Titolo nota 26/02/2016

GRAFI

NON ORIENTATI

$G = (V, E)$

V = insieme dei vertici o nodi

$E \subseteq V \times V$ = insieme degli archi $\rightsquigarrow$ coppie non ordinate di vertici

$\downarrow$

$(u, v) \in E \qquad u, v \in V$

$(u, v) = (v, u)$

$|V| = n \qquad$ n = ordine del grafo

$$|E| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2)$$

$$0 \leq |E| \leq \binom{n}{2}$$

GRAFO DENSO : $|E| = \Theta(n^2)$

GRAFO SPARSO : $|E| = \Theta(n)$

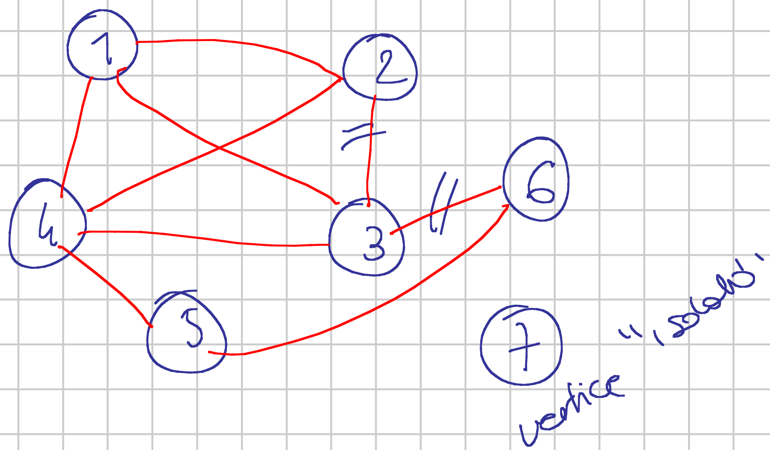
dimensione di un grafo:

$$\underbrace{|V|}_{n} + \underbrace{|E|}_{m} = n + m$$

$G = (V, E)$

$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$E = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4), (3,6), (4,5), (5,6)\}$



$\sum_{v} \delta(v) = 18 = 2|E|$

$d(2,6) = 2$

$(2, 3, 6)$

$d(1,6) = 2$

$(1, 3, 6)$

$d(2,7) = +\infty$

Titolo nota 26/02/2016

$G = (V, E)$

$u, v \in V$ $(u, v) \in E \Rightarrow u$ e v sono ADIACENTI

l'arco (u, v) è INCIDENTE su u e v

$\forall v \in V$

<u>grado</u> di $v = \delta(v) = \#$ archi incidenti su v

v è un vertice <u>ISOLATO</u> sse $\delta(v) = 0$

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| = 2m$$

Titolo nota 26/02/2016

CAMMINO

da un vertice u a un vertice v

$$u \rightsquigarrow v$$

è una sequenza di vertici a due a due adiacenti.

$$\boxed{u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = v}$$ → cammino di lunghezza (# archi) k.

t.c. $\forall i$, $1 \le i \le k$,

$$(x_{i-1}, x_i) \in E$$

Cammino semplice tutti i vertici che lo compongono sono distinti

Distanza tra due vertici u e v

minimo di archi da percorrere per spostarsi da u a v

Titolo nota 26/02/2016

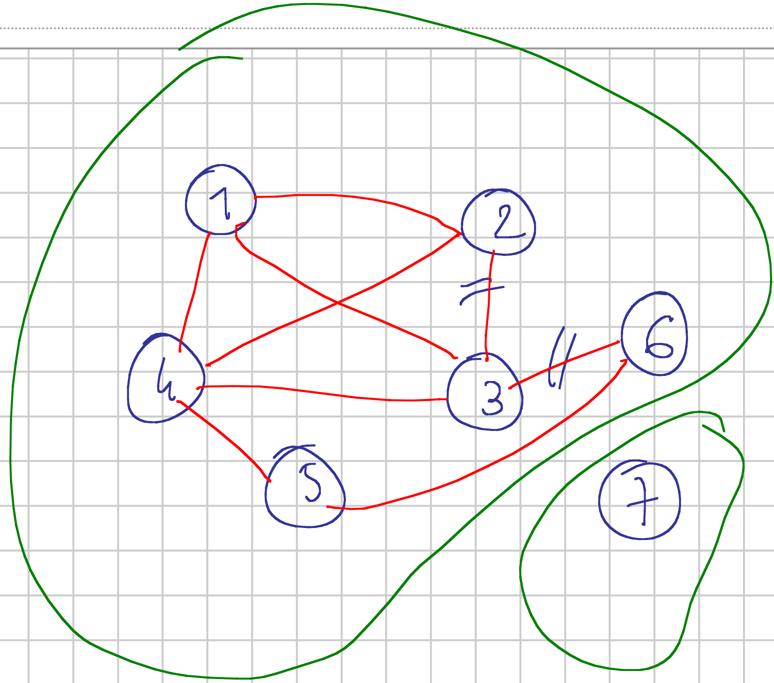
CICLO: cammino

$u = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = v$

t.c. $u = v$

$\langle 1, 4, 5, 6 \rangle$ cammino di lunghezza 3

$\langle 1, 2, 3, 6, 5, 4, 1 \rangle$ ciclo



2 componenti connesse

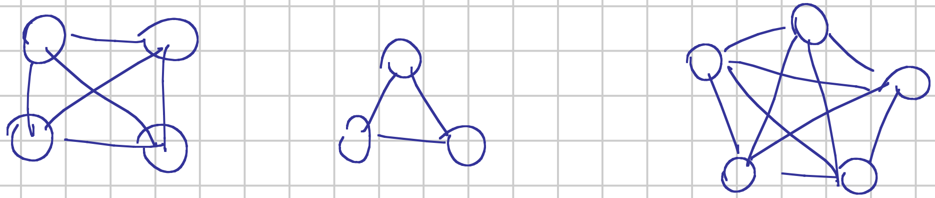
GRAFO CONNESSO

$\exists$ un cammino tra ogni coppia di vertici

$\forall u,v \in V \quad \exists\, u \rightsquigarrow v$ (u e v sono connessi)

GRAFO COMPLETO "CLIQUE"

$\forall u,v \in V \quad (u,v) \in E \qquad |E| = \binom{n}{2}$



$\forall v \in V,$
$\delta(v) = n-1$

Titolo nota 26/02/2016

SOTTOGRAFO

$G = (V, E)$

$G' = (V', E')$ è un sottografo di G $\Longleftrightarrow$ $V' \subseteq V$

$E' \subseteq V' \times V'$

$E' \subseteq E$

COMPONENTE CONNESSA di G

sottografo di G connesso e massimale

(classe di equivalenza della relazione "è raggiungibile da")

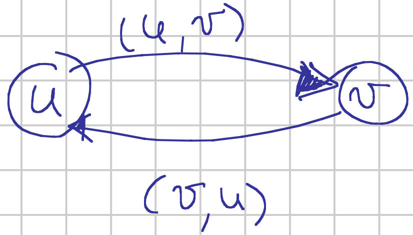
GRAFI ORIENTATI (DIRETTO)

$G = (V, E)$

E insieme di coppie ORDINATE di vertici

$(u,v) \neq (v,u)$

$0 \le |E| \le n(n-1) = 2\binom{n}{2}$



$(u,v) \in E$ è diretto da u verso v

ESCE da u ed entra in v

$\forall v \in V$

$$\underbrace{\delta}_{\text{GRADO}}(v) = \underbrace{\delta_u(v)}_{\text{grado uscente}} + \underbrace{\delta_e(v)}_{\text{grado entrante}}$$

$$\sum_{v \in V} \delta_u(v) = |E| = m$$

$0 \leq i \leq k-1$

Cammino orientato $u \rightsquigarrow v$ $u = x_0, x_1, \dots, x_k = v$ $(x_i, x_{i+1}) \in E$

tutti gli archi che lo compongono sono orientati da u a v $x_i \to x_{i+1}$

u e v sono connessi se $\exists$ un cammino orientato da $u \rightsquigarrow v$.

GRAFO FORTEMENTE CONNESSO ogni coppia di vertici è connessa

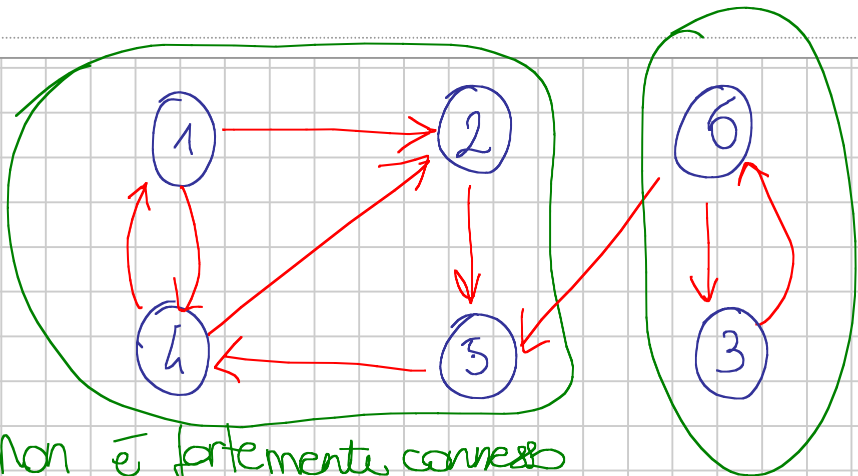
$\forall u, v$: $\left.\begin{array}{l} \exists\ u \rightsquigarrow v \\ \exists\ v \rightsquigarrow u \end{array}\right\}$ u e v sono mutuamente raggiungibili

COMPONENTE FORTEMENTE CONNESSA di $G = (V, E)$

sottografo fortemente connesso massimale

"classe di equivalenza della relazione "sono mutuamente raggiungibili"

Non è aciclico



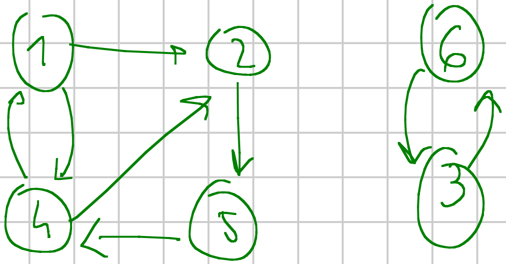
non è fortemente connesso

1, 2, 5 cammino orientato

6 → 1

6, 5, 4, 1

∄ 1 → 6



Componenti fortemente connesse

$\underbrace{1, 2, 5, 4}$ $\underbrace{3, 6}$

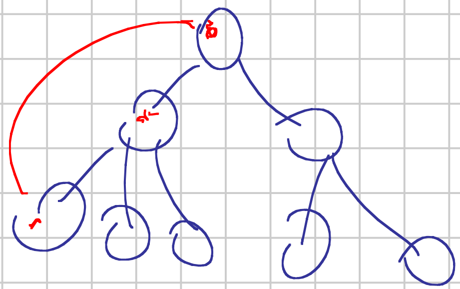
cicli orientati

Titolo nota 26/02/2016

GRAFO ACICLICO non contiene cicli

ALBERO: grafo non orientato, connesso e aciclico.

$$\boxed{|E| = |V| - 1}$$



FORESTA: grafo le cui componenti connesse sono alberi (non orientato e aciclico)

Rappresentazione di grafi in memoria

1 Matrice di adiacenza

$G=(V,E)$ $\qquad |V|=n$

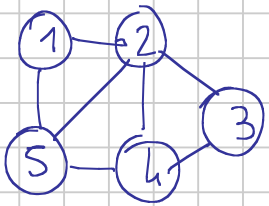
ogni vertice è indicato con un numero intero $\in [1,n]$

A matrice $n \times n$

$\forall\, i,j$

$1 \le i,j \le n$

$$A(i,j)=\begin{cases} 1 & (i,j)\in E \\ 0 & (i,j)\notin E \end{cases}$$

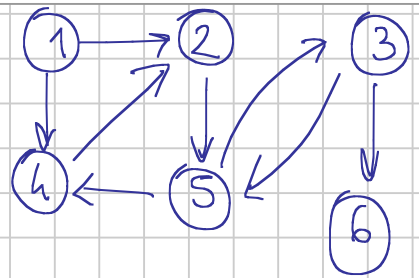


$$A=\begin{array}{c|ccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Se G è non orientato,

A è simmetrica:

$\forall\, i,j \qquad A(i,j) = A(j,i)$



$$A = \begin{array}{c|cccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & & 1 & & 1 & & \\ 2 & & & & & 1 & \\ 3 & & & & & 1 & 1 \\ 4 & & 1 & & & & \\ 5 & & & 1 & 1 & & \\ 6 & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

<u>Occupazione in spazio</u>

$$S(n, m) = \Theta(n^2) \qquad n = |V|$$

va bene per grafi densi

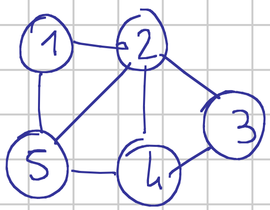
Operazione	Costo in tempo
grado $\delta(i)$	$\Theta(n)$
adiacenti (i, j)	$\Theta(1)$
aggiungiArco (i, j)	$\Theta(1)$
rimuoviArco (i, j)	$\Theta(1)$

2 RAPPRESENTAZIONE con LISTE di ADIACENZA

$n = |V|$

array Adj di n liste doppie

$$Adj[i] = \begin{cases} \emptyset & \delta(i) = 0 \\ \text{lista di tutti i vertici } j \text{ t.c. } (i,j) \in E & \delta(i) > 0 \end{cases}$$



Adj

1 → 2 ↔ 5

2 → 1 ↔ 3 ↔ 4 ↔ 5

3 → 2 ↔ 4

4 → 2 ↔ 3 ↔ 5

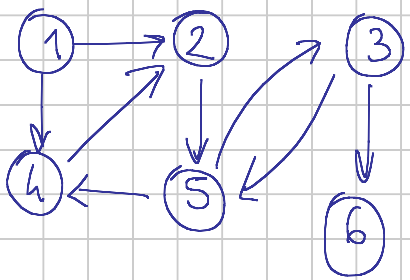
5 → 1 ↔ 2 ↔ 4

ogni $(i,j) \in E$

è rappresentato 2 volte:

$i \in Adj(j)$

$j \in Adj(i)$



$Adj =$

1 → $\boxed{2}$ ↔ $\boxed{4}$
2 → $\boxed{5}$
3 → $\boxed{3}$ ↔ $\boxed{6}$
4 → $\boxed{2}$
5 → $\boxed{3}$ ↔ $\boxed{4}$
6 → //

$(i,j) \in E$ rappresentato una sola volta: $j \in Adj(i)$

Occupazione in spazio

$$S(n,m) = \Theta(n+m) = \Theta(|V| + |E|)$$

$n = |V|$
$m = |E|$

$\forall i, \quad 1 \le i \le n \qquad |\underbrace{Adj[i]}_{\text{lista di adiacenza di } i}| = \delta(i)$

G. n. o.

Titolo nota 26/02/2016

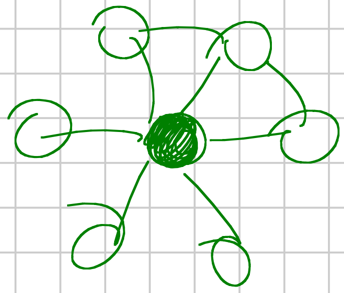
$$|Adj[i]| = \delta_u(i) \quad G.\ o.$$

$$\sum_{i=1}^{n} |Adj(i)| = \begin{cases} \nearrow 2|E| & \text{grafo non orientato} \\ \searrow |E| & \text{grafo orientato.} \end{cases}$$

Grafo sparso

$(|E| = O(n)) \Longrightarrow S(n, m) = \Theta(n)$

$\forall i, \quad |Adj[i]| = \delta(i) \leq n-1$



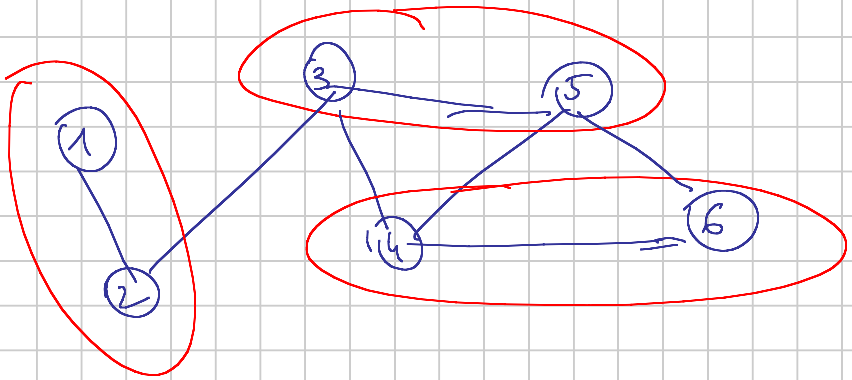
Operazione	Costo in tempo
grado $\delta(i)$	$\Theta(\delta(i))$
adiacenti (i, j)	$O(\delta(i)) = O(n)$
aggiungiArco (i, j)	$\Theta(1)$
rimuoviArco (i, j)	g.n.o.: $O(\delta(i) + \delta(j))$ g.o.: $O(\delta(i))$

ESEMPI di PROBLEMI su GRAFI

① Perfect Matching

$G = (V, E)$

trovare $E' \subseteq E$ t.c. $\forall v \in V$ v occorre in uno ed un solo arco di E'



$E' = \{ (1,2), (3,5), (4,6) \}$

(2) Cammino (Ciclo) Hamiltoniano

→ Conosciamo solo algoritmi esponenziali

è NP-completo

trovare un cammino (ciclo) semplice che passa da tutti i vertici

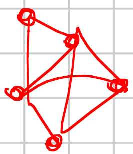
Es: 1, 2, 3, 4, 5, 6 è un cammino hamiltoniano

il grafo non possiede un ciclo hamiltoniano

(3) Ciclo Euleriano

- ammette un algoritmo polinomiale

trovare un ciclo che attraversa tutti gli archi una e una sola volta



G possiede un ciclo euleriano $\iff$ G è connesso e tutti i vertici hanno grado pari