Titolo nota 26/02/2016

TEOREMA PRINCIPALE

Siano $a \geq 1$, $b > 1$, $n_0 \geq 0$ delle costanti, sia $f(n)$ una funzione non negativa, sia $T(n)$ una funzione definita su interi dall'equazione di ricorrenza:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n \leq n_0 \\ aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) & \forall n > n_0 \end{cases}$$

Allora $T(n)$ può essere limitata asintoticamente come segue:

1) Se $f(n) = O\left(n^{\log_b a - \varepsilon}\right)$ per $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$

2) Se $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$ $\Rightarrow$ $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$

3) $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b a + \varepsilon}\right)$ $\varepsilon > 0$ e $a f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c f(n)$ $c < 1$ $\Rightarrow$ $T(n) = \Theta(f(n))$

MOLTIPLICAZIONE VELOCE DI INTERI DI LUNGHEZZA ARBITRARIA

A, B interi di n cifre

- leggere e scrivere A o B richiede tempo $\Theta(n)$
- $\boxed{\text{ADDIZIONE}}$

A +
B =

$\Theta(n)$

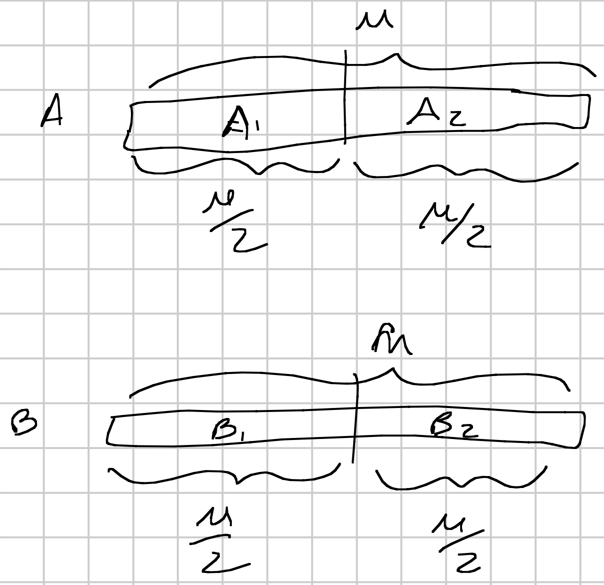
- $\boxed{\text{MOLTIPLICAZIONE}}$

A ×
B =

$\Theta(n^2)$

n^2 moltiplicazioni

n addizioni



$A = A_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + A_2$

$B = B_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + B_2$

$A = 12\cdot345\cdot678$ $n = 8$

ottengo A_1, A_2, B_1, B_2 in tempo $\Theta(n)$

$A_1 = 1234$ $A_2 = 5678$

$A = 1234 \cdot 10^4 + 5678$

$A * B = (A_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + A_2) * (B_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + B_2) = A_1 B_1 \cdot 10^n + (A_1 B_2 + B_1 A_2) \cdot 10^{n/2} + A_2 B_2$

$A = A_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + A_2$

$B = B_1 \cdot 10^{\frac{n}{2}} + B_2$

algoritmo DIVIDE ET IMPERA

Titolo nota 26/02/2016

MOLT (A, B, n) $T(n)$

CASO BASE

{ if $(n == 1)$ then return $A * B$;

DIVISIONE

else { <divido A e B in A_1, B_1, A_2, B_2>; $\Theta(n)$

RICORSIONE

$X = \text{MOLT}(A_1, B_1, \frac{n}{2})$; $T(n/2)$

$Y = \text{MOLT}(A_2, B_2, \frac{n}{2})$; $T(n/2)$

$Z = \text{MOLT}(A_1, B_2, \frac{n}{2}) + \text{MOLT}(A_2, B_1, \frac{n}{2})$; $2T(\frac{n}{2})$

COMBINAZIONE

return $X \cdot 10^n + Z \cdot 10^{n/2} + Y$; $\Theta(n)$

$\Theta(n)$

}

}

$$A * B = \underbrace{A_1 B_1}_{X} \cdot 10^n + (\underbrace{A_1 B_2 + B_1 A_2}_{Z}) \cdot 10^{n/2} + \underbrace{A_2 B_2}_{Y}$$

2 chiamate ricorsive!

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ 4T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) & n > 1 \end{cases}$$

$a = 4$

$b = 2$

$n^{\log_b a} = n^2$ $f(n) = \Theta(n)$ 1° caso

$f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$ $0 < \varepsilon \leq 1$ $\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$

Titolo nota 26/02/2016

$$\underbrace{A_1B_2}+\underbrace{B_1A_2} = \underbrace{(A_1+A_2)}_{\Theta(n/2)}\underbrace{(B_1+B_2)}_{\Theta(n/2)} - \underbrace{A_1B_1}_{\checkmark} - \underbrace{A_2B_2}_{\checkmark}$$

Molt di 2 numeri lunghi $n/2$

$$A*B = A_1B_1\cdot 10^{n} + (A_1B_2+B_1A_2)\,10^{n/2} + A_2B_2$$

$a=3$ $\quad n^{\log_b a} = n^{\log_2 3} = n^{1,585}$

$b=2$

$f(n) = \Theta(n)$ $\quad$ $f(n) = O(n^{1,585-\varepsilon})$ $\quad \{0<\varepsilon\leq \log_2 3-1=0,585\}$

$\Rightarrow$ 1° caso $\quad T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{1,585})$

MOLT2(A, B, n)

{ if (n==1) **then** return A*B; $\quad \Theta(1)$

else { <dividi A e B in A_1, B_1, A_2, B_2>; $\Theta(n)$

$3T(\frac{n}{2})$

X = MOLT2(A_1, B_1, n/2);

Y = MOLT2(A_2, B_2, n/2);

Z = MOLT2(A_1+A_2, B_1+B_2, $\frac{n}{2}$) − X − Y;

return $X\cdot 10^{n} + Z\cdot 10^{n/2} + Y$; $\quad \Theta(n)$

}

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n=1 \\ 3T\left(\frac{n}{2}\right)+\Theta(n) & n>1 \end{cases}$$

MOLTIPLICAZIONE DI MATRICI

A, B matrici $n \times n$

$A + B \quad \Theta(n^2)$

$A * B \quad \Theta(n^3) \Leftarrow \Theta(n) \cdot n^2$

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ 8T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2) & n > 1 \end{cases}$$

$a = 8$

$b = 2$

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 8} = n^3$

$f(n) = \Theta(n^2) \qquad f(n) = O(n^{3-\varepsilon}) \qquad 0 < \varepsilon \le 1$

$\Rightarrow$ 1° caso $\quad T(n) = \Theta(n^3)$

DIVIDE ET IMPERA

$$n\left\{\underbrace{\overset{A}{\begin{bmatrix} A_{11} & \overbrace{A_{12}}^{n/2} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}}}_{n}\right. * \underbrace{\overset{B}{\begin{bmatrix} \overbrace{B_{11}}^{n/2} & \overbrace{B_{12}}^{n/2} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}}}_{n} = \left.\underbrace{\overset{A*B}{\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}}}_{n}\right\} n$$

8 moltiplicazioni di matrici $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$

4 addizioni

$[\ldots] \rightsquigarrow$ 7 chiamate ricorsive

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n = 1 \\ 7T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2) & n > 1 \end{cases}$$

$a = 7$

$b = 2$

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 7} = n^{2{,}807}$

$f(n) = n^2 = O(n^{2{,}807 - \varepsilon}) \qquad 0 < \varepsilon \le 0{,}807$

$\Rightarrow$ caso 1° $\quad T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{2{,}807})$

Titolo nota 26/02/2016

ESERCIZIO SUL TEOREMA PRINCIPALE

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & n \le 2 \\ 4T\left(\frac{n}{2}\right) + \end{cases}$$

(1) n
(2) n^2
(3) n^4
(4) $n^2 \log n$
(5) $n^2/\log n$
(6) $n/\log^2 n$
(7) $n^3 \cdot \log n$

$a = 4$

$b = 2$

$n^{\log_b a} = n^{\log_2 4} = n^2$

(1) $f(n) = n = O(n^{2-\varepsilon}) \quad 0 < \varepsilon \le 1$

$\Rightarrow$ CASO 1° $\quad T(n) = \Theta(n^2)$

(2) $f(n) = n^2 = \Theta(n^2) \Rightarrow$ CASO 2° $\quad T(n) = n^2 \log n$

(3) $f(n) = n^4 = \Omega(n^{2+\varepsilon}) \quad 0 < \varepsilon \le 2$

condizione di regolarità $\quad a f\left(\frac{n}{b}\right) \le c f(n) \quad c < 1$

$4\left(\frac{n}{2}\right)^4 = 4 \cdot \frac{n^4}{16} = \frac{n^4}{4} \le c \cdot n^4 \quad c = 1/4 \quad \Rightarrow T(n) = n^4$

(4) $f(n) = n^2 \log n \ne \Omega(n^{2+\varepsilon}) \quad \varepsilon > 0$?

(5) $f(n) = \frac{n^2}{\log n} \ne O(n^{2-\varepsilon}) \quad \varepsilon > 0$?

(6) $f(n) = n/\log^2 n = O(n^{2-\varepsilon}) \quad 0 < \varepsilon \le 1 \Rightarrow$ CASO 1° $\quad T(n) = \Theta(n^2)$

(7) $f(n) = n^3 \log n = \Omega(n^{2+\varepsilon}) \quad 0 < \varepsilon \le 1 \Rightarrow$ CASO 3° $\quad T(n) = \Theta(n^3 \log n)$

$4\left(n/2\right)^3 \log \frac{n}{2} \le 4/8\, n^3 \cdot \log n = \frac{n^3}{2} \log n \le c\, n^3 \log n \quad c = \frac{1}{2} < 1$

ESERCIZIO SUL TEOREMA PRINCIPALE

- Il tempo di esecuzione di un algoritmo A è $T(n) = 7\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

  A' è $T'(n) = a\,T'\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$

- Qual è il più grande valore di a per cui A' è asintoticamente più veloce di A?

Costo di A

$T(n) = 7\,T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$ caso 1

$a = 7$

$b = 2$

$n^{\log_b a} = n^{2{,}807}$ $T(n) = \Theta(n^{2{,}807})$

$f(n) = n^2 = O(n^{2{,}807 - \varepsilon})$ $0 < \varepsilon \leq 0{,}807$

Costo di A':

a

$b = 4$

$T'(n) = \Theta(n^2)$ $f(n) = n^2$

$n^{\log_b a} = \Omega(n^{2+\varepsilon}) \iff$

$\log_4 a < 2 \iff a < 16$

- $a < 15 \Rightarrow$ conviene A'
- $a = 16$ $n^{\log_b a} = n^2 \iff a = 16$ $T'(n) = \Theta(n^2 \log n)$

  $\Rightarrow$ conviene A'
- $a > 16$

$a > 16$ 1° caso

$\log_4 a > 2 \Rightarrow f(n) = n^2 = O(n^{\log_4 a - \varepsilon}) \quad 0 \le \varepsilon \le \log_4 a - 2$

$T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^{\log_4 a})$

$n^{\log_4 a} < n^{2,807} = n^{\log_2 7}$ per $a \ge 49$ conviene l'algoritmo A

$\Leftrightarrow$

$\log_4 a < \log_2 7$ $\quad \log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

$\Leftrightarrow$

$\frac{\log_2 a}{\log_2 4} < \log_2 7 \Leftrightarrow \log_2 a < 2 \cdot \log_2 7 = \log_2 7^2 = \log_2 49$

per $a \le 48$ conviene l'algoritmo A'

- $T(n) = 9\,T\left(\frac{n}{3}\right) + n$
- $T(n) = T\left(\frac{2n}{3}\right) + 1$
- $T(n) = 3\,T\left(\frac{n}{4}\right) + n \cdot \log n$