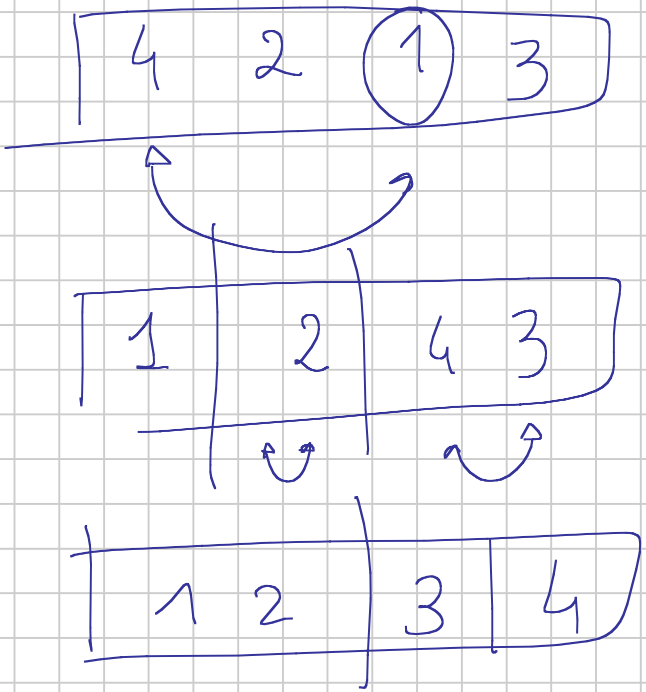
AL - KHAWARIZMI

Selection Sort

$i = 1, \dots, n-1$

si cerca il minimo in $a[i \dots n]$ e ~~si~~ lo si porta in posizione i (scambiandolo con $a[i]$)

- ORDINATO
- CONTIENE GLI $i-1$ ELEMENTI PIÙ PICCOLI DI $a[1 \dots n]$


4 2 1 3
1 2 4 3
1 2 3 4

SelectionSort (a) // n = dim. di a

```
for i = 1 to n-1 {
    minimo = i
    for j = i+1 to n {
        if (a[j] < a[minimo]) minimo = j
    }
    scambia a[i] con a[minimo]
}
```

Correttezza

INVARIANTE: prima ~~della~~ dell'esecuzione della i-esima iterazione del for esterno

$a[1 \dots i-1]$ è ORDINATO e contiene gli $i-1$ elementi più piccoli di $a[1 \dots n]$

Iniz. $a[1 \dots i-1]$ $\quad i=1 \rightarrow a[1,0] \rightarrow \emptyset$

Cons. x ispezione del codice

Cond. $i=n$ alla fine del ciclo

$a[1 \dots n-1]$ è e contiene gli $n-1$ elementi più piccoli di $a[1 \dots n]$

Titolo nota 26/02/2016

Complessità → studiamo il numero di confronti

$$C(n)$$

$$T(n) \propto C(n)$$

$$C(n) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1} \left(n - (i \cancel{+1}) \cancel{+1}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)$$

for esterno

for interno

$$= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 2 + 1$$

$$= \frac{(n-1)n}{2} = \binom{n}{2}$$

fa tutti i confronti possibili

Titolo nota 26/02/2016

Complessità in spazio

I.S. e S.S. usano spazio costante (oltre a quello usato per i dati di input)

"ORDINANO IN LOCO"

NOTAZIONE ASINTOTICA (Knuth '70)

Θ, O, Ω, o, ω

NOTAZIONE Θ

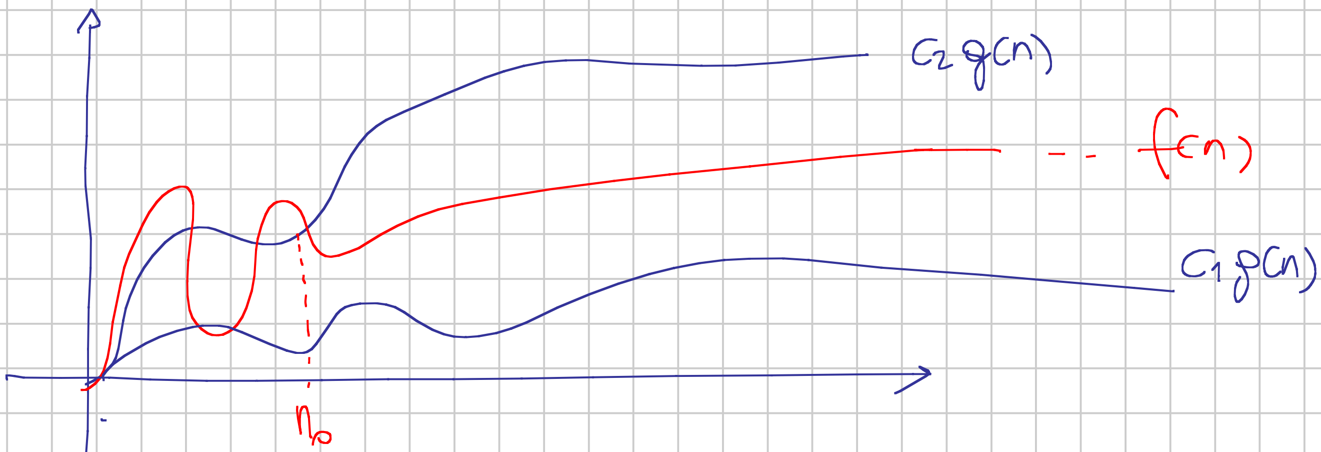
limite asintotico stretto

$=$

$$\Theta(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists c_1, c_2, n_0 > 0 \text{ t.c. } \forall n > n_0$$
$$0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$$

$$f(n) \in \Theta(g(n)) \rightsquigarrow f(n) = \Theta(g(n))$$

" $f(n)$ CRESCE COME $g(n)$, a meno di fattori costanti "



$$T_{Sel.\,Sort}(n) = \Theta(n^2)$$

$$f(n) = 3n^2 \log n + 2n^4 = \Theta(n^4)$$

$$= 3n^3 \log^2 n + 4n^2 \log^{10} n = \Theta(n^3 \log^2 n)$$

$$f(n) = 4n^{10} + 5n^2 + 6n - 2 = \Theta(n^{10})$$

Titolo nota 26/02/2016

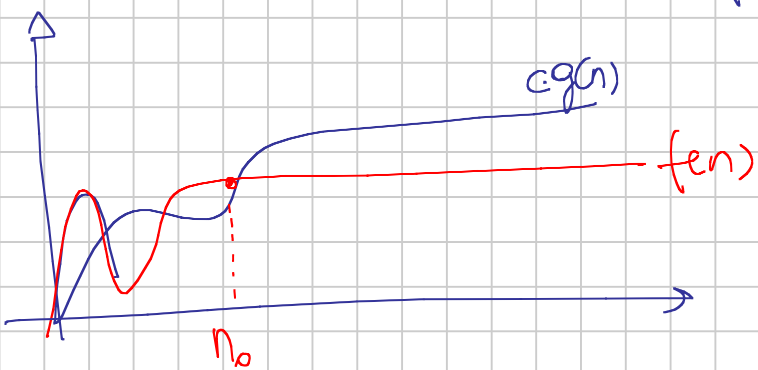
NOTAZIONE O

LIMITI ASINTOTICI SUPERIORI $\leq$

$$O(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists\, c, n_0 > 0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \;\; 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n) \}$$

$$f(n) = O(g(n))$$

$f(n)$ CRESCE AL PIÙ COME $g(n)$, a meno di un fattore costante



$$T_{Ins.Sort}(n) = O(n^2)$$

$$f(n) = \Theta(g(n))$$
$$\Downarrow$$
$$f(n) = O(g(n))$$

Titolo nota 26/02/2016

$$f(n) = a\, n^2 \log^3 n = \Theta(n^2 \log^3 n)$$

$$\neq O(n^2) \quad \text{NO}$$

$$= O(n^3) \quad \text{SI}$$

$$= O(n^2 \log^3 n) \quad \text{sì}$$

$$= O(n^2 \log^4 n) \quad \text{sì}$$

$$= O(n \log^{300} n) \quad \text{NO}$$

NOTAZIONE Ω

LIMITE ASINTOTICO INFERIORE

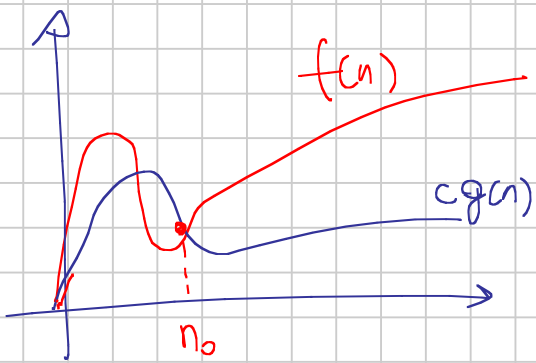
$\geq$

$$\Omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \exists\, c, n_0 > 0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n) \}$$

$f(n) = \Omega(g(n))$

$\Longrightarrow$ $f(n)$ CRESCE ALMENO COME $g(n)$ a meno di un fattore costante

↳ si usa per i LIMITI INFERIORI



$$\boxed{f(n) = \Theta(n)} \iff \boxed{\begin{array}{l} f(n) = O(g(n)) \\ f(n) = \Omega(g(n)) \end{array}}$$

$$\begin{aligned} f(n) = a n^2 + bn + c &= \Omega(n^2) \\ &= \Omega(n) \\ &= \Omega(n \log n) \\ &\neq \Omega(n^2 \log n) \end{aligned}$$

NO

Titolo nota 26/02/2016

$\boxed{o}$ $\quad <$

$$\boxed{o(g(n))} = \{ f(n) \mid \forall c > 0 \ \exists n_0 \text{ t.c. } \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq f(n) < c \cdot g(n) \}$$

$$f(n) = o(g(n))$$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0}$$

ES.

$$n^2 = o(n^2 \log n)$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2 \log n} = 0$$

$\forall k > 0 \quad \forall \varepsilon > 0$ costanti

$$\log^k n = o(n^\varepsilon)$$

$$n^b = o(a^n)$$

a, b costanti

$b > 0$

$a > 1$

ω piccolo

$>$

$$\omega(g(n)) = \{ f(n) \mid \forall c > 0 \ \exists n_0 > 0 \ t.c. \ 0 \leq c \cdot g(n) < f(n) \}$$

$f(n) = \omega(g(n))$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$$

$f(n) = o(g(n)) \iff g(n) = \omega(f(n))$

Titolo nota 26/02/2016

ESERCIZI

$f(n) = 3n^2$

$O(n^2)$	sì	$\Omega(n)$	sì
$O(n^4)$	sì	$\Omega(n^2)$	sì
$O(n \log n)$	no	$\Omega(n^2 \log n)$	no
$O(n^2 \log n)$	sì	$\Omega\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$	sì
$o(n^2 \log n)$	sì		
$\omega(n^2 \log n)$	no		
$o(n^2)$	no		
$\Theta(n^2 \log n)$	NO		
$\Theta(n^2)$	SI		

Titolo nota 26/02/2016

ORDINARE, PER ORDINE DI GRANDEZZA CRESCENTE, LE FUNZIONI

$\cancel{\log^2 n}$, 3^{n-2}, π^n, $n^5 - \cancel{5n^2}$, $n^4 - \cancel{7n^3}$, $n^{\log n}$, $\cancel{\frac{n}{\log n}}$,

$\cancel{\sqrt{n}}$, $\cancel{19}$, $(\log n)^n$

$$\frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \quad \div \quad \frac{n}{\log n}$$

19, $\log^2 n$, $\sqrt{n}$, $\frac{n}{\log n}$, $n^4 - 7n^3$, $n^5 - 5n^2$, $n^{\log n}$,

3^{n-2}, π^n, $(\log n)^n$

Titolo nota 26/02/2016

$$3^{n-2} = \left(2^{\log_2 3}\right)^{n-2} = 2^{(\log_2 3)(n-2)}$$

$$\pi^{n} = \left(2^{\log_2 \pi}\right)^{n} = 2^{(\log_2 \pi)\cdot n}$$

$$n^{\log n} = \left(2^{\log_2 n}\right)^{\log n} = 2^{\log^2 n}$$

$$(\log n)^{n} = \left(2^{\log(\log n)}\right)^{n} = 2^{\underline{n \log\log n}}$$

FORMULE UTILI / RICHIAMI

$\lfloor x \rfloor$ intero più grande $\leq x$

$\lceil x \rceil$ intero più piccolo $\geq x$

$\left\lceil \frac{7}{2} \right\rceil = 4$ $\left\lfloor \frac{7}{2} \right\rfloor = 3$

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil \leq x + 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n$

Titolo nota 26/02/2016

SOMMATORIE

serie aritmetica

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \Theta(n^2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \Theta(n^3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \Theta(n^4)$$

geometrica

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$= \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$