo). Se G' esiste, l'assegnazione del valore *vero* ai k letterali relativi ai suoi nodi renderà *vero* il valore di tutte le clausole, e quindi della F. Il grafo di figura 32 contiene due sottografi completi relativi ai letterali $a, \overline{b}, \overline{c}$ e $\overline{a}, b, \overline{c}$: le assegnazioni del valore *vero* ai letterali di ciascuna terna (cioè le assegnazioni: $a = vero$, $b = falso$, $c = falso$; e $a = falso$, $b = vero$, $c = falso$; alle variabili delle terne) costituiscono due scelte che soddisfano la F. Dunque la F è soddisfattibile se G ha un sottografo completo di k nodi. Viceversa, se la F è soddisfattibile, deve essere possibile assegnare contemporaneamente il valore *vero* ad almeno un letterale per ogni clausola: G conterrà allora un sottografo completo costruito sui nodi corrispondenti a tali letterali. In conclusione la F è soddisfattibile se e solo se G ha un sottografo completo di k nodi.

Notiamo infine che G può essere costruito in tempo polinomiale da F. Infatti vi sono al massimo $k \cdot n$ letterali in F, e quindi $k \cdot n$ nodi in G. L'esistenza dell'arco tra i nodi generici (z, j) e (w, h) può essere stabilita in

$$F = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3$$
$$= (a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \wedge (\bar{c})$$

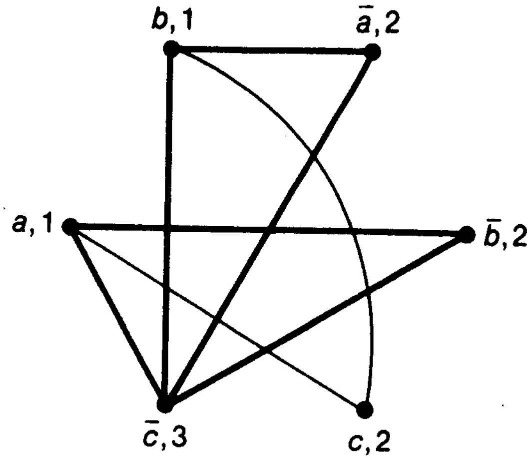

Figura 32
Una forma normale congiuntiva con tre clausole e il grafo corrispondente; i due sottografi completi di tre nodi indicano le scelte: $a=\bar{b}=\bar{c}=vero$, $b=\bar{a}=\bar{c}=vero$, che soddisfano la F.

tempo costante confrontando z con w, e j con h: poiché vi sono $O((kn)^2)$ possibili archi, l'intera costruzione di G avverrà in tempo di pari ordine.

Abbiamo così compiutamente provato che il problema decisionale della soddisfattibilità si riduce a quello del sottografo completo.

Possiamo ora affrontare il risultato di maggior importanza oggi noto per i problemi della classe $\mathcal{NP}$. Questo risultato fu presentato da Stephen Cook in un famoso articolo (Cook, 1971), che pose le basi teoriche per tutti i successivi studi.

Teorema *Qualunque problema nella classe $\mathcal{NP}$ si riduce al problema decisionale della soddisfattibilità.*

La dimostrazione del teorema di Cook è piuttosto complessa, e non può essere riportata qui. In sostanza essa mostra come, per qualsiasi algoritmo polinomiale non deterministico A e per qualsiasi insieme di dati di ingresso D, si possa costruire in tempo polinomiale una forma normale congiuntiva F che assume valore *vero* se e solo se la computazione $A(D)$ termina su **success**.

Il problema della soddisfattibilità P_S è dunque, in certo senso, il "più difficile" problema in $\mathcal{NP}$,[2] poiché un algoritmo di soluzione per P_S può essere impiegato per risolvere qualsiasi altro problema $P \in \mathcal{NP}$. Se si

[2] Abbiamo già mostrato che $P_S \in \mathcal{NP}$, poiché esiste l'algoritmo polinomiale non deterministico 7.8 per risolvere P_S.