Capitolo 1

Analisi di un problema semiserio

A molti di noi, durante l'adolescenza, è stato proposto il famoso

Problema delle dodici monete. Tra dodici monete di identico aspetto potrebbe nascondersene una falsa e pertanto di peso diverso. Disponendo di una bilancia a due piatti per confrontare gruppi di monete, si vuole individuare la moneta falsa e stabilire se essa pesi più o meno delle altre, mediante non più di tre pesate.

Chi si sia cimentato con questo problema lo avrà probabilmente considerato difficilissimo, non trovando nelle sue conoscenze traccia di alcun procedimento da seguire. Vorremmo proporre a tutti di spendere qualche istante a riconsiderare il problema prima di procedere nella lettura: sarà così più interessante scoprire in seguito quali considerazioni generali possano guidare alla soluzione.

La prima domanda che dobbiamo porci è se il problema si possa risolvere con un numero di pesate inferiore a tre. A tal fine, numerate per semplicità le monete da 1 a 12, elenchiamo tutte le soluzioni. Esse sono venticinque, e precisamente: la moneta 1 è falsa e più pesante delle altre (indichiamo questa soluzione con 1P); la moneta 1 è falsa e più leggera delle altre (1L); la moneta 2 è falsa e più pesante (2P), o più leggera (2L), e così via fino ai casi 12P e 12L, oppure nessuna moneta è falsa (indichiamo questa soluzione con 0).

Notiamo ora che per risolvere il problema dobbiamo effettuare una serie di pesate che si arresta quando è stato individuato uno dei venticinque casi detti. Poiché ogni pesata dà luogo a tre alternative (il piatto destro sale e il sinistro scende, il piatto destro scende e il sinistro sale, i due piatti restano in equilibrio) dopo una pesata siamo in grado di distinguere fra tre situazioni differenti; dopo due pesate, tra nove situazioni differenti, poiché ciascuno dei precedenti tre casi si divide ancora in tre; dopo tre pesate possiamo distinguere tra ventisette situazioni differenti, e così via. Vediamo quindi che non si può risolvere il problema con due pesate, che non permettono di aprire le venticinque alternative necessarie per tutte le soluzioni possibili; tre pesate invece potrebbero essere sufficienti, e costituiscono quindi un *limite inferiore* al numero di operazioni. In altre parole, abbiamo provato che non si può risolvere il problema con meno di tre pesate, ma non siamo ancora in grado di affermare che esiste un algoritmo che impieghi effettivamente tre pesate. La prova di tale esistenza è, come d'uso, costruttiva, poiché conseguirà dalla determinazione dell'algoritmo stesso.

Procediamo per tentativi. Immaginiamo che nella prima pesata si confrontino tra loro due monete: diciamo, senza perdere in generalità, la 1 con la 2, e indichiamo tale confronto con 1 : 2. E' un buon inizio? La risposta è negativa, e possiamo rendercene conto utilizzando la rappresentazione grafica della figura 1, di ovvio significato: se risulta che 1 è più leggera di 2 (indicato con $1 < 2$), conseguono le due possibili soluzioni 1 L o 2P (fig. 1*a*); un successivo confronto, per esempio tra 1 e 3 che certamente non è falsa, consente di giungere in modo ovvio alla soluzione (fig. 1*b*). Il caso "1 più pesante di 2" ($1 > 2$) è simmetrico, e conduce con un'altra pesata alla soluzione 1P o 2L. In questi due casi cioè il problema si risolve con due sole pesate. Tuttavia il caso in cui 1 e 2 hanno ugual peso ($1 = 2$) vede aperte innanzi a sé le rimanenti ventuno soluzioni: 3L, 3P, ..., 12L, 12P, 0. Ora è chiaro, per quanto detto sopra, che per discernere tra ventuno soluzioni non sono sufficienti due ulteriori pesate, che aprono solo nove alternative; quindi, sotto la scelta iniziale di confrontare due singole monete, vi sono casi in cui è impossibile risolvere il problema con tre pesate.

Proviamo ora a confrontare inizialmente due coppie di monete, diciamo 1 e 2 su un piatto e 3 e 4 sull'altro (1, 2 : 3, 4). Dal risultato $1, 2 < 3, 4$ conseguono le soluzioni 1L, 2L, 3P, 4P. Similmente dal risultato $1, 2 > 3, 4$ conseguono le soluzioni 1P, 2P, 3L, 4L. Dal risultato $1, 2 = 3, 4$ conseguono invece le diciassette soluzioni 5L, 5P, ..., 12L, 12P, 0, che non possono essere tutte individuate con meno di tre ulteriori pesate: anche la scelta iniziale di confrontare due coppie di monete è quindi da scartare.

Similmente scartiamo il confronto iniziale tra due terne 1, 2, 3 : 4, 5, 6, poiché dal risultato $1, 2, 3 = 4, 5, 6$ conseguono tredici soluzioni, non individuabili con meno di tre ulteriori pesate; e veniamo al confronto iniziale tra due quaterne 1, 2, 3, 4 : 5, 6, 7, 8 (fig. 2). Qui si vede che le

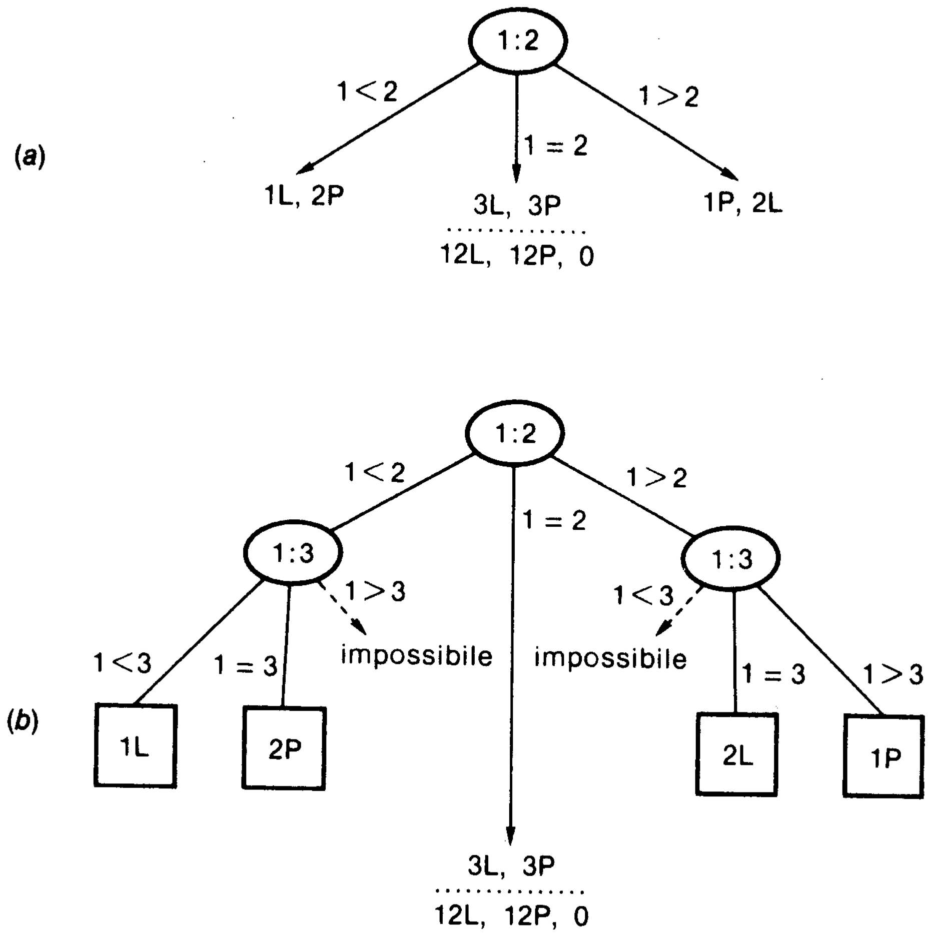

Figura 1
Confronto iniziale tra singole monete: (*a*) la divisione delle soluzioni dopo un confronto; (*b*) determinazione delle soluzioni nei casi $1 < 2$ e $1 > 2$.

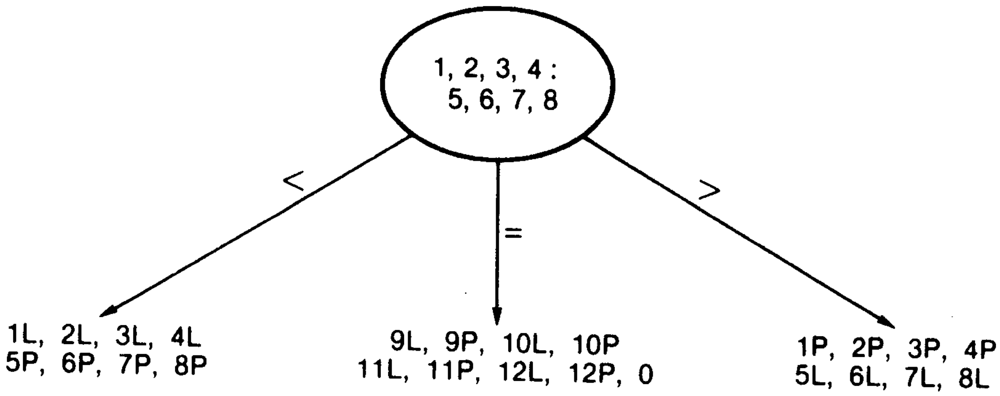

Figura 2
Confronto iniziale fra quaterne.

venticinque soluzioni si sono ripartite nei tre gruppi di otto, nove e otto, e quindi in ogni caso due ulteriori confronti potrebbero essere sufficienti.

Prima di procedere nell'esame di questo caso osserviamo che le altre possibili scelte iniziali, di cinque contro cinque e sei contro sei, ripartiscono le soluzioni in tre gruppi, rispettivamente di dieci, cinque e dieci, e di dodici, uno e dodici, e non sono quindi buone scelte. In particolare, nella scelta iniziale "sei contro sei" il risultato 1, 2, 3, 4, 5, 6 = 7, 8, 9, 10, 11, 12 conduce direttamente alla soluzione 0 (fig. 3): in linea di principio dobbiamo resistere alla tentazione di seguire una simile via, perché se alcune soluzioni si individuano troppo presto, tutte le altre soluzioni sono lasciate alle alternative restanti, e la loro determinazione può richiedere troppi confronti.

Questo principio generale si chiama *bilanciamento*; ne discuteremo a fondo nel seguito, limitandoci per ora a osservare come nel nostro problema il bilanciamento migliore si ottenga con il confronto di quaterne, che divide appunto le soluzioni in tre gruppi di dimensioni assai prossime. In effetti il confronto iniziale tra quaterne è l'unico compatibile con i tre confronti complessivi richiesti dal problema.

Riprendendo il caso delle quaterne, è chiaro ora come le tre alternative aperte dalla prima pesata vadano a loro volta suddivise in tre mediante una seconda pesata, in modo che ciascuna delle nove alternative così ottenute conduca a tre soluzioni al massimo: una pesata finale dovrà poi permettere di discernere tra queste tre soluzioni. La scelta delle monete da confrontare nella seconda pesata non è banale, e possiamo anzi affermare che in essa risiede la vera difficoltà del problema, specie se affrontato senza metodo.

Consideriamo la prima alternativa, ove il risultato 1, 2, 3, 4 < 5, 6, 7, 8 apre la via alle otto soluzioni 1L, 2L, 3L, 4L, 5P, 6P, 7P, 8P, ed eseguiamo il nuovo confronto 1, 2, 5 : 3, 4, 6. E' ora indispensabile seguire il procedimento sulla figura 4. L'alternativa 1, 2, 5 < 3, 4, 6 implicherebbe di per sé che la soluzione sia scelta tra le 1L, 2L, 5L, 3P, 4P, 6P; tra queste però le sole 1L, 2L e 6P sono compatibili con le soluzioni aperte al passo precedente, e sono quindi le uniche da mantenere in considerazione. (In altre parole, il primo risultato, 1, 2, 3, 4 < 5, 6, 7, 8, ha permesso per esempio di concludere che se la moneta falsa è la 5, allora essa deve essere più pesante delle altre (5P); il successivo risultato 1, 2, 5 < 3, 4, 6 vede la moneta 5 nel gruppo più leggero (5L), e consente di concludere che 5 non può essere falsa.) Il terzo confronto, effettuato tra 1 e 2, permette di discriminare tra le soluzioni 1L, 2L e 6P, come indicato nella figura.

Il lettore potrà ora seguire sulla figura lo sviluppo dei casi 1, 2, 5 = 3, 4, 6 e 1, 2, 5 > 3, 4, 6; noterà che le otto soluzioni emerse dal primo confronto si

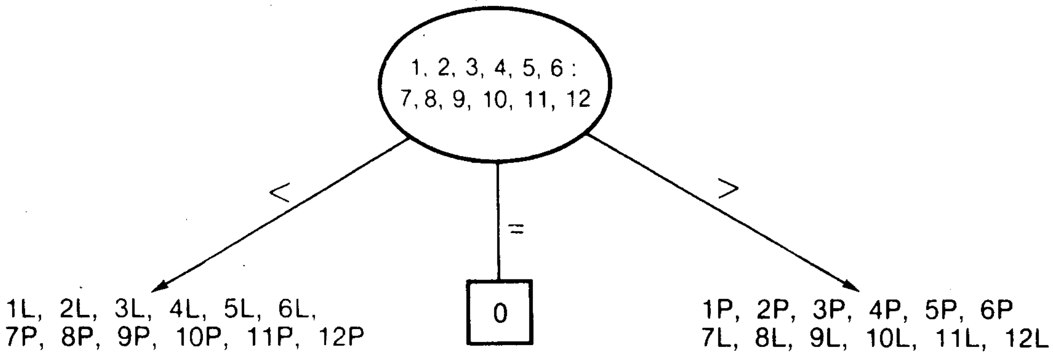

Figura 3
Confronto iniziale tra gruppi di sei: l'alternativa centrale conduce direttamente alla soluzione 0.

sono divise in tre gruppi bilanciati di tre, due e tre soluzioni. Poiché l'alternativa centrale dà luogo a due sole soluzioni, il confronto risolutore 7 : 8 ha due soli possibili risultati anziché tre. (In effetti a quel punto è noto che una tra le monete 7 e 8 deve essere falsa, e il confronto di queste non può lasciare in equilibrio i piatti della bilancia.)

Studiamo ora le altre due alternative aperte con il primo confronto. L'alternativa 1, 2, 3, 4 > 5, 6, 7, 8 dà luogo a uno sviluppo del tutto simmetrico a quello della prima; vediamo dunque, per concludere, l'alternativa centrale 1, 2, 3, 4 = 5, 6, 7, 8. In questo caso le monete confrontate sono sicuramente non false, quindi le soluzioni possibili sono 9L, 10L, 11L, 12L, 9P, 10P, 11P, 12P, 0. A ben considerare, abbiamo ridotto il problema a uno analogo sulle sole quattro monete 9, 10, 11, 12, e chiediamo di risolverlo con due pesate. Rispetto al problema originale abbiamo però a disposizione alcune addizionali monete di riferimento: le 1, 2, ..., 8, sicuramente non false. Facendo uso di una di queste monete (la 1), l'algoritmo può svilupparsi come è indicato nella figura, ove le nove soluzioni si dividono in tre gruppi bilanciati di tre ciascuna dopo il secondo confronto;[1] un confronto finale permette di chiudere in ogni caso il problema.

La nostra analisi termina qui. La forma di rappresentazione di un algoritmo come quella della figura 4 è detta *albero di decisione*: ogni per-

[1] E' possibile dimostrare che non si può risolvere con due pesate il problema su quattro monete, senza disporre di una moneta di riferimento; il lettore dovrebbe essere ormai in grado di provare da solo questa asserzione. Per uno studio più approfondito sul problema vedi Reingold e altri (1977).

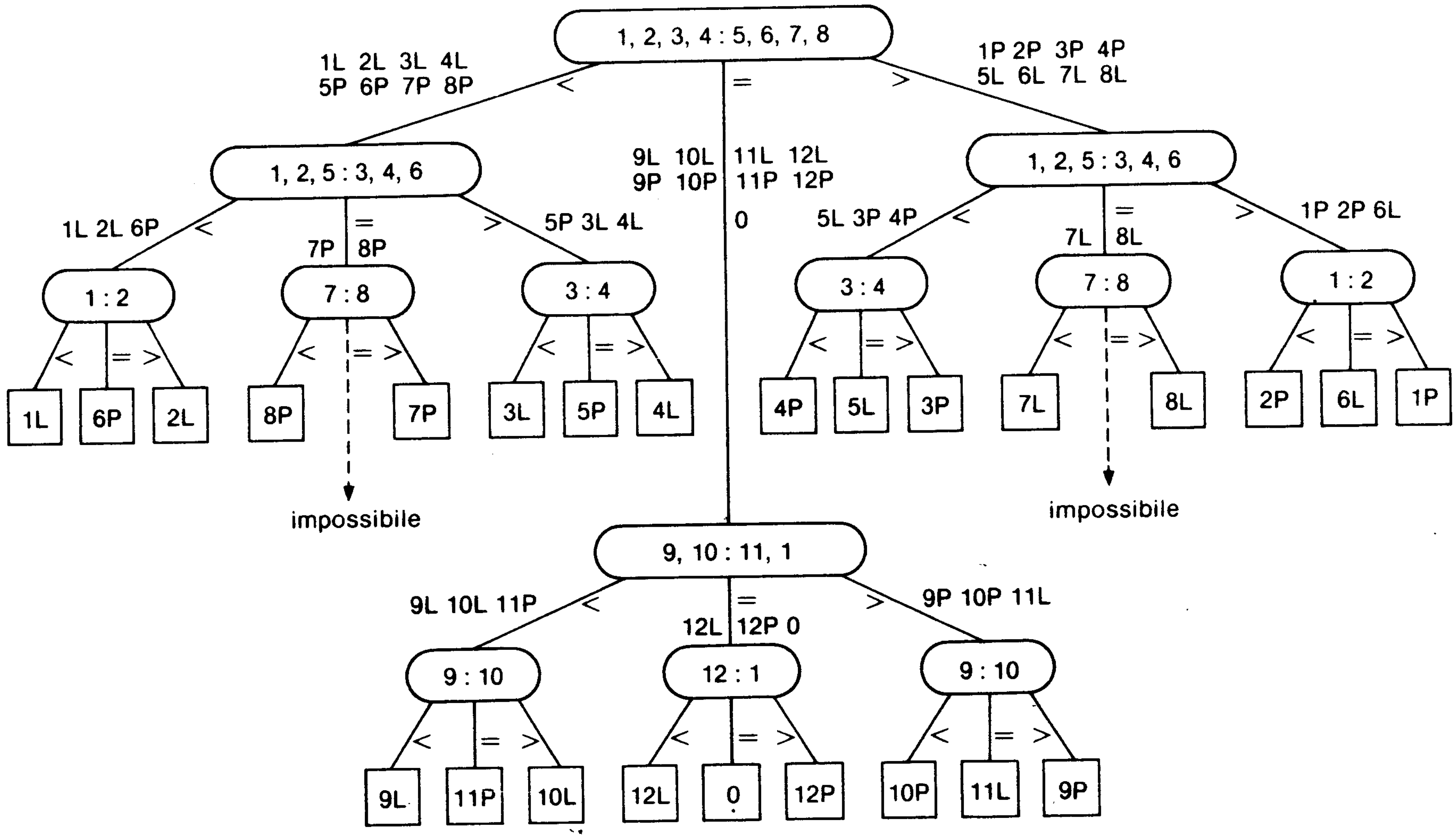

Figura 4
Un algoritmo per la risoluzione del problema delle dodici monete.

corso che dall'alto giunge a una soluzione rappresenta l'esecuzione dell'algoritmo su un particolare insieme di dati.

Nel seguito si studieranno alcune linee generali lungo cui si sviluppano gli algoritmi, e si scoprirà come tante considerazioni fatte sull'albero di decisione siano particolari esempi di affermazioni valide in genere. In particolare, si vedrà come dal numero di soluzioni di un problema si possa inferire un limite inferiore al numero di passi richiesti da qualsiasi algoritmo che lo risolva e come dal bilanciamento del lavoro nelle diverse vie che conducono alle soluzioni derivi un miglioramento dell'efficienza complessiva dell'algoritmo.