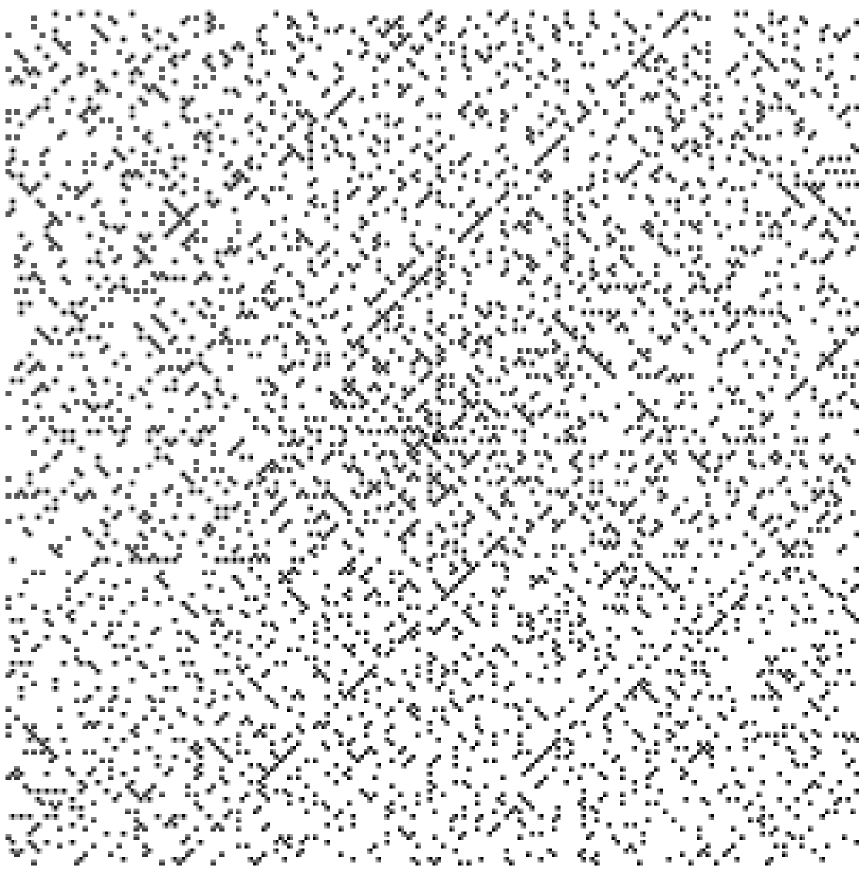
A.A. 2015-2016

L. Gemignani O. Menchi

ESERCIZI DI MATEMATICA

PER IL TEST DI ACCESSO A INFORMATICA



La spirale di Ulam, o spirale dei numeri primi, è una semplice rappresentazione grafica dei numeri primi che rivela una trama non ancora pienamente compresa. Fu scoperta dal matematico polacco Stanislaw Ulam nel 1963, mentre, sovrappensiero, scarabocchiava su di un foglietto di carta durante un meeting. Ulam, annoiato dal convegno, disegnò una griglia di numeri, mettendo l'uno al centro e tutti i seguenti disposti a spirale

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
37 & \leftarrow & 36 & \leftarrow & 35 & \leftarrow & 34 & \leftarrow & 33 & \leftarrow & 32 & \leftarrow & 31 \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & \uparrow \\
38 & & 17 & \leftarrow & 16 & \leftarrow & 15 & \leftarrow & 14 & \leftarrow & 13 & & 30 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\
39 & & 18 & & 5 & \leftarrow & 4 & \leftarrow & 3 & & 12 & & 29 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
40 & & 19 & & 6 & & 1 & \rightarrow & 2 & & 11 & & 28 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\
41 & & 20 & & 7 & \rightarrow & 8 & \rightarrow & 9 & \rightarrow & 10 & & 27 \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & & & & & \uparrow \\
42 & & 21 & \rightarrow & 22 & \rightarrow & 23 & \rightarrow & 24 & \rightarrow & 25 & \rightarrow & 26 \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & \\
43 & \rightarrow & 44 & \rightarrow & 45 & \rightarrow & 46 & \rightarrow & 47 & \rightarrow & 48 & \rightarrow & 49
\end{array}
$$

Dopo segnò tutti i numeri primi, cancellò gli altri ed ottenne

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
37 & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & 31 \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & \uparrow \\
 & & 17 & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & & \leftarrow & 13 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & 5 & \leftarrow & & \leftarrow & 3 & & & & 29 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & 19 & & & & & \rightarrow & 2 & & 11 & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & & & \uparrow & & \uparrow \\
41 & & & & 7 & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & & & & & \uparrow \\
 & & & \rightarrow & & \rightarrow & 23 & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & \\
\downarrow & & & & & & & & & & & & \\
43 & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & 47 & \rightarrow & & \rightarrow &
\end{array}
$$

Sorpreso, notò che i numeri primi tendevano ad allinearsi lungo le diagonali, come si può chiaramente vedere dall'immagine di copertina, dove i numeri primi sono segnati in nero su una spirale di 200×200. Il fatto interessante non è la presenza in sé dei numeri primi lungo le diagonali: infatti, è noto che tutti i numeri primi eccetto il due sono dispari. Dato che nella spirale di Ulam le diagonali sono alternativamente composte da numeri pari e da numeri dispari, è normale che i numeri primi giacciano solo su una diagonale sì ed una no. Ciò che stupì Ulam è la tendenza dei numeri primi a concentrarsi su alcune diagonali piuttosto che su altre. Test più rigorosi dimostrarono che effettivamente su alcune diagonali la concentrazione di numeri primi è maggiore rispetto ad altre (da Wikipedia).

Introduzione

L'universo ... è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola ...

G. GALILEI

La matematica fa largo uso degli strumenti della logica e opera nel quadro di un sistema ipotetico-deduttivo che si sviluppa a partire da definizioni rigorose e da assiomi riguardanti le proprietà degli oggetti definiti, fino a raggiungere nuove certezze espresse dai teoremi. Nelle dimostrazioni matematiche è fondamentale il rigore, il cui livello è però variato col tempo. Oggi i matematici discutono se considerare valide le dimostrazioni effettuate attraverso computer.

La matematica pervade tutte le discipline scientifiche: chi affronta lo studio a livello universitario di una di queste discipline deve averne una conoscenza almeno a livello elementare. Per questo, da vari anni gli studenti che si iscrivono a corsi di laurea di indirizzo scientifico sono tenuti ad affrontare un test iniziale, volto a saggiare le loro competenze di matematica. Per permettere a tutti gli studenti di misurarsi alla pari, indipendentemente dall'indirizzo scelto nella scuola secondaria, il livello del test, in generale a risposte multiple, è compatibile con una preparazione media acquisita nella scuola secondaria.

Inizialmente i test avevano finalità più che altro statistiche, per confrontare la carriera accademica del singolo studente con i suoi prerequisiti di conoscenze matematiche. Ne risultò che vi era una stretta correlazione fra un buon punteggio conseguito al test e una regolare progressione nell'acquisizione dei crediti per la laurea. In particolare per Informatica, che è una disciplina basata in gran parte proprio su logica e matematica, il risultato del test misura il livello attitudinale degli studenti a intraprenderne lo studio. Anche se il test non ha una vera funzione selettiva perché consente l'iscrizione anche in caso di fallimento, ha comunque una funzione orientativa: uno studente che fallisce il test, magari più volte di seguito, deve serenamente chiedersi qual è la sua attitudine agli studi che si avvia a intraprendere e, se è veramente motivato, cosa deve fare per compensare le sue carenze.

La risposta a quest'ultima domanda è semplice: rispolverare i libri di matematica delle scuole secondarie e costruirsi con perseveranza e umiltà una solida base di conoscenze su cui sviluppare l'attitudine al ragionamento logico-deduttivo. Per facilitare questo compito, elenchiamo qui gli argomenti individuati nel Syllabus di matematica, diffuso più di 10 anni fa dall'UMI (Unione Matematica Italiana), come indispensabili per affrontare un corso di laurea con contenuti matematici.

(a) Strutture numeriche, aritmetica: numeri naturali, operazioni aritmetiche, numeri primi, massimo comun divisore, numeri interi, numeri razionali, rappresentazione dei numeri, numeri reali, valore assoluto, potenze e radici.

(b) Algebra elementare, equazioni e disequazioni: elementi di calcolo letterale, polinomi, prodotti notevoli, divisione con resto fra polinomi, regola di Ruffini, espressioni razionali fratte, equazioni algebriche di primo e secondo grado, equazioni con espressioni fratte e con radicali, sistemi lineari di due equazioni in due incognite, disequazioni.

(c) Geometria: geometria euclidea piana, coordinate cartesiane, equazioni di rette e circonferenze, equazioni di parabole, ellissi e iperboli in sistemi di riferimento opportuni.

(d) Funzioni: prodotto cartesiano di insiemi, relazioni e funzioni iniettive, surgettive, bigettive, composizione di funzioni, funzione identica, funzione inversa, grafico di una funzione, funzioni reali, successioni, proprietà di alcune funzioni elementari, funzione esponenziale, logaritmo, funzioni trigonometriche.

In queste dispense, dopo un breve riassunto delle nozioni teoriche di ciascun argomento (che non vuole assolutamente sostituire la ben più ampia trattazione dei libri di testo delle scuole secondarie) vengono forniti esempi significativi di esercizi svolti e da svolgere. Teoria e quesiti proposti sono stati ripresi da varie fonti, alcune reperibili in rete.

`http://umi.dm.unibo.it/downloads/syllabus.pdf`

`http://www.testingressoscienze.org/file/esempi/test_sel/TestSelezione070910.pdf`

`http://it.wikibooks.org/wiki/Matematica_per_le_superiori`

`http://www.dm.unipi.it/~acquistp/ana1.pdf`

`http://www.uniud.it/didattica/offerta/cepo/servizi-agli-studenti/dispense/matematica-di-base-proff-pier-carlo-craighero-e-luciano-battaia-1/BasicMath.pdf`

Capitolo 1

I numeri

1.1 Richiami di teoria

Il concetto di *insieme* viene considerato primitivo. Per evitare paradossi logici, è bene parlare di insiemi solo dopo aver fissato un insieme *universo* U, che è l'ambiente dentro al quale lavoriamo di cui si definisce il contesto, e considerarne i vari sottoinsiemi (cioè gli insiemi A contenuti in U).

Come si descrive un insieme? Se è *finito* (ossia ha un numero finito di elementi), e questi elementi sono pochi, ciò può avvenire elencandoli; ma se ha molti elementi, o ne ha addirittura una quantità infinita (si dice allora che l'insieme è *infinito*), lo si può descrivere individuando una proprietà che lo caratterizza. Per esempio, l'insieme

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

è ugualmente bene descritto dalla proprietà : "A è l'insieme dei numeri naturali che sono divisori di 12".

In questa dispensa useremo i simboli standard della teoria degli insiemi. Per specificare l'appartenenza di un elemento ad un insieme si usa il simbolo $\in$, per la non appartenenza il simbolo $\notin$. Un sottoinsieme A di B è indicato con $A \subseteq B$. Se A è strettamente contenuto in B si usa la notazione $A \subset B$. L'insieme *vuoto* è $\emptyset$. Le operazioni di *unione* e di *intersezione* sono indicate con $\cup$ e $\cap$, l'operazione di *differenza* o di *complemento* con $\setminus$. Se $A \cap B = \emptyset$, gli insiemi A e B si dicono *disgiunti*. Dati due insiemi A e B, se è possibile associare ad ogni elemento di A un solo elemento di B e viceversa, si dice che A e B sono in *corrispondenza biunivoca*.

Gli insiemi numerici fondamentali sono:

– l'insieme dei *numeri naturali* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

– l'insieme dei *numeri interi* $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$,

– l'insieme dei *numeri razionali* $\mathbb{Q}$ di tutte le frazioni p/q con $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$,

– l'insieme dei *numeri reali* $\mathbb{R}$ formato dai numeri che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti della retta geometrica orientata, come ad esempio π, e, $\sqrt{2}$,

– l'insieme dei *numeri complessi* $\mathbb{C}$ composti da una parte reale e da una parte immaginaria, come ad esempio $2 + 3\,\boldsymbol{i}$ o $\sqrt{3} - \boldsymbol{i}$.

È noto che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

A livello elementare $\mathbb{N}$ viene considerato come primitivo e $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ vengono introdotti uno dopo l'altro per rispondere alla necessità di ottenere insiemi in cui siano possibili le operazioni inverse della addizione (l'insieme $\mathbb{Z}$), della moltiplicazione (l'insieme $\mathbb{Q}$), dell'elevamento a potenza (l'insieme $\mathbb{R}$). Questo modo di procedere è abbastanza complesso, perché quando un insieme A viene esteso ad un B è necessario controllare che le operazioni definite su B e relative proprietà, ristrette al sottoinsieme di B che viene messo in corripondenza biunivoca con A, siano compatibili con quelle di A. Invece il processo inverso, quello di partire da un insieme più ampio e restringerlo ad un suo sottoinsieme, risulta logicamente molto più semplice.

Per questo si preferisce dare qui una definizione assiomatica di $\mathbb{R}$, attraverso le proprietà che l'insieme dei numeri reali deve soddisfare, e introdurre succesivamente gli altri insiemi numerici come sottoinsiemi.

1.1.1 I numeri reali

L'insieme $\mathbb{R}$ può essere definito mediante le proprietà dei numeri reali, che si possono classificare in tre gruppi.

(a) Proprietà *algebriche*, riguardanti le due operazioni, l'*addizione* e la *moltiplicazione*, che associano ad ogni coppia (a, b) di numeri reali la loro *somma* $a+b$, e il loro *prodotto* $a \cdot b$ (o semplicemente ab). Valgono le seguenti proprietà:

1. *Associatività*: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$ per ogni a, b, c.
2. *Commutatività*: $a + b = b + a$, $ab = ba$ per ogni a, b.
3. *Distributività*: $a(b + c) = ab + ac$ per ogni a, b, c.
4. *Esistenza degli elementi neutri*: esistono (unici) due numeri reali distinti, che indichiamo con 0 e 1, tali che $a + 0 = a$, $a1 = a$ per ogni a.
5. *Esistenza degli opposti*: per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un (unico) $b \in \mathbb{R}$ tale che $a + b = 0$; tale numero b si dice *opposto* di a e si indica con $-a$.
6. *Esistenza dei reciproci*: per ogni $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esiste un (unico) $b \in \mathbb{R}$ tale che $ab = 1$; tale numero b si dice *reciproco* di a e si indica con $1/a$ o anche con a^{-1}.

Dalle proprietà 1 - 6 seguono tutte le regole usuali dell'algebra elementare:

– il fatto che $a \cdot 0 = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$;
– la *semplificazione* per l'addizione: se $a + b = a + c$, allora $b = c$;
– la semplificazione per la moltiplicazione: se $ab = ac$ e $a \neq 0$, allora $b = c$;
– la definizione di *sottrazione*: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ tale che $a + c = b$, e tale numero c, detto *differenza*, si indica con $b - a$;

- la definizione di *divisione*: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ esiste un unico $c \in \mathbb{R}$ tale che $ac = b$, e tale numero c, detto *quoziente*, si indica con b/a;
- la legge di *annullamento* del prodotto: se $ab = 0$ allora deve essere $a = 0$ oppure $b = 0$ (oppure entrambi).
- la definizione di *potenza*: a^n, con $n \in \mathbb{N}$, è uguale al prodotto di n fattori uguali ad a. Questa definizione si applica anche al caso di un esponente $n = 1$, cioè $a^1 = a$, e al caso della base 0 con esponente $n \geq 1$, cioè $0^n = 0$, mentre si deve porre specificatamente $a^0 = 1$. La scrittura 0^0 non ha significato.

(b) Proprietà di *ordinamento*, relative alla possibilità di confrontare tra loro i numeri reali. Nell'insieme dei numeri reali esiste un sottoinsieme P, i cui elementi sono detti numeri *positivi*, dotato delle seguenti proprietà:

7. Se a, b sono numeri positivi, anche $a + b$ e ab sono positivi.
8. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ vale una e una sola di queste tre possibilità: a è positivo, oppure $-a$ è positivo, oppure $a = 0$.

I numeri diversi da 0 e non positivi si dicono *negativi*: dunque un numero reale a è negativo se e solo se $-a$ è positivo.

Per indicare la relazione di ordinamento fra due numeri si usano i simboli $<$, $\leq$, $>$, $\geq$, così definiti

$$a < b \text{ se e solo se } b - a \in P, \qquad a \leq b \text{ se e solo se } b - a \in P \cup \{0\},$$

$$a > b \text{ se e solo se } a - b \in P, \qquad a \geq b \text{ se e solo se } a - b \in P \cup \{0\}.$$

Vale la proprietà

$$a \geq b \quad \text{e} \quad a \leq b \quad \Longrightarrow \quad a = b.$$

Dalle proprietà 7 - 8 discende la *regola dei segni*:

$$(+) \cdot (+) = + \quad (+) \cdot (-) = - \quad (-) \cdot (+) = - \quad (-) \cdot (-) = +.$$

In particolare, se x è un numero reale diverso da 0, il suo quadrato x^2 è sempre positivo. Inoltre si deducono facilmente tutte le usuali regole di calcolo con le disuguaglianze.

Se $a \leq b$, si definisce *intervallo chiuso* di estremi a, b l'insieme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ : a \leq x \leq b\},$$

dove le parentesi quadre stanno ad indicare che gli estremi dell'intervallo appartengono all'insieme. Analoghe definizioni valgono per gli intervalli *aperti* o *semiaperti* a destra o a sinistra, usando le parentesi tonde dove gli estremi dell'intervallo non appartengono all'insieme. Si definisce *retta reale* l'insieme $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (i simboli $+\infty$ e $-\infty$ si leggono *più infinito* e *meno infinito* e non sono numeri reali).

(c) Proprietà di *continuità*, legate all'idea che devono esistere abbastanza numeri per rappresentare grandezze che variano con continuità, quali il tempo o la posizione di un punto su una retta.

9. Per ogni coppia A, B di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $a \leq b$ per ogni $a \in A$ e $b \in B$, esiste almeno un elemento *separatore* fra A e B, cioè un numero reale $\xi \in \mathbb{R}$ tale che

$$a \leq \xi \leq b \quad \text{per ogni} \quad a \in A, \quad b \in B.$$

   Ad esempio, per i sottoinsiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 \geq 2\},$$

   l'elemento separatore è $\xi = \sqrt{2}$. Questa proprietà asserisce che $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. In modo analogo, da questa proprietà discende l'esistenza in $\mathbb{R}$ delle radici n-esime $\sqrt[n]{x}$ dei numeri reali $x > 0$ con $n \in \mathbb{N}$.

Usando le proprietà 1 - 9 come assiomi l'insieme $\mathbb{R}$ risulta individuato in modo unico.

Una conseguenza della proprietà di continuità è l'esistenza della radice n-esima di qualunque numero reale non negativo. Vale infatti il teorema: "Per ogni numero reale $a \geq 0$ ed ogni intero positivo n esiste ed è unico il numero reale $r \geq 0$ tale che $r^n = a$; tale numero è detto *radice n-esima* di a e si scrive $r = a^{1/n}$ o anche $\sqrt[n]{a}$. Per le potenze con esponente intero negativo si pone

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n,$$

e valgono le proprietà

$$a^n \cdot b^n = (a\,b)^n, \quad a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}.$$

Nell'insieme $\mathbb{R}$ si individua il sottoinsieme dei numeri razionali (cioè rappresentabili come frazioni con numeratore e denominatore interi) che è in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Q}$. Il sottoinsieme $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ è formato dai numeri *irrazionali.* Circa l'esistenza dei numeri irrazionali, è classica la dimostrazione che $\sqrt{2}$ non è razionale. Infatti, se $\sqrt{2}$ fosse razionale, esisterebbe una frazione $a/b = \sqrt{2}$ ridotta ai minimi termini, con a e b non entrambi pari. Elevando al quadrato si ha $a^2 = 2b^2$, per cui a^2, e quindi a, dovrebbe essere pari. Ponendo $a = 2c$ si avrebbe $2c^2 = b^2$ e quindi anche b dovrebbe essere pari.

Dunque possiamo mettere in corrispondenza biunivoca l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con i punti della retta reale. All'ordinamento sulla retta corrisponde l'ordinamento di $\mathbb{R}$. Un punto O sulla retta indica l'origine e corrisponde allo zero di $\mathbb{R}$. A destra di O vi sono i numeri positivi, a sinistra i negativi. La distanza da O di un numero a viene detta *valore assoluto* ed è uguale a

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se} \quad a \geq 0, \\ -a & \text{se} \quad a < 0. \end{cases}$$

Valgono le seguenti relazioni

$$|x+y| \le |x| + |y|, \quad |x-y| \le |x| + |y|, \quad |x+y| \ge |\,|x| - |y|\,|, \quad |x-y| \ge |\,|x| - |y|\,|,$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \quad |x/y| = |x| \,/\, |y| \text{ (per } y \ne 0).$$

1.1.2 I numeri naturali

A partire dagli assiomi di $\mathbb{R}$ si possono ora definire in modo rigoroso gli altri insiemi numerici. Per definire l'insieme dei naturali, si considerano i sottoinsiemi A di $\mathbb{R}$ che verificano le seguenti condizioni:

(i) $0 \in A$,

(ii) per ogni $x \in A$ si ha $x + 1 \in A$.

L'insieme $\mathbb{N}$ è definito come l'intersezione di tali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Da questa definizione segue subito che fra due numeri naturali è compreso solo un numero finito di numeri naturali (si dice che $\mathbb{N}$ è un insieme *discreto*) e che $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato. Poiché gli elementi di $\mathbb{N}$ possono essere contati, si dice che $\mathbb{N}$ è *numerabile*. Si dice anche che la sua *cardinalità* (altro modo di dire la quantità di elementi) è $\aleph_0$ (si legge alef con 0).

Poiché $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ in esso valgono le proprietà algebriche 1 - 4 delle operazioni di addizione e moltiplicazione, ma non le 5 e 6. Questo significa che $\mathbb{N}$ non è *chiuso* rispetto alle operazioni di sottrazione e divisione, cioè dati due numeri naturali a e b è possibile che $a - b$ e a/b non siano numeri naturali.

Fissata una base di numerazione (correntemente 10), un numero naturale viene rappresentato mediante le sue cifre (da 0 a 9) nel modo seguente

$$n = d_p\, d_{p-1}\, \ldots\, d_1\, d_0, \quad d_p \ne 0.$$

Si tratta quindi di una rappresentazione *posizionale* in cui d_i, la i-esima cifra da destra, contribuisce al valore del numero secondo la i-esima potenza della base, cioè il valore del numero è dato da

$$n = d_p\, 10^p + d_{p-1}\, 10^{p-1} + \ldots + \, d_1\, 10^1 + d_0\, 10^0.$$

Per confronto la rappresentazione dei numeri in uso a Roma era *additiva*, cioè il valore del numero era dato dalla somma delle sue cifre.

Come si è detto, $\mathbb{N}$ non è chiuso rispetto alla divisione, nel senso che dati due numeri naturali a e $b \ne 0$ è possibile che $a \,/\, b$ non sia un numero naturale. Però esiste un'unica coppia (q, r) di numeri naturali tale che

$$a = b\, q + r, \quad \text{con} \quad 0 \le r < b.$$

q è il quoziente e r è il resto della divisione *intera* tra a e b. Se $r = 0$ si dice che a è *divisibile* per b, che a è un *multiplo* di b e che b è un *divisore* o *fattore* di a.

Vi sono alcuni criteri semplici che aiutano a individuare se un numero ha come fattore 2 o 3 o 5:

– un numero è divisibile per 2 se lo è la sua ultima cifra,

– un numero è divisibile per 3 se lo è la somma delle sue cifre,

– un numero è divisibile per 5 se termina con 0 o con 5.

Un numero naturale $a > 1$ è detto *primo* se ha per divisori soltanto 1 e se stesso. L'insieme dei numeri primi è $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$ (notare che 1 non è considerato numero primo per convenzione). Vale il *teorema fondamentale dell'aritmetica*: "ogni numero naturale $a \geq 2$ o è primo o è prodotto di numeri primi e tale scomposizione è unica, a meno dell'ordine dei fattori". Conseguenza di questo teorema è che se un numero primo p divide il prodotto $a \cdot b$ di due numeri $a, b \in \mathbb{N}$, allora divide almeno uno fra a e b.

Dati due numeri naturali a e b si definisce *massimo comun divisore* il massimo numero naturale c che divide sia a che b. Si usa scrivere $c = MCD(a, b)$. Se $MCD(a, b) = 1$ si dice che a e b sono *primi fra loro*. Il $MCD(a, b)$ può essere calcolato sfruttando direttamente la definizione: si scompongono a e b in fattori primi e si considera il numero ottenuto moltiplicando i fattori primi comuni presi con l'esponente minore fra quelli che compaiono nelle due fattorizzazioni.

Il procedimento basato sulla scomposizione in fattori primi ha il difetto di richiedere molte operazioni quando a e b sono numeri grossi. Il seguente *algoritmo euclideo* per il calcolo del $MCD(a, b)$ è più rapido. All'inizio si suppone che $a \geq b$ (altrimenti si scambiano a e b). L'algoritmo costruisce per mezzo di divisioni successive una sequenza di resti in questo modo:

$$\begin{aligned}
&a = bq_1 + r_1 \\
&b = r_1 q_2 + r_2 \\
&r_1 = r_2 q_3 + r_3 \\
&\ldots \\
&r_{n-1} = r_n q_{n+1}
\end{aligned}$$

La successione dei resti è formata da interi decrescenti, quindi l'algoritmo termina quando si trova un resto uguale a 0. L'ultimo resto non nullo è il MCD di a e b.

Il *minimo comune multiplo* $mcm(a, b)$ di due numeri naturali a e b è il più piccolo numero naturale che abbia a e b come fattori. Vale la relazione

$$mcm(a, b) = \frac{a \cdot b}{MCD(a, b)}.$$

Lo studio dei numeri primi data fin dall'antichità: inizialmente essi furono studiati perché molte proprietà dei numeri sono legate alla loro scomposizione in fattori primi. Oggi sono studiati perché costituiscono un indispensabile elemento dei sistemi di crittografia.

Per stabilire se un numero a è primo può essere necessario provare a dividerlo per tutti i numeri primi minori di $\sqrt{a}$ (infatti se a avesse un fattore maggiore di $\sqrt{a}$, dovrebbe averne anche uno minore di $\sqrt{a}$). E questo per i numeri molto grossi (si parla di numeri con centinaia di cifre) può richiedere un tempo proibitivo anche con i più veloci calcolatori.

Il modo più rapido per costruire una tabella di numeri primi è quello del *crivello di Eratostene*, inventato più di 2000 anni fa. Supponiamo ad esempio di voler trovare tutti i numeri primi minori di 100. Prima di tutto si costruisce la tabella di tutti i numeri da 2 a 99. Si considera il numero 2, che è primo e si cancellano dalla tabella tutti i multipli del 2, escluso 2 stesso. Si ripete l'operazione con il primo numero libero della tabella dopo il 2, che è il 3. Cioè si cancellano tutti i multipli ancora liberi del 3, escluso il 3 stesso. Si ripete con i multipli ancora liberi di 5. Finalmente si ripete con i multipli ancora liberi di 7. Non occorre proseguire perché il primo numero libero dopo il 7 è 11 e un numero inferiore a 100, se non è primo, ha sicuramente un fattore minore di $10 = \sqrt{100}$ e quindi a questo punto è già stato cancellato. Tutti i numeri della tabella che non sono stati cancellati ed esattamente 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 sono primi.

In generale, se vogliamo trovare tutti i numeri primi minori di un certo numero n, dovremo costruire la tabella di tutti i numeri fino a $n-1$ e cancellare tutti i multipli dei numeri successivamente non cancellati inferiori a $\sqrt{n}$.

Una domanda che ha sempre affascinato i matematici è: "perché i numeri primi si presentano a intervalli così irregolari"? C'è una qualche formula che possa predire tutti i numeri primi o qualche proprietà che valga per tutti i numeri primi? Non sembra che per adesso la matematica sia in grado di dare risposta a questa domanda. Se esaminiamo la sequenza dei numeri primi, notiamo che andando avanti questi tendono a farsi sempre più rari. Viene allora spontaneo chiedersi se dopo un po' i numeri primi scompaiono del tutto oppure se ve ne siano infiniti. Già i greci nel 2^o secolo a. C. avevano scoperto che l'insieme dei numeri primi non è limitato. Vale infatti il seguente *Teorema di Euclide*: "esistono infiniti numeri primi".

1.1.3 I numeri interi e razionali

La ricerca dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ chiusi rispetto alle operazioni di sottrazione e divisione porta a considerare l'insieme dei numeri interi definito come

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$$

e l'insieme dei numeri razionali definito come

$$\mathbb{Q} = \{m/n \ : \ m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0\}.$$

L'insieme $\mathbb{Z}$ è un ampliamento di $\mathbb{N}$ perché il suo sottoinsieme $\mathbb{Z}^+$ formato dai soli numeri positivi e dallo zero può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Grazie a questa corrispondenza di solito nella scrittura di un numero positivo si omette il segno $+$. L'insieme $\mathbb{Q}$ è un ampliamento di $\mathbb{Z}$ perché il suo sottoinsieme formato dalle frazioni con denominatore 1 può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{Z}$.

Due frazioni a/b e a'/b' si dicono *equivalenti* se $ab' = ba'$. Quindi moltiplicando o dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero naturale diverso da zero si ottiene una frazione equivalente a quella data. In particolare conviene semplificare quanto possibile una frazione riducendola ai minimi termini, cioè dividendo numeratore e denominatore per il loro MCD; in questo modo numeratore e denominatore risultano primi fra loro.

Le operazioni su $\mathbb{Z}$ e su $\mathbb{Q}$ mantengono le proprietà valide su $\mathbb{R}$. In particolare vale la regola dei segni. e ne deriva che l'addizione su $\mathbb{Q}$ viene così eseguita

$$\frac{a}{b}+\frac{a'}{b'}=\frac{ab'}{bb'}+\frac{a'b}{bb'}=\frac{ab'+a'b}{bb'}$$

(se b e b' non sono primi fra loro si può ridurre ad un denominatore comune che sia il minimo comune multiplo di b e b'). Per la moltiplicazione e la divisione si opera in modo più semplice

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}=\frac{a\cdot a'}{b\cdot b'} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{b}\Big/\frac{a'}{b'}=\frac{a\cdot b'}{a'\cdot b}.$$

Di un numero razionale si può dare la *rappresentazione decimale* con una sequenza *finita* di cifre (ad esempio 1.25 per 1/4) o *periodica* (ad esempio $0.\overline{6}=0.666\ldots$ per 2/3).

– Se il numero razionale, ridotto ai minimi termini, ha come fattori primi del denominatore solo 2 e 5, allora la sua rappresentazione decimale è finita.

– Se il numero razionale, ridotto ai minimi termini, ha al denominatore anche altri fattori primi oltre a 2 e 5, allora la sua rappresentazione decimale è periodica.

Un numero razionale può essere rappresentato anche nella *notazione scientifica*, particolarmente usata se il numero è molto grande o molto piccolo. Ad esempio $p=0.25\cdot 10^8$ sta per $p=25000000$ e $p=0.25\cdot 10^{-6}$ sta per $p=0.00000025$.

$\mathbb{Z}$ come $\mathbb{N}$ è un insieme discreto, quindi ha la sua stessa cardinalità. Invece $\mathbb{Q}$ non è discreto, infatti fra due numeri razionali si trovano infiniti altri numeri razionali. Per questa proprietà $\mathbb{Q}$ viene detto *denso*. Ciononostante, $\mathbb{Q}$ ha ancora la cardinalità del numerabile, cioè può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$. Per dimostrarlo basta contare gli elementi $(a,b)=a/b$ per diagonale nel modo seguente

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & \rightarrow & (1,3) & & (1,4) & \rightarrow & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4) & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4) & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4) & & \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow &
\end{array}$$

Invece l'insieme $\mathbb{R}$ non è numerabile. Si dice che ha la cardinalità del *continuo* (si indica con $\mathbf{c}$). Si ipotizza che non esista alcun insieme che abbia cardinalità compresa fra $\aleph_0$ e $\mathbf{c}$.

1.1.4 I numeri complessi

Fin dall'antichità era noto che certe equazioni di 2° grado non hanno soluzioni reali. Infatti, se si considera il calcolo delle soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ come quello della ricerca dei punti di intersezione della parabola $y = ax^2 + bx + c$ con l'asse delle x è ragionevole pensare che l'equazione non abbia soluzioni quando la parabola non interseca l'asse delle x, cioè quando $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. In questo caso perciò non si avverte alcuna necessità di ampliare il campo in cui si opera per ottenere le soluzioni di una equazione di 2° grado anche quando il discriminante Δ è negativo.

La questione però cambiò completamete aspetto con la formula risolutiva dell'equazione di 3° grado scoperta nel 16° secolo: in questo caso infatti è necessario passare attraverso il calcolo di radici quadrate di numeri negativi anche per trovare le soluzioni reali dell'equazione. Ci vollero più di 200 anni perché i matematici completassero l'estensione del campo $\mathbb{R}$ al campo $\mathbb{C}$ e ne dessero la rappresentazione grafica, che semplifica di molto la comprensione. Al giorno d'oggi i numeri complessi sono indispensabili non solo in matematica, ma anche nella applicazioni pratiche, come ad esempio per rappresentare le correnti alternate.

La proprietà più importante che caratterizza i numeri complessi è il teorema fondamentale dell'algebra, che asserisce che qualunque equazione polinomiale di grado n ha esattamente n soluzioni complesse, non necessariamente distinte.

Per definire i numeri complessi dobbiamo innanzi tutto introdurre il simbolo $\boldsymbol{i}$, detto *unità immaginaria* e definito dalla relazione

$$\boldsymbol{i}^2 = -1.$$

È chiaro che $\boldsymbol{i}$ non rappresenta alcun numero reale. Si definisce poi *numero complesso* un numero della forma

$$a + \boldsymbol{i}\, b, \quad \text{dove} \quad a,\, b \in \mathbb{R}.$$

a e b vengono detti rispettivamente *parte reale* e *coefficiente dell'immaginario* del numero complesso.

Come i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta, quelli complessi sono in corrispondenza con i punti del piano, detto *piano complesso* (o di Argand-Gauss): al numero complesso $a + \boldsymbol{i}\, b$ si associa il punto di coordinate cartesiane (a, b).

Se identifichiamo un numero complesso con coefficiente dell'immaginario nullo $a + \boldsymbol{i}\, 0$ con il numero reale a, l'insieme $\mathbb{R}$ risulta un sottoinsieme dell'insieme $\mathbb{C}$.

Si definiscono su $\mathbb{C}$ le relazioni di uguaglianza e le operazioni aritmetiche utilizzando le stesse proprietà che valgono su $\mathbb{R}$. Queste relazioni e definizioni risultano naturali se si applica il calcolo simbolico alle quantità a, b, $\boldsymbol{i}$, sostituendo, dove compare, $\boldsymbol{i}^2$ con -1

$$\begin{aligned}
&a + \boldsymbol{i}\, b = c + \boldsymbol{i}\, d \quad \text{se e solo se} \quad a = c \quad \text{e} \quad b = d,\\
&(a + \boldsymbol{i}\, b) + (c + \boldsymbol{i}\, d) = (a + c) + \boldsymbol{i}\, (b + d),\\
&(a + \boldsymbol{i}\, b) \cdot (c + \boldsymbol{i}\, d) = (ac - bd) + \boldsymbol{i}\, (bc + ad).
\end{aligned}$$

e analogamente per le operazioni inverse di sottrazione e divisione

$$(a + \boldsymbol{i}\, b) - (c + \boldsymbol{i}\, d) = (a - c) + \boldsymbol{i}\, (b - d),$$

e se $c^2 + d^2 \neq 0$

$$\frac{a + \boldsymbol{i}\, b}{c + \boldsymbol{i}\, d} = \frac{(a + \boldsymbol{i}\, b) \cdot (c - \boldsymbol{i}\, d)}{(c + \boldsymbol{i}\, d) \cdot (c - \boldsymbol{i}\, d)} = \frac{(ac + bd) + \boldsymbol{i}\, (bc - ad)}{c^2 + d^2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \boldsymbol{i}\, \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right).$$

Graficamente l'addizione di due numeri complessi corrisponde alla cosiddetta *regola del parallelogramma.*

Ad esempio, dati i numeri complessi $z = 4 + \boldsymbol{i}\, 2$, $w = -1 + \boldsymbol{i}$, $v = 1 - \boldsymbol{i}\, 2$, risulta

$$z + w = 3 + \boldsymbol{i}\, 3, \quad z + v = 5 + \boldsymbol{i}\, 0 = 5, \quad z - w = 5 + \boldsymbol{i},$$
$$z \cdot w = (4 + \boldsymbol{i}\, 2) \cdot (-1 + \boldsymbol{i}) = -6 + \boldsymbol{i}\, 2, \quad w \cdot v = (-1 + \boldsymbol{i}) \cdot (1 - \boldsymbol{i}\, 2) = 1 + \boldsymbol{i}\, 3.$$

Se $z = a + \boldsymbol{i}\, b$ è un numero complesso, il numero

$$\overline{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$$

viene detto il *coniugato* di z. Graficamente $\overline{z}$ è rappresentato da un punto ribaltato attorno all'asse reale rispetto al punto che rappresenta z.

La somma e il prodotto di due numeri complessi coniugati sono due numeri reali. Risulta infatti

$$z + \overline{z} = (a + \boldsymbol{i}\, b) + (a - \boldsymbol{i}\, b) = 2a,$$
$$z \cdot \overline{z} = (a + \boldsymbol{i}\, b) \cdot (a - \boldsymbol{i}\, b) = a^2 + b^2.$$

Per esempio, se $z = 2 + \boldsymbol{i}\, 3$, è

$$\overline{z} = 2 - \boldsymbol{i}\, 3, \quad z + \overline{z} = 4, \quad z \cdot \overline{z} = 13.$$

Il numero reale

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

viene detto *modulo* di z e graficamente corrisponde alla distanza del punto che rappresenta z dall'origine O del piano complesso. Se $b = 0$ e il numero complesso $z = a + \boldsymbol{i}\, b$ si identifica con il numero reale a, il modulo di z coincide con il valore assoluto di a; per questo motivo si indica di solito con $|z|$ il modulo di z anche quando questo non è reale, e risulta che

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

È facile verificare che la definizione di uguaglianza fra numeri complessi soddisfa le proprietà simmetrica, riflessiva e transitiva, che le operazioni di addizione e moltiplicazione di numeri complessi soddisfano le proprietà commutativa, associativa e distributiva, che vale la legge di annullamento del prodotto, che il modulo della somma di due numeri complessi è minore o uguale alla somma dei moduli dei due numeri, che il prodotto e il quoziente di due numeri complessi hanno modulo uguale rispettivamente al prodotto e al quoziente dei moduli dei due numeri. È invece importante notare che sull'insieme $\mathbb{C}$ non è possibile definire un ordinamento.

Ogni equazione di 2° grado a coefficienti reali $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, ha soluzione in $\mathbb{C}$. Infatti, dalla formula risolutiva abbiamo le soluzioni

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad \text{dove} \quad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Se $\Delta \geq 0$, le due soluzioni sono reali. Se $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali, ma tenendo conto del fatto che

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-|\Delta|} = \sqrt{(-1)\,|\Delta|} = \sqrt{(-1)}\,\sqrt{|\Delta|} = \boldsymbol{i}\,\sqrt{|\Delta|},$$

le due soluzioni risultano

$$x = \frac{-b \pm \boldsymbol{i}\,\sqrt{|\Delta|}}{2a}.$$

Per esempio, l'equazione $2x^2 - 2x + 5 = 0$ ha le due soluzioni complesse $x = \dfrac{1}{2} \pm \boldsymbol{i}\,\dfrac{3}{2}$ fra loro coniugate.

1.2 Esercizi svolti

1.2.1 Un numero naturale $n \geq 1$ si dice *pari* se può essere scritto come $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$, si dice *dispari* altrimenti. Dimostrare che la somma e il prodotto di numeri pari è pari e la somma di due numeri dispari è pari, mentre sono dispari la somma di un pari e un dispari e il prodotto di due dispari.

Soluzione. Chiaramente, un numero è dispari se il successivo è pari. Se n e n' sono pari, è $n = 2m$ e $n' = 2m'$ con $m, m' \in \mathbb{N}$ e si ha

$$n + n' = 2(m + m') \quad \text{e} \quad n \cdot n' = 2(2m\,m') \quad \text{con} \quad m + m',\ 2m\,m' \in \mathbb{N}.$$

Se n e n' sono dispari, è $n = 2m - 1$ e $n' = 2m' - 1$ con $m, m' \in \mathbb{N}$ e si ha

$$n + n' = 2(m + m' - 1) \quad \text{con} \quad m + m' - 1 \in \mathbb{N},$$

$$n \cdot n' = 2(2m\,m' - m - m' + 1) - 1 \quad \text{con} \quad 2m\,m' - m - m' + 1 \in \mathbb{N}.$$

Se n è pari e n' è dispari, è $n = 2m$ e $n' = 2m' - 1$ con $m, m' \in \mathbb{N}$ e si ha

$$n + n' = 2(m + m') - 1 \quad \text{con} \quad m + m' \in \mathbb{N}.$$

1.2.2 È vero che $n^2 - 5n + 12$ è sempre un numero positivo pari?

Soluzione. Poiché $n^2 - 5n + 12 = n(n-5) + 12$, se n è pari, il prodotto $p = n(n-5)$ è pari; se n è dispari, $n - 5$ è pari, quindi p è pari. Sommando a questo 12 che è pari resta pari. Per $n \geq 5$ è $p \geq 0$, quindi sommando 12 il risultato è sicuramente positivo. Per $n = 1, 2, 3, 4$ si ha $p < 0$ ma $p \geq -6$, quindi sommando 12 il risultato viene positivo.

1.2.3 Trovare il numero naturale x tale che $x^5 = 7776$

Soluzione. Se x fosse dispari, le sue potenze sarebbero dispari. Quindi x deve essere pari. Poiché 10^5 è maggiore di 7776, certamente $x < 10$. Inoltre la somma delle cifre di 7776 è divisibile per 3, quindi x deve essere divisibile per 3. L'unico numero con queste caratteristiche è $x = 6$.

1.2.4 Si considerino i numeri naturali della forma 4^n. Se questi numeri sono espressi nel sistema decimale, per quali valori di n la loro ultima cifra è il 4? E per gli altri valori di n qual è l'ultima cifra?

Soluzione. Le successive potenze del 4 sono $4^1 = 4$, $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$, $4^6 = 4096$,... Quindi le potenze con esponente dispari terminano con la cifra 4, mentre le potenze con esponente pari terminano con la cifra 6. Per vedere che in effetti è così (non si vuole qui fare una dimostrazione formale di induzione), si nota che se una potenza termina con la cifra 4, moltiplicando per 4, la potenza successiva termina con 6 e viceversa, se una potenza termina con la cifra 6, moltiplicando per 4, la potenza successiva termina con 4.

1.2.5 Fra 1 e 600 inclusi, quanti sono i multipli di 3, quanti i multipli di 3 e di 4, quanti i multipli di 3 o di 4?

Soluzione. I multipli di 3 sono: 3, 6, 9, 12, 15, ..., cioè si trova un multiplo di 3 ogni terna di numeri consecutivi. In 600 vi sono 200 terne (in realtà l'ultima terna è formata da 600, 601, 602), quindi vi sono 200 multipli di 3. In modo analogo si vede che vi sono 150 multipli di 4 e 50 multipli di 12 (cioè di 3 e di 4). Per vedere quanti sono i multipli di 3 o di 4, si sommano i multipli di 3 con quelli di 4 e si sottraggono quelli di 12 per tenere conto di quelli che sono contemporaneamente multipli di 3 e di 4. Si ottiene 300.

1.2.6 Dimostrare che il numero $n(n^2 + 8)$ è un multiplo di 3 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione. Se $n = 1$ e $n = 2$ basta la semplice verifica. Se $n \geq 3$ è un multiplo di 3, il risultato è ovvio. Altrimenti $n-1$ oppure $n-2$ sono multipli di 3. Nel primo caso si può scrivere che $n = 3p + 1$, nel secondo che $n = 3p + 2$, con p numero naturale. Quindi nel primo caso $n^2 + 8 = 9p^2 + 6p + 9 = 3(3p^2 + 2p + 3)$ e nel secondo caso $n^2 + 8 = 9p^2 + 12p + 12 = 3(3p^2 + 4p + 4)$ sono multipli di 3.

1.2.7 Se un numero n è divisibile per 2646 e per 15435, qual è il massimo numero per cui esso è sicuramente divisibile?

Soluzione. È il $mcm(2646, 15435) = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^3 = 92610$.

1.2.8 Dimostrare che la somma di tre numeri naturali consecutivi è divisibile per 3. E quella di 4 numeri è divisibile per 4? E quella di 5 numeri?

Soluzione. Per tre numeri si ha

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1),$$

che è chiaramente divisibile per 3. Invece per quattro numeri si ha

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 2(2n + 3),$$

che non è divisibile per 4 perché $2n + 3$ è un numero dispari. Per cinque numeri si ha

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + (n + 4) = 5n + 10 = 5(n + 2),$$

che è divisibile per 5.

1.2.9 Dimostrare che per ogni numero naturale $n > 1$ il numero $a = n^3 - n$ è divisibile per 6.

Soluzione. Poiché $a = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$, il numero a è divisibile per tre numeri naturali consecutivi. Il prodotto di una terna di numeri naturali consecutivi contiene sicuramente il fattore 2 e il fattore 3, quindi il fattore 6.

1.2.10 Si considerino i numeri naturali della forma $a = n^3 + 6n^2 + 11n + 6$. Quali delle seguenti affermazioni su a sono vere? (1) a è sempre un numero pari. (2) Se n è dispari, a è divisibile per 4. (3) a è sempre divisibile per 4. (4) a è sempre divisibile per 3. (5) Se a è divisibile per 5, allora lo è anche per 30. (Suggerimento: si noti che $a = (n+1)(n+2)(n+3)$).

Soluzione. In base al suggerimento, a è divisibile, per ogni n, per tre numeri consecutivi a partire da $n+1$. Uno dei tre fattori è sicuramente pari, quindi la (1) è vera, mentre due dei fattori sono pari solo se lo è $n+1$, quindi se n è dispari, per cui la (2) è vera ma non la (3). La (4) è vera perché in tre fattori consecutivi ve ne è sicuramente uno divisibile per 3. La (5) è vera perché già sappiamo che a è divisibile per 2 e per 3.

1.2.11 I due numeri $a = 123$ e $b = 42$ sono primi fra loro? Se non lo sono, trovarne il MCD. Il numero b è un divisore di a? Se non lo è, determinare quoziente e resto della divisione intera.

Soluzione a ha i fattori 3 e 41, b ha i fattori 2, 3 e 7. I due numeri non sono primi fra loro, avendo il fattore 3 in comune. Quindi $MCD(a,b) = 3$. Poiché b non è un divisore di a, la divisione intera di a per b dà un resto non nullo. Infatti $123 = 42 \cdot 2 + 39$.

1.2.12 Sia n un intero non nullo; perché $MCD(n+1, n) = 1$? In quale caso $MCD(n+2, n) = 1$?

Soluzione. È evidente che $n+1 = n \cdot 1 + 1$. Quindi se si applica l'algoritmo euclideo si ottiene subito al primo passo che il MCD è 1. Nell'altro caso, se n è pari lo è anche $n+2$, quindi il MCD non può essere 1. Se invece n è dispari e maggiore di 2, è $n+2$ dispari e $n+2 = n \cdot 1 + 2$. Il primo resto è 2 , il resto successivo è 1 e i due numeri sono primi fra loro.

1.2.13 Trovare il $MCD(102, 99)$.

Soluzione. Se si applica l'algoritmo euclideo al primo passo si divide 102 per 99 ottenendo resto 3. La successiva divisione fra 99 e 3 dà resto 0, quindi il MCD cercato è 3. In alternativa, si nota che la somma delle cifre di entrambi i numeri dati è divisibile per 3. Dividendoli per 3, si ottiene 34 e 33. Questi due numeri differiscono solo di 1, quindi sono primi fra loro (ved. esercizio precedente).

1.2.14 Riscrivere in ordine crescente i numeri: 2/5, 0, -1, 0.45, -0.33, 0.35, 0.033, 2/6.

Soluzione. Poiché 2/5 vale 0.4 e 2/6=0.3333..., l'ordinamento richiesto è: -1. -0.33, 0, 0.033, 2/6, 0.35, 2/5, 0.45.

1.2.15 Come si deve scegliere il numero intero k affinché il numero $x = (k+1)/(k-2)$ sia intero?

Soluzione. Intanto deve essere $k \neq 2$. Non esistono valori di k per cui $k+1 = k-2$, e quindi x non può mai essere uguale a 1. Cerchiamo per quali valori positivi di k si ha $x \geq 2$. Tali valori soddisfano la relazione $k+1 \geq 2(k-2)$, cioè $k \leq 5$, quindi solo $k = 1$ (per cui si ha $x = -2$), $k = 3$ (per cui si ha $x = 4$), $k = 4$ (non accettabile perché si ha $x = 5/2$), $k = 5$ (per cui si ha $x = 2$). Ogni altro valore positivo di k dà un x compreso fra 1 e 2 e quindi non intero. Per $k \leq 0$ si pone $k = -m$ com $m \geq 0$ e si ha $x = (-m+1)/(-m-2) = (m-1)/(m+2)$. Questa frazione non può essere un intero, eccetto che per $m = 1$, cioè $k = -1$, per cui si ha $x = 0$.

1.2.16 Quanti numeri razionali sono strettamente compresi fra $a = 3/5$ e $b = 4/5$? Scriverne alcuni.

Soluzione. L'insieme $\mathbb{Q}$ è denso, quindi vi sono infiniti numeri razionali strettamente compresi fra due assegnati. Moltiplicando numeratore e denominatore di a e b per (ad esempio) 10, si ottengono le frazioni equivalenti 30/50 e 40/50. Quindi fra le due frazioni date sono compresi i numeri 31/50, 32/50, ..., 39/50. In modo analogo si potrebbero trovare le frazioni con denominatore 55, 60, e così via, strettamente comprese fra a e b.

1.2.17 Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Dimostrare che se $0 < a < b$, allora $0 < a^n < b^n$ per ogni numero naturale $n \geq 1$. Quale è il più grande fra $x = 5^{1/3}$ e $y = 3^{1/2}$?

Soluzione. Poiché $a > 0$, per $n = 2$ si ha

$$0 < a < b \quad \Rightarrow \quad 0 < a \cdot a < b \cdot a < b \cdot b \quad \Rightarrow \quad 0 < a^2 < b^2.$$

Per $n > 2$ si procede in modo analogo. Nel caso particolare, elevando sia x che y alla stessa sesta potenza si ha:

$$x^6 = 5^{1/3 \cdot 6} = 5^2 = 25, \qquad y^6 = 3^{1/2 \cdot 6} = 3^3 = 27.$$

Quindi $x < y$.

1.2.18 Dimostrare che per a e n numeri interi positivi, il numero $b = \sqrt[n]{a}$, se non è un intero, è irrazionale.

Soluzione. Se b fosse razionale, esisterebbe una frazione $p/q = b$ ridotta ai minimi termini. Elevando alla potenza n-esima si avrebbe $p^n/q^n = a$, quindi $p^n = a \cdot q^n$. Si è supposto che p e q fossero primi fra loro, quindi lo sono anche p^n e q^n. Ne segue che a deve essere un fattore di p^n, cioè a dovrebbe essere divisibile per c^n per un numero intero $c > 0$ opportuno, ma questo avrebbe comportato che $\sqrt[n]{a} = c$.

1.2.19 Se è $2.3 \leq x \leq 2.5$ e $-1.6 \leq y \leq -1.4$, fra quali limiti sono compresi i numeri $x + y$, $x - y$, xy, x/y?

Soluzione. Poiché $1.4 \leq (-y) \leq 1.6$, si ha

$$\begin{aligned}
&2.3 + (-1.6) \leq x + y \leq 2.5 + (-1.4) \quad \Rightarrow \quad 0.9 \leq x + y \leq 1.1,\\
&2.3 + 1.4 \leq x + (-y) = x - y \leq 2.5 + 1.6 \quad \Rightarrow \quad 3.7 \leq x - y \leq 4.1,\\
&2.3 \cdot 1.4 \leq |x| \cdot |y| \leq 2.5 \cdot 1.6 \quad \Rightarrow \quad 3.22 \leq |xy| \leq 4 \quad \Rightarrow \quad -4 \leq xy \leq -3.22,\\
&2.3/1.6 \leq |x|/|y| \leq 2.5/1.4 \quad \Rightarrow \quad 1.4 \leq |x/y| \leq 1.8 \quad \Rightarrow \quad -1.8 \leq x/y \leq -1.4.
\end{aligned}$$

1.3 Esercizi proposti

(una sola risposta fra le quattro indicate è corretta)

1.3.1 Sia A l'insieme dei numeri interi positivi dispari o primi. Allora è vero che

(A) $12 \in A$ (B) $3 \notin A$ (C) $13 \notin A$ (D) $2 \in A$

1.3.2 La scomposizione in fattori primi del numero 30^{13} è

(A) $2^{15}\,3^{12}\,7^{13}$ (B) $2^{13}\,3^{13}\,5^{13}$ (C) 30^{13} (D) $6^{12}\,5^{13}$

1.3.3 Quanto vale il prodotto dei due numeri $1.7 \cdot 10^6$ e $1.3 \cdot 10^{-7}$?

(A) 0.221 (B) 22.1 (C) 2.21 (D) 0.0221

1.3.4 $5^9 \cdot 5^5$ vale

(A) 25^7 (B) 25^{14} (C) 25^{45} (D) 5^{45}

1.3.5 Sia n un numero naturale pari. Allora $n^{13}/1024$

(A) è sempre multiplo di 8 (B) può essere dispari

(C) è sempre divisibile per 16 (D) è sempre dispari

1.3.6 Qual è il risultato della divisione di $0.16 \cdot 10^{-4}$ per 0.05?

(A) 0.00032 (B) 0.0032 (C) 0.032 (D) 0.32

1.3.7 L'espressione $-2^{-2}/(3/4)$ è uguale a

(A) $\dfrac{1}{3}$ (B) $\dfrac{16}{3}$ (C) $-\dfrac{1}{3}$ (D) $-\dfrac{3}{16}$

1.3.8 L'espressione $\dfrac{2^{-1}+2^{-2}}{2^{-3}-2^{-4}}$ è uguale a

(A) 16 (B) 8 (C) 3 (D) 12

1.3.9 L'espressione $2^{-1/2} \cdot \sqrt{2}$ è uguale a

(A) $2\sqrt{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (D) $\frac{1}{2}$

1.3.10 Il numero $\sqrt{0.9}$ è

(A) uguale a 0.3 (B) uguale a 0.81 (C) compreso fra 0.81 e 0.9
(D) compreso fra 0.9 e 1

1.3.11 Un numero razionale compreso fra $\sqrt{5}$ e $\sqrt{8}$ è

(A) 2.52 (B) 1.98 (C) 3.01 (D) $(\sqrt{5}+\sqrt{8})/2$

1.3.12 Il numero $\sqrt{0.000025}$ è uguale a

(A) $5 \cdot 10^{-6}$ (B) $5 \cdot 10^{-2}$ (C) $5 \cdot 10^{-4}$ (D) $5 \cdot 10^{-3}$

1.3.13 Il numero $(\sqrt{3})^{10}$ è uguale a

(A) $\sqrt{3^5}$ (B) 3^5 (C) $\sqrt[20]{3}$ (D) $\sqrt[10]{3}$

1.3.14 Il valore dell'espressione $\sqrt{27}+\sqrt{12}$ è

(A) $\sqrt{50}$ (B) $\sqrt{78}$ (C) $\sqrt{75}$ (D) $\sqrt{39}$

1.3.15 Posto $k = 98075/12783456$, risulta

(A) $10^{-2} < k < 10^{-1}$ (B) $10^{-3} < k < 10^{-2}$ (C) $10^{-4} < k < 10^{-3}$
(D) $10^{-5} < k < 10^{-4}$

1.3.16 Quale delle seguenti disuguaglianze è vera?

(A) $\frac{5}{2} < 3.6 < \frac{7}{2}$ (B) $\frac{10}{3} < 3.6 < \frac{11}{3}$ (C) $\frac{8}{3} < 3.6 < \frac{10}{3}$
(D) $\frac{9}{2} < 3.6 < \frac{11}{2}$

1.3.17 Sono dati i numeri reali $a = 5\sqrt{10}$, $b = \sqrt{190}$, $c = 2\sqrt{51}$. Quale delle seguenti è vera?

(A) $c < a < b$ (B) $a < b < c$ (C) $c < b < a$ (D) $b < c < a$

1.3.18 Un numero h verifica la relazione $2 < h < 3$. Si può dedurre che

(A) $\frac{1}{h^2} < \frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{h}} < \frac{1}{3}$ (C) $\sqrt{h} > 2$ (D) $\frac{1}{h} > \frac{1}{2}$

1.3.19 Quanti sono i numeri primi compresi fra 80 e 100?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

1.3.20 Siano q e r il quoziente e il resto della divisione intera di 3437 per 225. Allora

(A) $q = 16$ e $r = 163$ (B) $q = 16$ e $r = 62$ (C) $q = 15$ e $r = 163$
(D) nessuna delle risposte precedenti è esatta

1.3.21 Il massimo comun divisore di 228 e 444 è

(A) 34 (B) 75 (C) 12 (D) 6

1.3.22 Due numeri interi positivi, entrami non primi, hanno massimo comun divisore 7 e minimo comune multiplo 105. Allora la loro somma è

(A) 112 (B) 42 (C) 56 (D) 36

1.3.23 Tutti i numeri positivi minori di 30 che sono multipli sia di 4 che di 6 sono

(A) $4, 6, 8, 12, 16, 18, 20, 24, 28$ (B) $8, 16, 24$ (C) $12, 24$
(D) $4, 6, 8, 16, 18, 20, 28$

1.3.24 Sappiamo che H è un insieme di numeri interi positivi. Se in H non c'è alcun numero dispari, allora siamo certi che in H non c'è alcun numero che sia

(A) un multiplo di 3 (B) una potenza di 5 (C) divisibile per 7 e per 11
(D) il quadrato di un altro numero

1.3.25 Dati tre numeri interi a, b e c scriviamo $a \equiv b \pmod{c}$ quando esiste un intero k tale che $a - b = k\,c$. Indica quale dei seguenti numeri verifica la condizione $x \equiv 7 \pmod{6}$

(A) $x = -7$ (B) $x = -1$ (C) $x = 6$ (D) $x = 1$

1.3.26 Se il prodotto di cinque numeri interi è negativo, allora si può essere sicuri che

(A) tutti i numeri sono negativi (B) uno è negativo e gli altri sono positivi
(C) tre sono negativi e gli altri sono positivi
(D) nessuna delle risposte precedenti è esatta

1.3.27 Se a è un numero negativo, allora il numero $-a + 3$ è

(A) sempre positivo (B) positivo solo se $a < -3$
(C) sempre negativo (D) positivo solo se $a > -3$

1.3.28 Le misure dei lati di un rettangolo vengono ridotte del 20%. Di quanto diminuisce in percentuale l'area del rettangolo?

(A) 40% (B) 36% (C) 64% (D) 20%

1.3.29 A quanti metri cubi corrispondono 700 cm^3?

(A) $7 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^3$ (B) $7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^3$ (C) $0.7\,\mathrm{m}^3$ (D) $7\,\mathrm{m}^3$

Capitolo 2

Equazioni e disequazioni

2.1 Richiami di teoria

Il calcolo simbolico fa uso di lettere con cui si indicano costanti e variabili: nel primo caso la lettera rappresenta un numero preciso, nel secondo può rappresentare un numero qualsiasi (vi è la consuetudine di indicare le costanti con le prime lettere dell'alfabeto, le variabili con le ultime, ma non si tratta di una regola tassativa). Legando fra loro le lettere con i simboli delle operazioni si formano le *espressioni algebriche*. Assegnando alle lettere di un'espressione algebriche dei valori numerici, l'espressione assume un valore numerico. In ogni caso vanno precisati l'insieme numerico a cui appartengono le costanti e in cui si fanno variare le variabili. Si assume qui che tale insieme sia $\mathbb{R}$.

2.1.1 I monomi

Il *monomio* è un'espressione algebrica costituita dal prodotto di un *coefficiente* numerico e una *parte letterale* in cui le variabili sono legate solamente dalle operazioni di moltiplicazione ed elevamento a potenza con esponente positivo. Sono ad esempio monomi $2xy$, $-5\pi x$, $0.5x^2y^3z$. Due monomi aventi la stessa parte letterale sono detti *simili*. Il *grado* del monomio è la somma degli esponenti di tutte le variabili che compongono la parte letterale.

Sull'insieme dei monomi si definiscono le operazioni di moltiplicazione ed elevamento a potenza, secondo regole precise, derivate dalle regole usate per le analoghe operazioni fra numeri reali.

- Per moltiplicare due monomi si moltiplicano separatamente i coefficienti e le parti letterali. Se nelle parti letterali vi sono delle variabili comuni, si tiene conto delle proprietà delle potenze e si sommano gli esponenti di queste variabili. Per esempio, il prodotto dei due monomi $5xy^3z$ e $-3x^3z$ è $-15x^4y^3z^2$.
- Per elevare alla potenza n-esima un monomio si eleva a potenza n il coefficiente e si moltiplicano per n gli esponenti delle variabili. Per esempio, $(2xy^3z^2)^3 = 8x^3y^9z^6$.
- La somma di due monomi in generale non è un monomio. Lo è solo se i due monomi sono simili. In tal caso il coefficiente del monomio risultante è la

somma dei coefficienti dei due monomi. Per esempio, la somma dei due monomi $2xy^3z^2$ e $-3xy^3z^2$ è $-xy^3z^2$. Se i due monomi non sono simili, la somma non può essere eseguita e l'espressione viene lasciata indicata. Per esempio, $2xy^2z^2 - 3xy^3z^3$.

– Il quoziente di due monomi in generale non è un monomio. Lo è solo se tutte le variabili del divisore compaiono nel dividendo, con esponente maggiore o uguale. In tal caso si dividono i coefficienti e si sottraggono gli esponenti delle variabili comuni. Per esempio, il quoziente dei due monomi $2xy^3z^2$ e $-3xyz^2$ è $-2/3\,y^2$.

– Il MCD di due monomi ha per coefficiente il MCD dei coefficienti e parte letterale uguale al prodotto delle variabili comuni con il minimo esponente.

– Il mcm di due monomi ha per coefficiente il mcm dei coefficienti e parte letterale uguale al prodotto di tutte le variabili che compaiono nei due monomi con il massimo esponente.

2.1.2 I polinomi

Quando si sommano monomi che non sono simili si ottengono dei polinomi. Per semplicità consideriamo qui polinomi in una variabile. Si definisce *polinomio* nella variabile x un'espressione della forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

dove i *coefficienti* a_i appartengono a un insieme numerico. In generale si assume che a_n, detto *primo coefficiente*, sia $\neq 0$ e si dice che il polinomio ha *grado* n. Il termine a_0 è detto *termine noto*.

Si dice che i due polinomi

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$
$$q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m,$$

sono *identici* se $p(x) = q(x)$ per ogni x. Vale il seguente *principio di identità dei polinomi*: " due polinomi sono identici se e solo se hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti".

Le operazioni di addizione e di moltiplicazione di polinomi sono definite nel modo seguente

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{\max\{n,m\}} (a_i + b_i) x^i,$$

intendendo nulli i coefficienti a_i per $i > n$ o b_i per $i > m$. Se $n = m$ il grado del polinomio somma può risultare minore di n.

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i \cdot b_j \, x^{i+j}.$$

In pratica, per calcolare il polinomio $p(x) \cdot q(x)$ si sommano i prodotti ottenuti moltiplicando in tutti i modi possibili i monomi di p per i monomi di q. Il grado del polinomio prodotto è $n + m$. In entrambi i casi è opportuno ridurre i monomi simili che si dovessero presentare.

Valgono le seguenti proprietà:

- associativa della somma $(p(x) + q(x)) + r(x) = p(x) + (q(x) + r(x))$,
- esistenza dell'elemento neutro per la somma $p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x)$,
- esistenza dell'opposto $p(x) + (-p(x)) = 0$,
- commutativa della somma $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$,
- associativa del prodotto $(p(x) \cdot q(x)) \cdot r(x) = p(x) \cdot (q(x) \cdot r(x))$,
- esistenza dell'elemento neutro per il prodotto $1 \cdot p(x) = p(x) \cdot 1 = p(x)$,
- commutativa del prodotto $p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$,
- distributiva del prodotto rispetto alla somma
$$p(x) \cdot (q(x) + r(x)) = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x).$$

Alcuni prodotti di polinomi che si presentano frequentemente vengono denominati *prodotti notevoli*:

$$\begin{array}{ll} (a+b)\,(a-b) = a^2 - b^2 & \text{differenza di due quadrati} \\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & \text{quadrato del binomio} \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \text{cubo del binomio} \end{array}$$

In generale la potenza n-esima del binomio $a + b$ si esprime come somma di $n + 1$ monomi di grado n della forma $c_{n,i}\, a^{n-i}\, b^i$ in cui i coefficienti $c_{n,i}$, per $i = 0, \ldots, n$, detti *coefficienti binomiali* si ricavano dalla n-esima riga del seguente *triangolo di Tartaglia*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&1&&&&& \\
&&&&1&&2&&1&&&& \\
&&&1&&3&&3&&1&&& \\
&&1&&4&&6&&4&&1&& \\
&1&&5&&10&&10&&5&&1& \\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1
\end{array}$$

Questa tabella ha 1 sui lati obliqui e i suoi elementi interni sono dati dalla somma dei due elementi soprastanti. Si ha per esempio

$$(a+b)^5 = a^5 + 5\,a^4b + 10\,a^3b^2 + 10\,a^2b^3 + 5\,ab^4 + b^5.$$

Dati due polinomi: $p(x)$, detto *dividendo*, e $d(x) \neq 0$, detto *divisore*, esistono e sono unici due polinomi $q(x)$, detto *quoziente*, e $r(x)$, detto *resto*, tali che

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \text{con} \quad \text{grado di } r(x) < \text{grado di } d(x).$$

Se $r(x) = 0$ si dice che $d(x)$ *divide* $p(x)$ o che $d(x)$ è un *fattore* di $p(x)$.

Per esempio, siano $p(x) = x^5 - x^3 + x^2 + 7$ e $d(x) = x^3 + 3x^2 + x + 5$. La divisione si fa nel modo consueto, indicando i monomi mancanti con lo zero.

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3 & 1 & 5 \\
\cline{7-10}
1 & 3 & 1 & 5 & & & 1 & -3 & 7 & \\
\cline{1-6}
 & -3 & -4 & 4 & 0 & & & & & \\
 & -3 & -9 & -3 & -15 & & & & & \\
\cline{2-6}
 & & 7 & -1 & 15 & 7 & & & & \\
 & & 7 & 21 & 7 & 35 & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & -22 & 8 & -28 & & & &
\end{array}
$$

Quindi $q(x) = x^2 - 3x + 7$ e $r(x) = -22x^2 + 8x - 28$.

Nel caso particolare in cui $d(x)$ è un polinomio di grado 1, il resto è una costante. Sia ad esempio $d(x) = x - \alpha$. In questo caso conviene disporre il calcolo secondo lo schema seguente, detto di *Ruffini*:

$$
\begin{array}{c|ccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & a_0 \\
\alpha & & \alpha b_{n-1} & \alpha b_{n-2} & \dots & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \dots & b_0 & r
\end{array}
$$

dove
$b_{n-1} = a_n$,
$b_i = a_{i+1} + \alpha b_i$,
$r = a_0 + \alpha b_0$.

Per esempio, siano $p(x) = x^3 - x^2 + 3$ e $\alpha = 2$, allora

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
 & 1 & -1 & 0 & 3 \\
2 & & 2 & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 7
\end{array}
$$

e risulta $x^3 - x^2 + 3 = (x - 2)(x^2 + x + 2) + 7$.

Dalla relazione $p(x) = (x - \alpha)q(x) + r$ risulta che $r = p(\alpha)$. Quindi se $p(x)$ ha come fattore un polinomio lineare, allora $p(x) = (x - \alpha)\, q(x)$ e $p(\alpha) = 0$, cioè α è radice dell'equazione $p(x) = 0$.

Se $p(x)$ ha un fattore $d(x)$ di grado ≥ 1, spesso conviene lasciare $p(x)$ scritto nella forma prodotto $p(x) = d(x)\, q(x)$, mettendo in evidenza $d(x)$ o, come si dice, raccogliendo $d(x)$ a *fattor comune*. Riconoscere un fattore comune può non essere semplice, perché la scomposizione in fattori dei polinomi implica un processo di risoluzione di equazioni algebriche.

Per trovare il *massimo comun divisore* di due polinomi $p(x)$ e $d(x)$ si può applicare l'algoritmo di Euclide, come per i numeri. Si divide $p(x)$ per $d(x)$ ottenendo un primo resto $r_1(x)$, che ha grado minore del grado di $d(x)$. Poi si divide $d(x)$ per $r_1(x)$ ottenendo un secondo resto $r_2(x)$, che ha grado minore del grado di $r_1(x)$. E così via, dividendo il penultimo resto per l'ultimo trovato, fino a quando si trova un resto nullo. L'ultimo resto non nullo è il MCD. Se è una costante, i due polinomi sono *primi fra loro*.

Per esempio, se $p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + 4x + 12$ e $d(x) = x^2 - x - 2$, dividendo $p(x)$ per $d(x)$ si ottiene un primo resto $r_1(x) = -x + 2$, infatti

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + 4x + 12 = (x^2 - x - 2)(x^2 - 5) - x + 2.$$

Dividendo $d(x)$ per $r_1(x)$ si ottiene resto 0. Quindi $\mathrm{MCD}(p, d) = -x + 2$.

Nota: il MCD di due polinomi è determinato a meno di un fattore moltiplicativo. Per esempio, $x - 1$ è il MCD di $x^3 - 1$ e $x^2 - 1$, ma anche $c \cdot (x - 1)$ lo è per ogni $c \neq 0$.

Dati due polinomi $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$, l'espressione

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$$

viene detta *frazione algebrica*. L'espressione è definita solo per i valori di x che non rendono nullo il denominatore, e questo anche nel caso in cui i due polinomi non siano primi fra loro. Sull'insieme delle frazioni algebriche vengono definite le operazioni aritmetiche in modo analogo a quanto fatto per le operazioni su $\mathbb{Q}$.

Se $p(x)$ e $q(x)$ non sono primi fra loro, si può ridurre la frazione $p(x)/q(x)$ dividendo numeratore e denominatore per i fattori comuni. L'espressione che si ottiene è equivalente a quella data per tutte le x che non annullano i fattori eliminati. Per esempio, i due polinomi $p(x) = x^3 - 2x^2 - 14x + 3 = (x^2 - 5x + 1)\,(x + 3)$ e $q(x) = 2x^2 - 2x - 24 = (2x - 8)\,(x + 3)$ sono entrambi divisibili per $x + 3$, e si ha

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3 - 2x^2 - 14x + 3}{2x^2 - 2x - 24} \quad \text{è equivalente a} \quad \frac{x^2 - 5x + 1}{2x - 8} \quad \text{per} \quad x \neq -3.$$

Alcune semplificazioni di questo tipo, dette *scomposizioni notevoli*, sono ricavabili dai prodotti notevoli:

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b, \quad a \neq b, \qquad \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b, \quad a \neq -b$$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2, \quad a \neq b, \qquad \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2, \quad a \neq -b.$$

Attenzione alle semplificazioni: si possono semplificare solo fattori comuni a numeratore e denominatore. Quindi

$$SI' : \quad \frac{ax + b}{a} = \frac{a(x + b/a)}{a} = x + \frac{b}{a}, \qquad \frac{a}{ax + b} = \frac{a}{a(x + b/a)} = \frac{1}{x + b/a},$$

$$NO : \quad \frac{ax + b}{a} = x + b, \qquad \frac{a}{ax + b} = \frac{1}{x + b}, \qquad \frac{a}{ax + b} = \frac{1}{x} + \frac{a}{b}.$$

2.1.3 Le equazioni algebriche

Un'*equazione* è un'uguaglianza fra due espressioni algebriche. Risolvere un'equazione significa determinare, se esistono, i numeri che sostituiti al posto delle variabili soddisfano l'uguaglianza. Questi numeri sono detti *soluzioni* o *radici* dell'equazione. L'equazione è

- *determinata* se insieme delle soluzioni è finito,
- *indeterminata* se insieme delle soluzioni è infinito,
- *impossibile* se insieme delle soluzioni è vuoto,
- *un'identità* se l'insieme delle soluzioni è tutto $\mathbb{R}$.

Risolvere un'equazione può essere complicato, anche nel caso particolare delle equazioni *algebriche*, cioè equazioni in cui le espressioni coinvolte nell'uguaglianza sono solo polinomi, ad esempio

$$p(x) = q(x),$$

in cui $p(x)$, detto *primo membro*, e $q(x)$, detto *secondo membro*, sono polinomi di grado rispettivamente n e m. Il grado dell'equazione è il maggiore fra n e m.

Vi sono alcuni procedimenti con cui si può trasformare l'equazione data in un'altra equivalente, cioè con le stesse soluzioni, che però sia più facile da risolvere. Ad esempio,

- si può sommare o sottrarre ad entrambi i membri un'espressione algebrica definita per ogni x. Si può cioè spostare un termine da un membro all'altro cambiandolo di segno e si possono cancellare termini uguali presenti in entrambi i membri,
- se i due membri hanno un fattore comune non nullo, si può dividere entrambi i membri per quel fattore. Ad esempio si può cambiare segno ad entrambi i membri. Moltiplicando entrambi i membri per il minimo comune multiplo dei denominatori si può trasformare un'equazione a coefficienti frazionari in una a coefficienti interi.

Applicando questi procedimenti, un'equazione di primo grado viene trasformata in una equivalente della forma $ax = b$, da cui, se $a \neq 0$, si ricava la soluzione $x = b/a$. Se $a = 0$ e $b = 0$ l'equazione è indeterminata, se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione è impossibile.

Un'equazione di secondo grado viene trasformata in una equivalente della forma $ax^2 + bx + c = 0$. Se $a = 0$ l'equazione si riduce a una di primo grado. Se $a \neq 0$, si calcola il *discriminante* $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta > 0$ l'equazione ha le due soluzioni reali

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Se $\Delta = 0$ le due soluzioni coincidono, cioè l'equazione ha la sola soluzione reale $x_1 = -b/(2a)$, che viene anche detta di *molteplicità due*. Se $\Delta < 0$ la radice quadrata non può essere estratta nel campo dei numeri reali, cioè l'equazione non ha soluzioni reali.

Se l'equazione algebrica $p(x) = 0$ di grado n a coefficienti reali ha la soluzione reale α, si ha

$$p(x) = (x - \alpha)\, q(x),$$

dove $q(x)$ è un polinomio di grado $n - 1$ a coefficienti reali. Così continuando, ci aspetteremo che un'equazione di grado n abbia n soluzioni. Ma questo non è vero, infatti esistono equazioni di secondo grado a coefficienti reali che non hanno radici reali. Per esempio l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali perché non esiste nessun numero reale x il cui quadrato è uguale a -1.

Nel campo complesso questo non accade. Infatti vale il *Teorema fondamentale dell'algebra o di Gauss*: "ogni equazione algebrica a coefficienti *complessi* ha almeno una radice *complessa*". Ne segue che un'equazione algebrica ha tante radici complesse quanto è il suo grado.

Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti reali e α è una radice non reale di $p(x) = 0$, anche la coniugata $\overline{\alpha}$ è radice (si suol dire che le radici complesse dei polinomi a coefficienti reali vanno a coppie). Un polinomio a coefficienti reali e grado dispari ha un numero dispari di radici reali, quindi ne ha almeno una.

Abbiamo visto la formula risolutiva che consente di trovare le radici di un'equazione di grado 2. Analoghe formule risolutive (molto più complicate) esistono per le equazioni di grado 3 e 4. Furono trovate nel 1500. Per più di due secoli i matematici cercarono la formula risolutiva dell'equazione di 5° grado, senza trovarla. E infatti "non esistono formule risolutive per le equazioni di grado superiore al quarto". Questo teorema fondamentale è stato dimostrato da Ruffini e da Abel all'inizio del 1800.

2.1.4 Le equazioni irrazionali

Se l'equazione che si deve risolvere non è algebrica le cose si complicano perché si deve anche tenere conto delle condizioni di esistenza dei diversi componenti dell'equazione. Per esempio, se intervengono rapporti di polinomi, occorre escludere i valori delle incognite che annullano i denominatori e se intervengono radicali, occorre escludere i valori delle incognite che rendono negativi gli argomenti.

Consideriamo in dettaglio il caso delle equazioni *irrazionali*, cioè equazioni in cui l'incognita compare sotto radice. Per risolvere un'equazione irrazionale si cerca, se possibile, di trasformarla in una equivalente razionale con opportuni elevamenti a potenza. Nella forma più semplice in cui compare un solo radicale

$$\sqrt[n]{a(x)} = b(x), \tag{2.1}$$

se $a(x)$ e $b(x)$ sono razionali, si ottiene un'equazione razionale elevando entrambi i membri alla potenza n-esima

$$a(x) = (b(x))^n. \tag{2.2}$$

Occorre però tenere conto che i radicali con esponente n pari sono definiti solo per argomenti ≥ 0 e hanno valori ≥ 0. Quindi la (2.2) può essere equivalente alla

(2.1) solo se $a(x) \geq 0$ e $b(x) \geq 0$. Se queste condizioni non sono verificate la (2.2) potrebbe avere soluzioni che non sono soluzioni della (2.1). Questo non succede con l'elevamento a potenza dispari che non pone limitazioni di segno dell'argomento e del risultato.

Ad esempio, consideriamo l'equazione

$$\sqrt{x+1} = x - 5.$$

Un'eventuale soluzione dovrà verificare le condizioni $x+1 \geq 0$ e $x-5 \geq 0$. Elevando al quadrato si ottiene $x + 1 = (x - 5)^2$, le cui soluzioni sono $x_1 = 3$, $x_2 = 8$. La prima va però scartata. Invece nel caso dell'equazione

$$\sqrt[3]{x^3 - 19} = x - 1,$$

elevando al cubo si ottiene $x^3 - 19 = (x-1)^3$, le cui soluzioni sono $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$, entrambe accettabili.

2.1.5 I sistemi lineari

Un *sistema* è un insieme di due o più equazioni considerate contemporaneamente. Risolvere un sistema significa trovare le soluzioni comuni a tutte le equazioni che lo compongono. Un sistema viene detto *determinato* se ha un numero finito di soluzioni, *indeterminato* se ne ha infinite, *impossibile* se non ne ha.

Consideriamo qui sistemi *lineari*, cioè composti da equazioni di primo grado e supponiamo che il numero delle equazioni sia pari al numero delle incognite. Così un sistema di due equazioni lo scriviamo nella forma

$$\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{cases}$$

dove a, b, c, a', b', c' sono i *coefficienti*. La soluzione di questo sistema è una coppia ordinata $(\overline{x}, \overline{y})$ che soddisfa entrambe le equazioni.

Per risolvere il sistema conviene usare il cosiddetto *metodo di sostituzione*. Se $a \neq 0$, si ricava la x dalla prima equazione

$$x = \frac{c - b\,y}{a}$$

e si sostituisce questa espressione al posto della x nella seconda equazione

$$a'\,\frac{c - b\,y}{a} + b'\,y = c' \quad \Longleftrightarrow \quad (ab' - a'b)\,y = ac' - a'c$$

che viene così a dipendere dalla sola y. Risolvendo questa equazione si calcola

$$\overline{y} = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Si sostituisce $\overline{y}$ al posto di y nella prima equazione

$$ax + b\,\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = c$$

che viene a dipendere dalla sola x. Da questa equazione si calcola

$$\overline{x} = \frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}.$$

Il procedimento può essere opportunamente modificato se qualche coefficiente è uguale a zero, ma solo se $ab' - a'b \neq 0$. Se invece $ab' - a'b = 0$, il sistema non è determinato.

Non è difficile estendere il metodo di sostituzione al caso di sistemi lineari con un numero maggiore di equazioni. Il metodo può essere applicato anche in casi semplici di sistemi non lineari.

2.1.6 Le disequazioni

Una *disequazione* è una disuguaglianza fra espressioni algebriche legate con uno dei simboli $<$, $\leq$, $>$ o $\geq$, detti *operatori di relazione*. Risolvere una disequazione su $\mathbb{R}$ significa determinare un sottoinsieme S di $\mathbb{R}$ in cui la diseguaglianza vale. Un tale sottoinsieme è in generale costituito dall'unione di intervalli aperti o chiusi di numeri reali, può essere vuoto o discreto o anche coincidere con tutto $\mathbb{R}$. Per risolvere una disequazione si può sommare o sottrarre ad entrambi i membri una stessa espressione algebrica, in particolare spostando i termini da un membro all'altro con cambio di segno, come si fa per le equazioni, ma si deve prestare attenzione quando si moltiplicano entrambi i membri per una stessa espressione: se tale espressione è positiva si mantiene il verso della disuguaglianza, se è negativa si deve invertire il verso, scambiando $<$ con $>$ e $\leq$ con $\geq$ e viceversa. Questa operazione può richiedere uno studio accurato quando l'espressione per cui si moltiplica dipende a sua volta da x.

Per una disequazione di primo grado della forma $a\,x - b < 0$, l'insieme delle soluzioni è

$$S = \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid x < b/a\} & \text{se} \quad a > 0, \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x > b/a\} & \text{se} \quad a < 0, \end{cases}$$

e analogamente per le disequazioni con un diverso operatore di relazione.

Passando alle disequazioni di secondo grado, supponiamo di cercare le x per cui $a\,x^2 + b\,x + c < 0$, con $a \neq 0$. Conviene risolvere prima l'equazione $a\,x^2 + b\,x + c = 0$, controllandone il discriminante Δ e il segno del primo coefficiente a. Se $\Delta < 0$, l'equazione non ha soluzioni reali e il trinomio $a\,x^2 + b\,x + c$ ha sempre lo stesso segno di a. Quindi se $a < 0$ la disequazione data vale per ogni x, se $a > 0$ non vi sono x che risolvano la disequazione.

Se $\Delta = 0$, l'equazione ha una sola soluzione reale $x_1 = -b/(2a)$ e il trinomio $a\,x^2 + b\,x + c$ ha sempre lo stesso segno di a eccetto che per $x = x_1$ in cui vale zero. Quindi se $a < 0$ la disequazione data vale per ogni $x \neq x_1$, se $a > 0$ non vi sono x che risolvano la disequazione.

Se $\Delta > 0$, l'equazione ha due soluzioni reali x_1 e x_2 e risulta $a\,x^2 + b\,x + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)$. Quindi il trinomio ha lo stesso segno di a se $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ e segno opposto se $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Quindi se $a < 0$ la disequazione data vale per le x per cui $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, cioè per x esterno all'intervallo di estremi x_1

e x_2, se $a > 0$ la disequazione data vale per x interno all'intervallo di estremi x_1 e x_2. Si ragiona in modo analogo per le disequazioni di secondo grado con un diverso operatore di relazione.

Se la disequazione comprende frazioni algebriche, conviene trasportare tutti i termini con la x al primo membro e sommarli in modo da ottenere una sola frazione algebrica. Così facendo si riesce in molti casi ad ottenere disequazioni della forma $p(x)/q(x) < 0$ (o altro operatore di relazione). La frazione è negativa solo se numeratore e denominatore sono discordi. Quindi l'insieme delle soluzioni è dato dall'unione dell'insieme delle x per cui è contemporaneamente $p(x) < 0$ e $q(x) > 0$, con l'insieme delle x per cui è contemporaneamente $p(x) > 0$ e $q(x) < 0$. Si procede in modo analogo con i diversi operatori di relazione, facendo attenzione che $q(x) \neq 0$.

2.2 Esercizi svolti

2.2.1 Sia $f = \dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$. Calcolare il valore di f quando $a = 1/2$ e $b = 1$.

Soluzione. Si possono seguire due strade: (a) sostituire direttamente nell'espressione, ottenendo

$$f = \frac{(1/2)^3 - 1^3}{1/2 - 1} = \frac{1/8 - 1}{-1/2} = \frac{7/8}{1/2} = \frac{7}{4},$$

oppure (b) prima semplificare notando che $a^3 - b^3$ è divisibile per $a - b$ e poi sostituire, ottenendo

$$f = \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2 = (1/2)^2 + 1/2 + 1 = 7/4.$$

2.2.2 Semplificare l'espressione $f = \dfrac{(a + b)^2 - c^2}{c - a - b}$ per $c \neq a + b$.

Soluzione. Tenendo conto che

$$(a + b)^2 - c^2 = (a + b + c)(a + b - c),$$

si ha $f = -(a + b + c)$.

2.2.3 Risolvere l'equazione $(2x + 1)(3x - 2)(x + 4) = 0$.

Soluzione. Per la legge di annullamento del prodotto le soluzioni dell'equazione si ricavano annullando i singoli fattori, quindi risolvendo $2x + 1 = 0$, $3x - 2 = 0$ e $x + 4 = 0$. quindi le soluzioni sono $x_1 = -1/2$, $x_2 = 2/3$ e $x_3 = -4$.

2.2.4 Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0.3\,x + 0.12\,y = 0, \\ 5x - 2y = 2. \end{cases}$$

Soluzione. Moltiplicando la prima equazione per $50/3$, questa diventa $5x + 2y = 0$, da cui si ricava $2y = -5x$. Sostituendo nella seconda equazione si ha $10x = 2$, quindi $x = 1/5$ e $y = -1/2$.

2.2.5 Determinare l'insieme dei valori di x per quali risulta $\dfrac{x+\sqrt{2}}{x+\sqrt{3}} \geq 0$.

Soluzione. La frazione risulta ≥ 0 se il numeratore è ≥ 0 e il denominatore è > 0, oppure se il numeratore è ≤ 0 e il denominatore è < 0. Nel primo caso si ottiene $x \geq -\sqrt{2}$, nel secondo $x < -\sqrt{3}$.

2.2.6 Nel polinomio $p(x,y) = x^2 + y^2$ eseguire le sostituzioni

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{2t}{1+t^2},$$

e poi semplificare.

Soluzione.

$$x^2 + y^2 = \Big(\frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)^2 + \Big(\frac{2t}{1+t^2}\Big)^2 = \frac{(1-t^2)^2 + (2t)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2} = 1.$$

2.2.7 Semplificare $(y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 1) - y^4 + x^4$.

Soluzione.

$$(y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 1) - y^4 + x^4 = (y^2 - x^2)(y^2 + x^2 - 1) - (y^2 - x^2)(y^2 + x^2)$$

$$= (y^2 - x^2)((y^2 + x^2 - 1) - (y^2 + x^2)) = (y^2 - x^2)(-1) = x^2 - y^2.$$

2.2.8 Si sa che la somma di due numeri è 6 e che il loro prodotto è 8. Trovare i due numeri.

Soluzione. Detti x e y i due numeri, si ha che $x + y = 6$ e $xy = 8$. Dalla prima equazione si ricava $y = 6 - x$, che sostituita nella seconda dà $x(6-x) = 8$. Quindi x è soluzione dell'equazione di secondo grado $x^2 - 6x + 8 = 0$. Si ricava $x = 2$ a cui corrisponde $y = 4$ e $x = 4$ a cui corrisponde $y = 2$. In definitiva i due numeri sono 2 e 4, senza precisarne l'ordine.

2.2.9 Si sa che la differenza di due numeri è 3 e che il loro prodotto è -2. Trovare i due numeri.

Soluzione. Procedendo come sopra si perviene all'equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$. Si ricava $x = 2$ a cui corrisponde $y = -1$ e $x = 1$ a cui corrisponde $y- = 2$. Stavolta le due soluzioni sono distinte.

2.2.10 È vero che se la somma dei reciproci di due numeri positivi è 1, allora la somma dei due numeri è uguale al loro prodotto?

Soluzione. Sì, infatti detti a e b i due numeri, si ha

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \quad \iff \quad \frac{a+b}{ab} = 1 \quad \iff \quad a + b = ab.$$

2.2.11 Quali delle seguenti uguaglianze non valgono?

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{a\cdot b}{c\cdot d},\quad \frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d},\quad \frac{a}{c}\Big/\frac{b}{d}=\frac{a/b}{c/d},\quad \frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c},\quad \frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}.$$

Soluzione. La prima, la terza e la quarta valgono, la seconda e la quinta no. Per rendersi conto che la seconda e la quinta non valgono, basta sostituire ad a, b, c e d il valore 1. Si ottiene

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{1}+\frac{1}{1}=\frac{1+1}{1+1} \quad\Longrightarrow\quad 1+1=\frac{2}{2} \quad\Longrightarrow\quad 2=1 \quad !!!$$

$$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{1+1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}=1+1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{2}=2 \quad !!!$$

2.2.12 Scrivere un'equazione di terzo grado che abbia per soluzioni i numeri -1, 4, $11/3$.

Soluzione. L'equazione è della forma $\alpha(x+1)(x-4)(3x-11)=0$, dove α è una qualunque costante non nulla.

2.2.13 Determinare i valori di x per i quali risulta $x^3+2>0$.

Soluzione. Se x è positivo o nullo, certamente il suo cubo è positivo o nullo e aggiungendo 2 si ha un numero positivo. Se x è negativo, cioè $x=-y$ con $y>0$, è $-y^3+2>0$. Quindi

$$y^3-2<0 \Longleftrightarrow y^3<2 \Longleftrightarrow y<\sqrt[3]{2} \Longleftrightarrow -x<\sqrt[3]{2} \Longleftrightarrow x>-\sqrt[3]{2}.$$

2.2.14 Dati due numeri distinti a e b, determinare due numeri c e d in modo che valga l'identità

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{c}{x+a}+\frac{d}{x+b}.$$

Soluzione. Il secondo membro è

$$\frac{c}{x+a}+\frac{d}{x+b}=\frac{c(x+b)+d(x+a)}{(x+a)(x+b)}=\frac{(c+d)x+cb+da}{(x+a)(x+b)}$$

Uguagliando questa frazione al primo membro si ottengono le due condizioni $c+d=0$ e $cb+da=1$, da cui si ha $c=-d=1/(b-a)$.

2.2.15 Trasformare se possibile le seguenti espressioni in somme di quadrati

$$3x^2-2xy+2y^2, \qquad 3x^2-6xy+2y^2.$$

Soluzione. La prima espressione è ≥ 0 per ogni x e y, la seconda è <0 per alcuni x e y (ad esempio per $x=y=1$), quindi solo la prima espressione potrebbe essere espressa come somma di quadrati per ogni x e y. Si ha

$$3x^2-2xy+2y^2=x^2-2xy+y^2+2x^2+y^2=(x-y)^2+(\sqrt{2}x)^2+y^2.$$

Procedendo in modo più formale, si può imporre che

$$3x^2 - 2xy + 2y^2 = (\alpha x + \beta y)^2 + (\gamma x)^2 + (\delta y)^2$$

per opportune costanti α, β, γ e δ. Imponendo l'uguaglianza si ottiene $\alpha\beta = -1$, $\alpha^2 + \gamma^2 = 3$ e $\beta^2 + \delta^2 = 2$. Quindi l'uguaglinza vale per infinite scelte delle costanti. Se ne può notare una in particolare, quella per cui $\gamma = 0$. In tal caso si ha $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = -1/\sqrt{3}$ e $\delta = \sqrt{(5/3)}$, quindi

$$3x^2 - 2xy + 2y^2 = \left(\sqrt{3}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\,y\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,y\right)^2$$

2.2.16 Eseguire la divisione del polinomo x^4 per il polinomio x^2+1 ed esprimere con una uguaglianza il risultato.

Soluzione. Il quoziente è $x^2 - 1$ e il resto è 1. Quindi $x^4 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + 1$.

2.2.17 Dati due numeri a e b e sapendo che $0 < a \leq b$, in che relazione stanno i numeri $1/a$ e $1/b$?

Soluzione. Risulta $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b} > 0$.

2.2.18 Il lato più lungo di un foglio rettangolare misura k cm. Quale deve essere la misura del lato più corto per fare sì che, dividendo il foglio in due parti uguali con un taglio parallelo al lato più corto ciascuna di queste parti sia simile al foglio iniziale?

Soluzione. Il rapporto fra le misure dei lati del rettangolo iniziale è k/x, dove x è la misura del lato corto. l'analogo rapporto per il rettangolo tagliato è $x/(k/2)$. Imponendo l'uguaglianza si ha $x = k/\sqrt{2}$.

2.2.19 Determinare le soluzioni delle equazioni

$$\sqrt{x^2} = x, \qquad \sqrt{x^2 + 3} = 2x.$$

Soluzione. Ogni $x \geq 0$ soddisfa la prima equazione. Per la seconda equazione, si impone che $x \geq 0$ e si eleva al quadrato, ottenendo $x^2 + 3 = 4x^2$. Questa equazione ha le soluzioni ± 1, ma la soluzione negativa va scartata.

2.2.20 Determinare le soluzioni delle seguenti disequazioni

$$\frac{1}{x} + x > 2, \qquad \frac{1}{\sqrt{x+5}} + 2 \geq 0.$$

Soluzione. Per la prima disequazione, se $x > 0$ si può moltiplicare per x senza cambiare il verso, ottenendo $1 + x^2 > 2x$, cioè $(1 - x)^2 > 0$. In questo caso la disequazione vale per ogni $x > 0$ e $x \neq 1$. Se $x < 0$ occorre cambiare il verso e nessun x verifica la disequazione. Per la seconda disequazione deve essere $x > -5$. Il primo membro è uguale alla somma di due quantità positive, quindi viene positivo qualunque sia $x > -5$.

2.2.21 Determinare sotto quali condizioni su x e y valgono le seguenti uguaglianze

(a) $|x| - |y| = |x - y|$, (b) $|x + y| = |x - y|$, (c) $|x| - |y| = x - y$,
(d) $|x| - |y| = x + y$, (e) $||x| - |y|| = |x + y|$, (f) $|x| - |y| = x - y$,
(g) $||x| - |y|| = x + y$, (h) $||x| - |y|| = x - y$.

Soluzione. Occorre tenere conto del segno di x, di y, di $x - y$ e di $x + y$. In questo modo si divide il piano in 4 quadranti e ciascun quadrante in 2 settori. Si ottiene che:

(a) vale per $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq y$ e per $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x \geq y$,

(b) non vale mai,

(c) vale per $x \geq 0$, $y \geq 0$,

(d) vale per $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x \leq y$,

(e) vale per $x \leq 0$, $y \geq 0$ e per $x \geq 0$, $y \leq 0$,

(f) vale per $x \geq 0$, $y \geq 0$ e per $x \leq 0$, $y \leq 0$,

(g) vale per $x \leq 0$, $y \geq 0$, $-x \leq y$ e per $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x < -y$,

(h) vale per $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \geq y$ e per $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x \leq y$.

2.2.22 Risolvere le seguenti equazioni

(a) $|x| + 1 = |x + 1|$, (b) $|x| - x^2 = ||x| + x|$, (c) $|2 + 3x| = |4 - x|$.

Soluzione. (a) Infinite soluzioni $x \geq 0$. (b) Se $x \geq 0$ l'equazione risulta $x - x^2 = 2x$, la cui soluzione è 0, se $x < 0$ l'equazione risulta $-x - x^2 = 0$, la cui soluzione è -1. Quindi l'equazione ha le due soluzioni -1 e 0. (c) $2 + 3x \geq 0$ per $x \geq -2/3$, $|x - 4| \geq 0$ per $x \leq 4$. Quindi per $x < -2/3$ l'equazione risulta $-2 - 3x = 4 - x$, la cui soluzione è -3, per $-2/3 \leq x < 4$ l'equazione risulta $2 + 3x = 4 - x$, la cui soluzione è 1, per $x \geq 4$ l'equazione risulta $2 + 3x = x - 4$, che non ha soluzione. Quindi l'equazione ha le due soluzioni -3 e 1.

2.2.23 Risolvere la disequazione $x^2 + 2\,|x| - 3 < 0$.

Soluzione. Per $x \geq 0$ la disequazione diventa $x^2 + 2\,x - 3 < 0$. L'equazione $x^2 + 2\,x - 3 = 0$ ha le soluzioni -3 e 1, quindi la disequazione è verificata per $-3 < x < 1$. Ma x deve essere ≥ 0, quindi l'intervallo si riduce a $0 \leq x < 1$. Per $x < 0$ la disequazione diventa $x^2 - 2\,x - 3 < 0$ e, procedendo come sopra, si individua l'intervallo $-1 < x < 0$. Complessivamente la disequazione data vale per $-1 < x < 1$.

2.3 Esercizi proposti

(una sola risposta fra le quattro indicate è corretta)

2.3.1 Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ con p, q, f diversi da 0, allora p è uguale a

(A) $\frac{fq}{q-f}$ (B) $f-q$ (C) $\frac{1}{f} - \frac{1}{q}$ (D) $\frac{f}{q}$

2.3.2 Il prodotto $(p - \sqrt{p^2+1})\,(p + \sqrt{p^2+1})$ è uguale a

(A) 1 (B) $2p^2 - 1$ (C) p^2 (D) -1

2.3.3 Per $x \neq 0$ e $x \neq 1$, l'espressione $\frac{x+2}{x^2-x} - \frac{x+1}{1-x}$ è uguale a

(A) $\frac{x^2+2}{x^2-x}$ (B) $\frac{-x^2+2x+2}{x^2-x}$ (C) $\frac{2-x^2}{x^2-x}$ (D) $\frac{x^2+2x+2}{x^2-x}$

2.3.4 A quale espressione $p^{-1}q^{-1}(q+2p)$ è equivalente per valori di p e q diversi da zero

$A)$ $\frac{1}{p} + \frac{2}{q}$ (B) $\frac{1}{p} + 2$ (C) $\frac{q}{p} + \frac{2p}{q}$ (D) $\frac{q}{p} + \frac{2}{q}$

2.3.5 La media aritmetica di due numeri s e t è $2/3$. Allora t è uguale a

(A) $(4-2s)/3$ (B) $(3-2s)/2$ (C) $(4-3s)/2$ (D) $(4-3s)/3$

2.3.6 Sommando i quadrati di due numeri a e b si ottiene 58. Si sa inoltre che $ab = -21$. Allora $(a-b)^2$ è uguale a

(A) 16 (B) 79 (C) 100 (D) 36

2.3.7 È dato il polinomio $p(a) = a^3 - a^2 - 3a + 1$. Allora $p(\sqrt{2})$ è uguale a

(A) $-1+\sqrt{2}$ (B) $3-\sqrt{2}$ (C) $-1-\sqrt{2}$ (D) $3+\sqrt{2}$

2.3.8 Il polinomio $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ si annulla in -4, -2, 1 e 2. Allora il termine noto d è uguale a

(A) 16 (B) -16 (C) 4 (D) -4

2.3.9 Gli zeri del polinomio $p(x) = x^2 + ax + b$ sono -1 e 2. Allora $p(7)$ vale

(A) 35 (B) 42 (C) 54 (D) 40

2.3.10 Le soluzioni dell'equazione $1 + 3x - 2x^2 = 0$ sono

(A) $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ (B) $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4}$ (C) $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$ (D) $\frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$

2.3.11 Una sola delle seguenti equazioni ha soluzioni reali. Quale?

(A) $x^2 - 3x + 3 = 0$ (B) $x^2 - 5x + 5 = 0$ (C) $x^2 - 5x + 7 = 0$
(D) $x^2 - 4x + 6 = 0$

2.3.12 Per un fissato valore di k si sa che il polinomio $p(x) = x^2 - 3x + k$ ha un'unica radice. Quale delle seguenti condizioni è vera?

(A) $1 < k < 2$ (B) $2 < k < 3$ (C) $-2 < k < -1$ (D) $0 < k < 1$

2.3.13 L'allungamento x di una corda soddisfa la condizione $kx^2/2 - gx - 2g = 0$ con g, $k > 0$. Posto $c = k/g$, si ha che x vale

(A) $\dfrac{1+\sqrt{1+4cg}}{2cg}$ (B) $\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{c}$ (C) $\dfrac{1+\sqrt{1+4cg}}{cg}$
(D) $\dfrac{1+\sqrt{1+4c}}{2c}$

2.3.14 È data l'equazione $x^2/2 + 3x + 2 = 0$. La più grande delle sue soluzioni è

(A) $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{4}$ (B) $\dfrac{3+\sqrt{13}}{4}$ (C) $\sqrt{5} - 3$ (D) $-3 + 2\sqrt{5}$

2.3.15 Un appartamento è costituito da cucina-soggiorno, due camere, bagno e corridoio. Il bagno, come il corridoio, misura 5 m^2, le camere occupano la metà dell'appartamento, la cucina-soggiorno ha estensione pari a quella del bagno insieme alla metà di quella totale delle camere. Di quanti m^2 è l'appartamento?

(A) 65 (B) 75 (C) 60 (D) 70

2.3.16 Sia b un numero diverso da zero. Se a è il triplo di b e c è la metà di b, qual è il rapporto tra $3c$ e $2a$

(A) 1/6 (B) 1/2 (C) 1/4 (D) 3/2

2.3.17 È dato il sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ x^2y^2 = 1, \end{cases}$$

Quante sono le sue soluzioni reali, cioè le coppie (a, b) di numeri reali che verificano entrambe le equazioni?

(A) 8 (B) 2 (C) 0 (D) 4

2.3.18 Quale delle seguenti disuguaglianze è vera per ogni numero d maggiore di -2 e diverso da zero?

(A) $d^3 > -2d^2$ (B) $-1 + d < -3$ (C) $2d < -4$ (D) $d^2 < -2d$

2.3.19 Per quali valori di p la disequazione $px^2 - 4p^4 \geq 0$ non ammette soluzioni reali

(A) $p \geq 0$ (B) $p \leq 0$ (C) $p < 0$ (D) $p > 0$

2.3.20 Dato $a > 0$, la disequazione $\sqrt{a} < a$ è verificata

(A) per ogni a (B) per $a > 1$ (C) per $a < 1$ (D) per $a > 1/2$

2.3.21 La doppia disequazione $4 < x^2 < 9$ è verificata

(A) solo per $2 < x < 3$ (B) solo per $-2 < x < 3$
(C) solo per $-3 < x < 3$ (D) nessuna delle risposte precedenti è esatta

2.3.22 Sia $a < 0$, per quali valori di x si ha $\dfrac{a}{2-x} > 0$?

(A) $x > 2$ (B) $x < 2$ (C) $x \neq 2$ (D) dipende dal valore di a

2.3.23 Si indichi l'insieme delle soluzioni della disequazione $|x| < 2x + 3$

(A) $x > -1$ (B) $x > 0$ (C) $x < -1$ (D) $-1 < x < 0$

2.3.24 Se $a > 0$ è un numero fissato, dire quale tra i seguenti è l'insieme delle soluzioni della disequazione $a^2 - ax^2 > 0$.

(A) L'insieme dei numeri reali x tali che $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$
(B) L'insieme dei numeri reali x tali che $x < -\sqrt{a}$ oppure $x > \sqrt{a}$
(C) L'insieme dei numeri reali x tali che $-0 < x < \sqrt{a}$
(D) L'insieme vuoto

2.3.25 Se $c < 0$, l'insieme S delle soluzioni della disequazione $cx^2 - x > 0$ è

(A) $S = (0, -1/c)$ (B) $S = (1/c, 0)$ (C) $S = (-\infty, 0) \cup (1/c, +\infty)$
(D) $S = (-\infty, 1/c) \cup (0, +\infty)$

2.3.26 L'insieme delle soluzioni della disequazione $x + \sqrt{x+1} < 11$ è

(A) $[-1, 8)$ (B) $[-1, 0)$ (C) $(8, 11)$ (D) $(-\infty, 8) \cup (15, +\infty)$

2.3.27 L'insieme delle soluzioni della disequazione $\dfrac{x}{1-x^2} \geq 0$ è

(A) $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ (B) $(-1, 1)$ (C) $[0, 1)$ (D) $(-\infty, -1) \cup [0, 1)$

2.3.28 L'insieme delle soluzioni della disequazione $\left|\dfrac{x^2-1}{x}\right| \geq 0$ è

(A) $x \neq 0$ (B) $x \neq \pm 1$ (C) $[-1, 0) \cup (0, 1]$ (D) $x \neq \{-1, 0, 1\}$

2.3.29 Sia c un numero positivo assegnato. Qual è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di disequazioni?

$$\begin{cases} x^2 - 4c^2 \leq 0, \\ |x| - c \geq 0, \end{cases}$$

(A) $(-\infty, -2c] \cup [2c, +\infty)$ (B) $[-c, c]$ (C) $[c, 2c]$
(D) $[-2c, -c] \cup [c, 2c]$

Capitolo 3

Geometria

3.1 Richiami di teoria

Tutti i corpi che cadono sotto i nostri sensi, quando si prescinda dalla loro composizione materiale e dalle loro proprietà fisiche, destano in noi l'idea di altrettante figure, che si distinguono le une dalle altre per le loro proprietà di forma e di estensione; ed è appunto di queste proprietà delle figure che si occupa la *geometria*.

3.1.1 La geometria euclidea

Secondo Euclide, gli enti fondamentali della geometria sono il *punto*, la *retta* e il *piano* che non vengono definiti esplicitamente ma attraverso *postulati*. I postulati descrivono proprietà che l'intuizione e l'esperienza riconoscono evidenti per se stesse e dai postulati si deducono teoremi che descrivono proprietà di enti più complicati, introdotti per mezzo di definizioni. Molte di queste proprietà sono passate nel linguaggio comune e vengono acquisite già nella scuola inferiore, quindi non vale la pena riportarle qui. Riguardano segmenti, angoli, rette perpendicolari e parallele, triangoli, quadrati, rettangoli, cerchi, ecc. Ciononostante, fra i problemi proposti nei test di accesso vi sono sempre alcuni esercizi riguardanti la geometria euclidea. Per questo, elenchiamo qui alcune definizioni e proprietà che sono utili per risolvere questo tipo di esercizi, evitando una esposizione completa o anche solo logicamente coerente.

A partire da un *ordinamento* assegnato su una retta si definisce la *semiretta* e il *segmento*. Dall'intersezione di due rette si definisce l'*angolo*, e quindi l'angolo *giro*, l'angolo *piatto*, l'angolo *retto*, l'angolo *acuto*, l'angolo *ottuso*. Due angoli possono essere *adiacenti*, *opposti al vertice*, *supplementari*, *complementari*.

Due rette che si tagliano in modo da formare quattro angoli uguali si dicono *perpendicolari*. I quattro angoli sono retti. Per un punto di una retta data si può tracciare una sola perpendicolare ad essa. Per un qualsiasi punto del piano si può tracciare una sola perpendicolare ad una retta data. Dati un punto A e una retta non passante per esso, la perpendicolare abbassata dal punto alla retta (detta *distanza* di A dalla retta) è minore di ogni *obliqua* (cioè non perpendicolare) condotta dallo stesso punto alla retta.

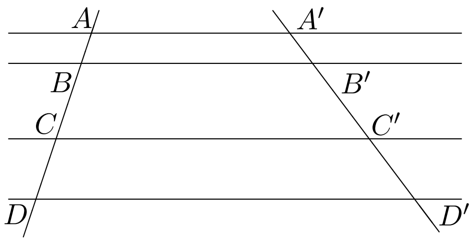
L'*asse* di un segmento è la perpendicolare al segmento passante per il punto medio del segmento. Quindi l'asse è il luogo dei punti che hanno uguale distanza dagli estremi del segmento.

La *bisettrice* di un angolo è il luogo dei punti che hanno uguale distanza dai lati dell'angolo.

Due rette di uno stesso piano che non hanno punti comuni si dicono *parallele*. Si definisce *distanza* fra le rette la distanza di un punto qualsiasi di una di esse dall'altra. Nel piano tutte le rette perpendicolari ad una retta data sono parallele fra loro. Per ogni punto non giacente su di una data retta si può tracciare *almeno* una parallela alla retta.

Quest'ultima proprietà è dimostrabile a partire dai postulati ammessi inizialmente. Quello che invece non si può dimostrare è l'unicità della parallela. Da qui l'importantissino *5^o postulato di Euclide*: "Per ogni punto non giacente su di una data retta passa una e una sola parallela alla retta". Se questo postulato viene modificato si ottengono geometrie diverse da quella euclidea, dette geometrie *non euclidee*.

Dato un *fascio* di rette parallele e due rette *trasversali*, valgono le proprietà (*teorema di Talete*): "A segmenti uguali su una trasversale corrispondono segmenti uguali sull'altra. I segmenti intercettati su una trasversale e quelli intercettati sull'altra trasversale costituiscono due classi di grandezze *proporzionali*".



$$AB \ : \ CD \ = \ A'B' \ : \ C'D'$$

Un *poligono* è una figura delimitata da una linea spezzata chiusa. I segmenti che compongono la spezzata si chiamano *lati* e i punti in comune a due lati consecutivi si chiamano *vertici*. Fra i poligoni si definiscono: il *triangolo* (tre vertici), il *quadrangolo* (o *quadrilatero*) (quattro vertici), il *pentagono* (cinque vertici), l'*esagono* (sei vertici), e così via.

In un poligono si chiamano *diagonali* i segmenti che uniscono vertici non consecutivi. Problema: quante diagonali ha un poligono di n vertici?

Quadrangoli notevoli:

- Un quadrangolo avente due lati (e solo due) paralleli è chiamato *trapezio*. In un trapezio i due lati paralleli sono chiamati *base maggiore* e *base minore* ed è chiamata *altezza* la distanza fra le due basi.

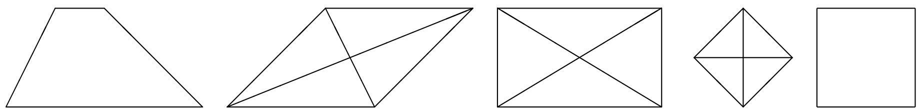
- Un quadrangolo avente i lati opposti paralleli è chiamato *parallelogramma*. In un parallelogramma gli angoli opposti sono uguali, i lati opposti sono uguali, le diagonali si dividono a metà. In un parallelogramma ogni lato può essere considerato una base e l'*altezza* relativa a quella base è la distanza dal lato opposto.

– Un parallelogramma avente tutti gli angoli retti è chiamato *rettangolo*. In un rettangolo le diagonali sono uguali.

– Un parallelogramma avente tutti i lati uguali è chiamato *rombo*. In un rombo le diagonali sono perpendicolari e dividono gli angoli a metà.

– Un parallelogramma avente tutti i lati uguali e tutti gli angoli retti è chiamato *quadrato*.

– Un poligono è detto *convesso* se i suoi lati non si intrecciano. Un poligono convesso è detto *regolare* se ha tutti i lati uguali fra loro e tutti gli angoli uguali fra loro. Quindi in un poligono regolare si può inscrivere una circonferenza. Il raggio di tale circonferenza è chiamato *apotema* e il rapporto tra apotema e lato dipende solo dal numero dei lati.



Due figure si dicono uguali quando, sovrapposte mediante un movimento rigido, coicidono punto a punto. Quindi due figure uguali hanno la stessa estensione. Però è evidente che due figure possono avere la stessa estensione pur non avendo la stessa forma. Si è così condotti a sostituire al criterio di uguaglianza di forma di due figure un criterio più generale di uguaglianza di estensione di due superfici, definendo *equivalenti* due superfici che hanno la stessa estensione. Si tratta di un'effettiva relazione di equivalenza che gode delle proprietà simmetrica, riflessiva e transitiva.

Il caso più semplice di equivalenza di due superfici è quello della equiscomponibilità, a cui si riconduce in gran parte l'equivalenza fra poligoni.

– Due parallelogrammi aventi uguali una base e la relativa altezza sono equivalenti.

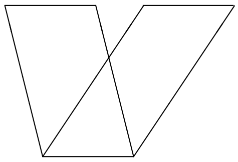
– Un triangolo, in cui si sia preso un lato qualsiasi come base è equivalente ad un parallelogramma che ha la stessa altezza e metà base.

– Due triangoli aventi uguali una base e la relativa altezza sono equivalenti.

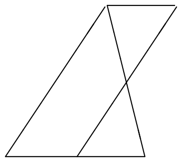
– La somma di più triangoli aventi la stessa altezza è equivalente ad un unico triangolo avente la stessa altezza e come base la somma delle basi dei triangoli dati.

– Un trapezio è equivalente ad un triangolo di uguale altezza avente come base la somma delle basi del trapezio.

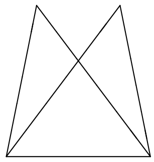
– Un poligono regolare è equivalente a un triangolo avente come base il perimetro del poligono e come altezza l'apotema.



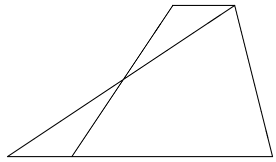
parallelogrammi equivalenti



triangolo e parallelogramma equivalenti



triangoli equivalenti



triangolo e trapezio equivalenti

Superfici piane equivalenti hanno *aree* (cioè misure, rispetto a una prefissata unità di misura) uguali.

– Area di un rettangolo = base per altezza.

– Area di un triangolo = base per altezza / 2.

– Area di un trapezio = semisomma delle basi per altezza.

– Area di un poligono regolare = perimetro per apotema / 2.

Passando a trattare in dettaglio i triangoli, si definisce il triangolo *isoscele*, il triangolo *equilatero*, il triangolo *rettangolo*. Ci sono tre *criteri di uguaglianza* dei triangoli, di cui il primo è in realtà un postulato e gli altri due sono dimostrabili a partire dal primo.

1^o criterio: due triangoli, aventi rispettivamente uguali un angolo e i lati che lo comprendono, sono uguali.

2^o criterio: due triangoli, aventi rispettivamente uguali due angoli e il lato tra essi compreso, sono uguali.

3^o criterio: due triangoli, aventi rispettivamente uguali i tre lati, sono uguali.

In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono uguali e viceversa, un triangolo che ha due angoli uguali ha uguali anche i lati opposti e quindi è isoscele. In un triangolo equilatero tutti gli angoli sono uguali e viceversa, un triangolo che ha i tre angoli uguali è equilatero. Fra gli elementi di un triangolo si possono anche stabilire delle disuguaglianze. Se due lati sono disuguali, l'angolo opposto al lato maggiore è più grande di quello opposto al lato minore, e viceversa. Inoltre un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

Conseguenze importanti del 5^o postulato riguardano la somma degli angoli di un triangolo e in generale dei poligoni: la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale a un angolo piatto. Ogni angolo esterno è uguale alla somma degli angoli interni non adiacenti ad esso. La somma degli angoli interni di un qualsiasi poligono è uguale a tanti angoli piatti quanti sono i vertici meno due. Problema: a quanti angoli piatti è uguale la somma degli angoli esterni di un qualsiasi poligono?

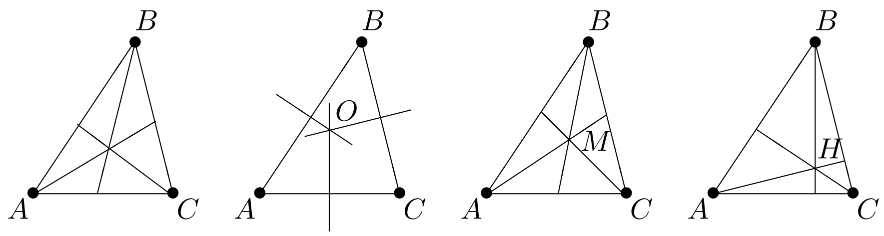
Un triangolo ha tre altezze, tre assi relativi ai tre lati e tre bisettrici degli angoli. Inoltre ha tre mediane, dove per *mediana* relativa ad un lato si intende il segmento congiungente il punto medio del lato con il vertice opposto.

- I tre assi di un triangolo passano tutti per uno stesso punto, il *circumcentro*, cioè il centro della circonferenza circoscritta al triangolo.

- Le tre bisettrici di un triangolo passano tutte per uno stesso punto, l'*incentro*, cioè il centro della circonferenza inscritta al triangolo. La bisettrice di ciascun angolo divide il lato opposto in parti proporzionali agli altri due lati, e viceversa.

- Le tre altezze di un triangolo passano tutte per uno stesso punto, detto *ortocentro*.

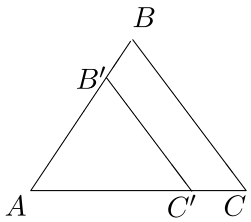
- Le tre mediane di un triangolo passano tutte per uno stesso punto, detto *baricentro*. Il baricentro divide ciascuna mediana in due parti, di cui quella che ha come estremo il vertice è doppia dell'altra.



bisettrici incentro | assi circumcentro | mediane baricentro | altezze ortocentro

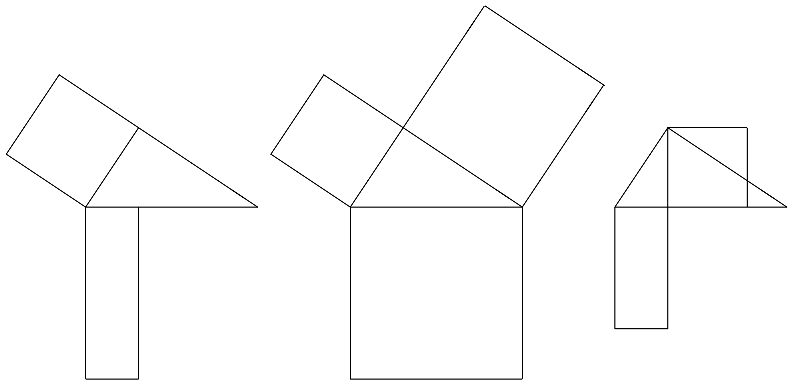
Il circumcentro O, il baricentro M e l'ortocentro H di un triangolo giacciono in questo ordine su una retta, detta *retta di Eulero*, e le loro distanze soddisfano la relazione $MH = 2\,MO$.

Se due triangoli hanno ordinatamente uguali gli angoli, i lati dell'uno sono ordinatamente proporzionali a quelli dell'altro. I due triangoli sono detti *simili*. Triangoli aventi un angolo uguale e i due lati che lo comprendono proporzionali sono simili.



$$AB \;:\; AB' \;=\; AC \;:\; AC'$$

Sono importanti i teoremi riguardanti i triangoli rettangoli:
1^o teorema di *Euclide*: "il quadrato di un cateto è equivalente al rettangolo della sua proiezione sull'ipotenusa e dell'intera ipotenusa".
Teorema di *Pitagora*: "il quadrato dell'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati dei due cateti".
2^o teorema di *Euclide*: il quadrato dell'altezza relativa all'ipotenusa è equivalente al rettangolo delle proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa".



1^o T. di Euclide   T. di Pitagora 2^o T. di Euclide

Per mezzo del teorema di Pitagora è possibile dimostrare la formula di *Erone* che esprime l'area S di un triangolo qualsiasi di lati a, b e c:

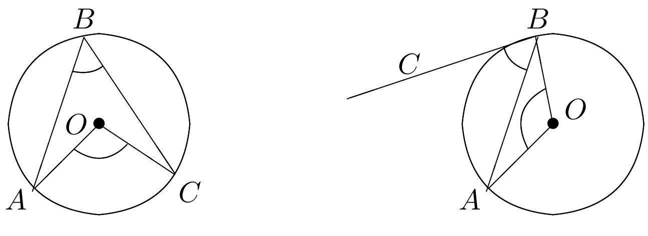
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad \text{dove } p = \frac{a+b+c}{2} \text{ è il semiperimetro.}$$

Passando a trattare il cerchio, si definiscono la *circonferenza*, il *centro*, il *raggio*, il *diametro*, la *corda*, l'*arco circolare* e il *settore circolare*. Si distinguono gli *angoli al centro* e quelli *alla circonferenza*.

Una retta non può avere con una circonferenza più di due punti comuni. Per tre punti non allineati passa una circonferenza e una sola. Ogni diametro è maggiore di qualsiasi altra corda.

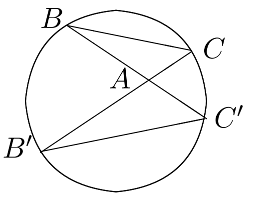
Dati su un piano un cerchio di centro O e raggio r e una retta avente distanza d da O, se $d < r$ la retta interseca il cerchio secondo una corda, se $d = r$ la retta ha in comune con il cerchio solo un punto della circonferenza e viene detta *tangente*, se $d > r$ la retta e il cerchio non hanno punti comuni.

Per ogni punto A di una circonferenza si può tracciare un'unica tangente che è perpendicolare al diametro passante per A.

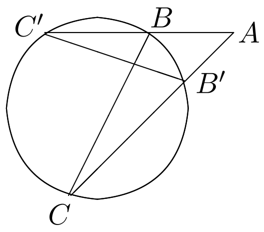


Ogni angolo alla circonferenza è uguale alla metà del corrispondente angolo al centro (figura a sinistra). La proprietà vale anche per l'angolo formato dalla tangente (figura a destra). Angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco (o su archi uguali) sono uguali, e viceversa. Ogni angolo inscritto in una semicirconferenza è retto.

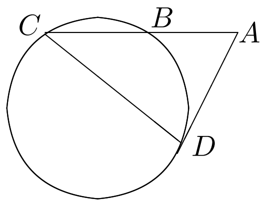
Se da un punto interno ad una circonferenza si conducono due corde, i segmenti in cui le corde sono divise dal punto sono in proporzione. Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono due secanti, i segmenti che sulle secanti risultano compresi fra il punto dato e le intersezioni con la circonferenza sono in proporzione. Se da un punto esterno ad una circonferenza si conducono una secante e una tangente, il segmento di tangente compreso fra il punto dato e il punto di contatto è medio proporzionale fra i due segmenti di secante compresi fra il punto dato e le intersezioni con la circonferenza.



$AB : AB' = AC : AC'$



$AB : AB' = AC : AC'$



$AB : AD = AD : AC$

Le misure riguardanti circonferenze e cerchi non possono fare riferimento all'equivalenza come si fa per i poligoni, per cui si usano tecniche di tipo diverso. Data una circonferenza, esistono due poligoni, uno circoscritto e l'altro inscritto, tali che la differenza fra i loro perimetri sia minore di una lunghezza prefissata e la differenza fra le loro aree sia minore di una quantità prefissata. Quindi esiste un unico segmento che sia minore dei perimetri di tutti i poligoni circoscritti e maggiore dei perimetri di tutti i poligoni inscritti. La lunghezza di questo segmento è la *lunghezza della circonferenza*.

Si dimostra che le lunghezze delle circonferenze sono proporzionali ai diametri. Indicando con π la costante di proporzionalità, la lunghezza della circonferenza è uguale a $2\pi r$, l'area del cerchio è πr^2, la lunghezza di un arco circolare di angolo α (in radianti) è $\alpha\, r$.

3.1.2 La geometria analitica

La geometria analitica nacque nel '600, soprattutto ad opera di Cartesio. Grazie ad essa gli enti della geometria vennero tradotti in espressioni matematiche. Si poterono così risolvere, usando il puro calcolo algebrico che si era venuto sviluppando nei due secoli precedenti, i tradizionali problemi geometrici, anche quelli di fronte ai quali si era dovuto arrendere l'ingegno dei Greci.

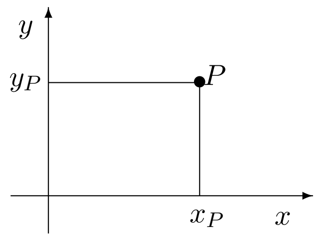
Il metodo analitico in geometria presuppone che sia stato introdotto il concetto di *retta orientata*, su cui sia stata definita una *misura*. Quindi ad ogni segmento delle retta viene associata una corrispondente misura con segno, che sarà + se l'orientamento del segmento coincide con quello della retta, - in caso opposto.

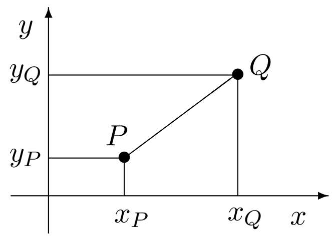
- Si definisce *asse cartesiano* una retta su cui è definito un *verso*, un punto detto *origine* e un segmento detto *unità di misura*. In questo modo si stabilisce una corrispondenza biunivoca fra i punti A della retta e l'insieme dei numeri reali. Il numero reale x_A corrispondente ad A viene detto *ascissa* di A.

– La *misura* del segmento orientato AB risulta $AB = x_B - x_A$. Se il segmento non è orientato, la sua misura, detta *lunghezza*, risulta $|x_B - x_A|$.

– Si definisce *piano cartesiano* un piano su cui sono assegnati due assi cartesiani incidenti. Se i due assi sono perpendicolari si dice che sul piano è stato definito un *riferimento ortogonale*. Ad ogni punto P del piano vengono associate le due proiezioni x_P e y_P sui due assi, dette *ascissa* e *ordinata* di P. Quindi i punti del piano vengono messi in corrispondenza con le coppie di numeri reali. Questa corrispondenza viene definita *metodo delle coordinate*.

– La *lunghezza* del segmento PQ risulta $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$.





La *geometria analitica* consiste nella descrizione e soluzione di problemi geometrici mediante la trasformazione delle questioni geometriche in questioni analitiche (cioè algebriche) tramite il metodo delle coordinate.

Strumento essenziale della geometria analitica è la rappresentazione grafica delle equazioni. Sia $\phi(x, y) = 0$ un'equazione che descrive il luogo dei punti che soddisfano a certe condizioni. Per esempio, l'equazione $x^2 + y^2 = 1$ descrive l'insieme dei punti la cui distanza dall'origine è uguale a 1. L'equazione fornisce la *rappresentazione analitica* del luogo dei punti, mentre la corrispondente figura sul piano cartesiano ne dà la rappresentazione geometrica.

Il primo caso che consideriamo è quello in cui ϕ è una funzione lineare, cioè di primo grado, in x e y

$$\phi(x, y) = ax + by + c = 0.$$

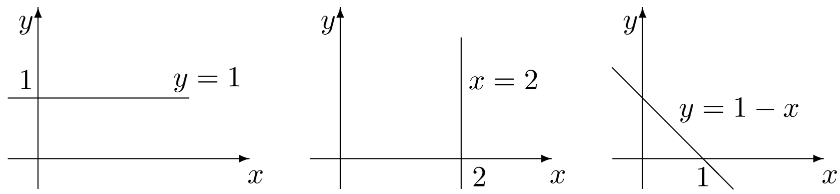
– Se $a = 0$ e $b \neq 0$, l'equazione si esplicita con $y = m$ e rappresenta una retta parallela all'asse x.

– Se $b = 0$ e $a \neq 0$, l'equazione si esplicita con $x = m$ e rappresenta una retta parallela all'asse y.

– Se $a, b \neq 0$, l'equazione si può esplicitare indifferentemente rispetto a x o a y e rappresenta una retta obliqua rispetto agli assi. Supponiamo di esplicitare rispetto a x. Allora l'equazione della retta risulta

$$y = mx + p.$$

m è detto *coefficiente angolare*, p è detto *termine noto* e rappresenta l'*ordinata all'origine*.



– Se invece di una retta si deve descrivere una semiretta o un segmento, basta delimitare l'insieme di variabilità della x. Ad esempio, la semiretta bisettrice del primo quadrante è $y = x$, $x \geq 0$, e il segmento delimitato dai punti $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ sulla retta $y = mx$ è indicato con $y = mx$, $x_P \leq x \leq x_Q$.

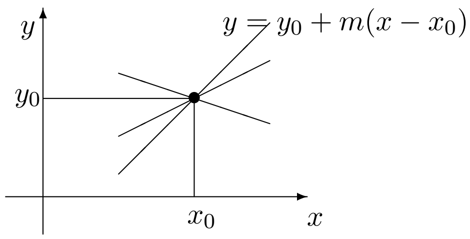
– Condizione di parallelismo di due rette $y = m_1x + p_1$ e $y = m_2x + p_2$ è che esse abbiano lo stesso coefficiente angolare, cioè $m_2 = m_1$.

– Due rette non parallele sono incidenti. Il punto di intersezione ha coordinate che soddisfano entrambe le equazioni, cioè risolvono il sistema

$$\begin{cases} y = m_1x + p_1, \\ y = m_2x + p_2, \end{cases} \quad \text{con} \quad m_1 \neq m_2.$$

– Per trovare rette che soddisfano a condizioni particolari basta imporre che i coefficienti dell'equazione generica verifichino le condizioni richieste. Per esempio:

1. Determinare una retta che passa per un punto (x_0, y_0) assegnato. Imponendo che $y_0 = mx_0 + p$, si ricava che $p = y_0 - mx_0$, per cui la retta richiesta ha equazione $y = y_0 + m(x - x_0)$ (si tratta di un fascio di rette passanti per (x_0, y_0)). Una retta particolare di questo fascio viene individuata imponendo un'altra condizione che definisca il coefficiente angolare, per esempio che sia parallela o perpendicolare ad un'altra retta, oppure che sia tangente in un punto ad una curva, o altro.

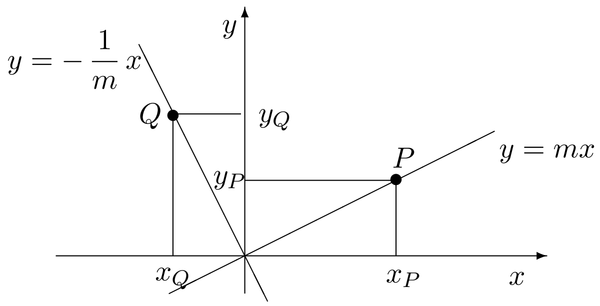


2. Determinare la retta passante per due punti x_0, y_0 e x_1, y_1 assegnati. Imponendo che
$$\begin{cases} y_0 = mx_0 + p, \\ y_1 = mx_1 + p, \end{cases}$$
si ricava la retta $\quad y = y_0 + \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$

3. Assegnata una retta passante per l'origine di equazione $y = mx$, con $m \neq 0$, determinare la retta ad essa perpendicolare nell'origine. La retta data passa per i punti $O = (x_0, y_0) = (0, 0)$ e $P = (x_P, y_P) = (x_P, mx_P)$, mentre la retta perpendicolare deve passare per i punti O e $Q = (x_Q, y_Q) = (-y_P, x_P)$. Questa retta ha l'equazione

$$y = y_0 + \frac{y_Q - y_0}{x_Q - x_0}(x - x_0) = \frac{y_Q}{x_Q}\, x = -\frac{x_p}{y_p}\, x = -\frac{1}{m}\, x.$$

Quindi il prodotto dei coefficienti angolari di due rette perpendicolari è uguale a -1. Le due rette possono essere traslate se è richiesto che siano perpendicolari in un altro punto diverso dall'origine.



Passiamo ora a considerare il caso di una funzione ϕ di grado 2 in x e y

$$\phi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0. \tag{3.1}$$

Le curve descritte da queste equazioni sono dette *coniche*. Le coniche sono state trattate in modo sistematico già da Apollonio di Perga, che fu con Euclide e Archimede uno dei massimi matematici dell'età ellenistica. Lo studio con gli strumenti della geometria analitica è molto più semplice che quello sintetico, come fatto da Apollonio.

Alcune coniche sono *degeneri*, ed esattamente quelle in cui il luogo dei punti (x, y) che soddisfano l'equazione $\phi(x, y) = 0$

– è vuoto. Per esempio $\phi(x, y) = x^2 + y^2 + 1 = 0$.

– è costituito da un solo punto. Per esempio $\phi(x, y) = x^2 + y^2 = 0$.

– è formato da una coppia di rette. Per esempio $\phi(x, y) = x^2 - y^2 = 0$, che è formato dalle rette $y = x$ e $y = -x$. Questo è il caso in cui la funzione ϕ è esprimibile come prodotto di fattori lineari.

Per le coniche non degeneri si distinguono tre diversi casi, a seconda che $b^2 - 4ac = 0$, $b^2 - 4ac > 0$ oppure $b^2 - 4ac < 0$. Per mettere in evidenza le proprietà delle corrispondenti curve, si usa fare degli opportuni cambiamenti di coordinate, in modo da annullare alcuni coefficienti e semplificare l'indagine.

– Se $b^2 - 4ac = 0$, la (3.1) viene trasformata in una equazione della forma

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,$$

che rappresenta una parabola avente il vertice nel punto $V = (-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha})$ e per asse la retta $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$, parallela all'asse delle y. Per cercare le intersezioni della parabola con una retta di equazione $y = mx + q$ si mettono a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \\ y = mx + q, \end{cases}$$

ottenendo l'equazione di 2° grado

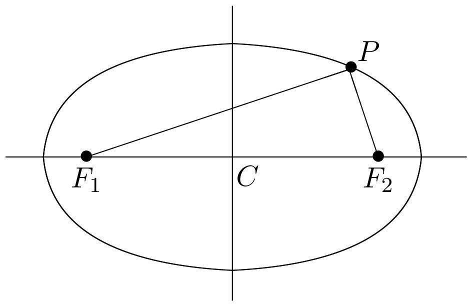
$$\alpha x^2 + (\beta - m)x + \gamma - q = 0.$$

Se questa equazione ha due soluzioni distinte, la retta interseca la parabola in due punti distinti, se ha due soluzioni coincidenti la retta è tangente alla parabola, se non ha soluzioni la retta non interseca la parabola.

– Se $b^2 - 4ac > 0$, la (3.1) viene trasformata in una equazione della forma

$$\alpha(x - x_0)^2 + \beta(y - y_0)^2 = \gamma, \quad \text{con} \quad \alpha, \beta > 0.$$

Se $\gamma > 0$ l'equazione rappresenta un'ellisse, cioè il luogo dei punti P per i quali è costante la somma delle distanze da due punti F_1 e F_2 assegnati, detti *fuochi*. Il centro dell'ellisse è il punto $C = (x_0, y_0)$ e gli assi dell'ellisse sono paralleli agli assi coordinati. I due fuochi F_1 e F_2 stanno sull'asse orizzontale se $\alpha < \beta$, sull'asse verticale altrimenti. Se $\gamma < 0$ l'ellisse è immaginaria.



Nel caso particolare che $\alpha = \beta$ e $\gamma > 0$, l'equazione può essere scritta nella forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad \text{con} \quad r > 0,$$

e rappresenta la circonferenza di centro C e raggio r. Per determinare i punti comuni ad una circonferenza e ad una retta di equazione $y = mx + p$ si mettono a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \\ y = mx + p, \end{cases}$$

ottenendo l'equazione di 2° grado

$$(x - x_0)^2 + (mx + p - y_0)^2 - r^2 = 0.$$

Se questa equazione ha due soluzioni distinte, la retta interseca la circonferenza in due punti distinti, se ha due soluzioni coincidenti la retta è tangente alla circonferenza, se non ha soluzioni la retta non interseca la circonferenza.

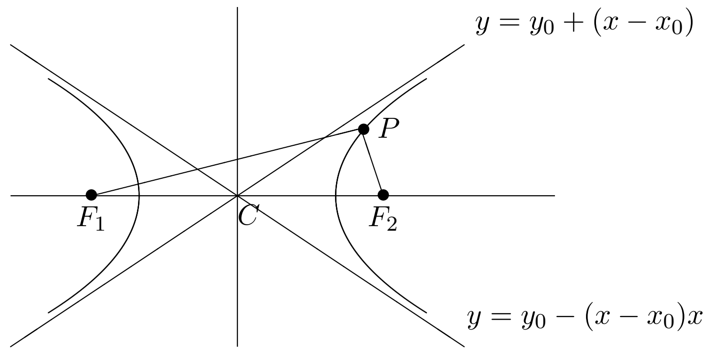
– Se $b^2 - 4ac < 0$, la (3.1) viene trasformata in una equazione della forma

$$\alpha(x - x_0)^2 - \beta(y - y_0)^2 = \gamma, \quad \text{con} \quad \alpha, \beta > 0,$$

che rappresenta un'iperbole, cioè il luogo dei punti P per i quali è costante la differenza (in modulo) delle distanze da due punti F_1 e F_2 assegnati, detti *fuochi*. Il centro dell'iperbole è il punto $C = (x_0, y_0)$. I due fuochi F_1 e F_2 stanno sull'asse orizzontale se $\gamma(\alpha - \beta) < 0$, sull'asse verticale altrimenti. L'iperbole è formata da due rami separati. Ad esempio, nel caso $\beta > \alpha$ e $\gamma > 0$, l'iperbole esiste solo per $(x - x_0)^2 > \gamma/\alpha$ e dall'equazione si ottiene

$$y = y_0 \pm s\,z, \quad \text{dove} \quad s = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \quad z = \sqrt{(x - x_0)^2 - \frac{\gamma}{\alpha}} \quad \text{e} \quad |z| < |x - x_0|.$$

Le due rette $y = y_0 + s\,(x - x_0)$ e $y = y_0 - s\,(x - x_0)$ sono dette *asintoti*. Il grafico dell'iperbole nel primo quadrante si trova al di sotto del grafico della retta $y = y_0 + s\,(x - x_0)$, e vi si avvicina indefinitamente al cresce di x. In modo analogo negli altri quadranti.



Nel caso particolare $\alpha = \beta$ gli asintoti sono ortogonali e l'iperbole è detta *equilatera*.

3.2 Esercizi svolti

(per semplicità nel seguito useremo la stessa notazione sia per indicare i segmenti che le loro misure e non indicheremo esplicitamete l'unità di misura)

3.2.1 Assegnati tre segmenti le cui lunghezze misurano rispettivamente a, b e c, esiste sempre un triangolo che li ammette come lati?

Soluzione. No, ci sono delle limitazioni da rispettare: ciascun segmento deve essere minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.

3.2.2 Un punto P è scelto a caso all'interno di un triangolo equilatero. Da esso si tracciano le perpendicolari ai lati. Quanto vale la somma di queste perpendicolari?

Soluzione. Sia a il lato del triangolo. Il triangolo risulta decomposto in tre sottotriangoli, ciascuno avente per base uno dei lati e P come vertice opposto. Indicate con p_1, p_2 e p_3 le perpendicolari, l'area S del triangolo equilatero risulta uguale alla somma delle aree dei tre sottotriangoli, quindi $S = a\,(p_1 + p_2 + p_3)/2$. D'altra parte $S = a\,h/2$, dove h è l'altezza del triangolo equilatero. Quindi $p_1 + p_2 + p_3 = h$.

3.2.3 È dato il triangolo ABC di lati $AC = 24$, $BC = 10$ e $AB = 26$. Quanto vale il raggio r del cerchio inscritto?

Soluzione. I tre lati del triangolo sono tangenti al cerchio inscritto. Indicato con O il centro del cerchio, si vede che il triangolo risulta decomposto in tre sottotriangoli, ciascuno avente per base uno dei lati e O come vertice opposto. Quindi l'altezza di ciascun sottotriangolo è pari al raggio r. Ne segue che l'area S del triangolo ABC è data dalla somma delle aree dei tre sottotriangoli, cioè $S = (AC + BC + AB)\,r/2$. Nel nostro caso $S = 30\,r$. D'altra parte, con la formula di Erone si trova che l'area S è 120. Ne segue che $r = 4$.

3.2.4 In un triangolo ABC rettangolo in C sia D il punto medio di AB ed E il punto in cui l'asse del lato AB incontra un cateto. Se $AB = 20$ e $AC = 12$, determinare l'area del quadrilatero $ADEC$.

Soluzione. È $DB = 10$. Con il teorema di Pitagora si trova che $CB = 16$. Il triangolo EDB è simile al triangolo ACB, quindi $ED : AC = DB : CB$, da cui $ED = 12 \cdot 10/16 = 15/2$. I lati ED e DB sono i cateti di un triangolo rettangolo, la cui area è perciò $S_1 = ED \cdot DB/2$. L'area del triangolo dato è $S = AC \cdot CB/2$, quindi l'area del quadrilatero $ADEC$ è

$$S_2 = S - S_1 = \frac{AC \cdot CB - ED \cdot DB}{2} = \frac{12 \cdot 16 - 15/2 \cdot 10}{2} = \frac{117}{2}.$$

3.2.5 Un cerchio e un quadrato hanno lo stesso perimetro. Quale dei due ha l'area minore?

Soluzione. Il perimetro del cerchio di raggio r, cioè la sua circonferenza, vale $2\pi\,r$ e il perimetro del quadrato di lato a vale $4a$. Quindi $a = \pi\,r/2$. L'area del quadrato vale $a^2 = \pi^2\,r^2/4 = (\pi/4)\,\pi\,r^2$. Poiché l'area del cerchio vale $\pi\,r^2$ e $\pi/4 < 1$, il quadrato ha un'area minore.

3.2.6 Nel piano cartesiano è data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$. Determinarne il centro e il raggio, la retta tangente nell'origine, i vertici del triangolo T equilatero circoscritto avente uno dei suoi lati su tale retta e i vertici del triangolo equilatero inscritto con i lati paralleli a quelli di T.

Soluzione. Scrivendo l'equazione della circonferenza nella forma equivalente $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$, si vede che il centro è $C = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, il raggio è $r = \sqrt{2}$ e la tangente nell'origine è la bisettrice del secondo e quarto quadrante $y = -x$. Per simmetria, il triangolo T ha il vertice V sulla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$. Poiché

T è equilatero, il suo baricentro coincide con il centro della circonferenza, quindi $VC = 2\,OC = 2\sqrt{2}$. Ne segue che $VO = 3\sqrt{2}$ e che $V = (3,3)$. VO è l'altezza del triangolo il cui lato a per il teorema di Pitagora è tale che $VO^2 + a^2/4 = a^2$. Si ricava $a = 2\sqrt{6}$. Gli altri due vertici di T sono i punti che stanno sulla retta $y = -x$ e distano $\sqrt{6}$ dall'origine, ed esattamente $A = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ e $B = (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$.

Il triangolo inscritto ha il vertice V_I sulla bisettrice $y = x$ e sulla circonferenza, quindi $V_I = (2,2)$. In proporzione il lato di questo triangolo viene $b = \sqrt{6}$. Quindi gli altri due vertici A_I e B_I sono i punti che stanno sulla circonferenza e distano b da V_I, cioè le soluzioni del sistema

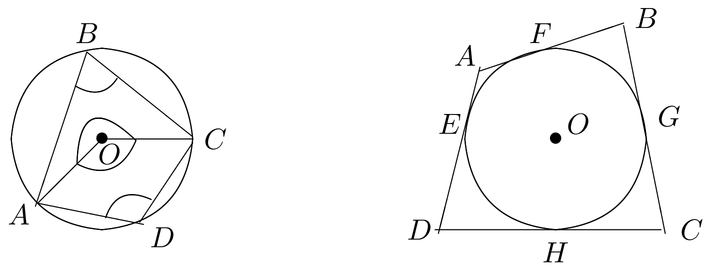
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 = 6, \end{cases}$$

che sono $x = (1 \pm \sqrt{3})/2$, $y = (-1 \pm \sqrt{3})/2$. Allora $A_I = ((1-\sqrt{3})/2, (-1+\sqrt{3})/2)$ e $B_I = ((1+\sqrt{3})/2, (-1-\sqrt{3})/2)$.

3.2.7 Dimostrare che (a) in ogni quadrilatero inscritto in una circonferenza, la somma degli angoli opposti è un angolo piatto e (b) in ogni quadrilatero circoscritto ad una circonferenza, la somma delle lunghezze di due lati opposti è uguale alla somma delle lunghezze degli altri due.

Soluzione. (a) Sia $ABCD$ il quadrilatero inscritto nella circonferenza di centro O (figura a sinistra). I due angoli al centro $\widehat{AOC}$, quello convesso e quello concavo, hanno per somma un angolo giro, quindi la somma dei corrispondenti angoli alla circonferenza $\widehat{ABC}$ e $\widehat{ADC}$ è la metà dell'angolo giro, cioè un angolo piatto. (b) Sia $ABCD$ il quadrilatero circoscritto alla circonferenza di centro O (figura a destra). Siano E, F, G, H i punti di tangenza alla circonferenza. È $AE = AF$, $BF = BG$, $CG = CH$, $DH = DE$. Sommando opportunamente si ha

$$AF + FB + CH + HD = BG + GC + DE + EA \quad \Longrightarrow \quad AB + CD = BC + DA.$$



3.2.8 Un punto P si trova esterno ad una circonferenza a distanza 13 dal centro. Da P si traccia una secante che interseca la circonferenza nei punti Q e R (nell'ordine), con $PQ = 9$ e $QR = 7$. Quanto vale il raggio r della circonferenza?

Soluzione. Si traccia una seconda secante da P alla circonferenza, in modo che passi per il centro. Questa secante interseca la circonferenza in due punti A e B (nell'ordine), con $PA = 13 - r$ e $PB = 13 + r$. Poiché i segmenti che sulla secante risultano compresi fra il punto dato e le intersezioni con la circonferenza sono in proporzione, si ha

$$PB : PQ = PR : PA \quad \Longrightarrow \quad \frac{13-r}{9} = \frac{9+7}{13+r} \quad \Longrightarrow \quad 13^2 - r^2 = 16 \cdot 9$$

da cui si ricava che $r = 5$.

3.2.9 Scrivere l'equazione della retta che passa per il punto $P = (2, -1)$ ed è perpendicolare alla retta $4x - 3y + 12 = 0$.

Soluzione. La retta data ha equazione $y = 4/3x + 4$, quindi il suo coefficiente angolare è $4/3$. Le rette passanti per P hanno equazione $y = -1+m(x-2)$, dove m deve essere tale che $4/3m = -1$, quindi $m = -3/4$. La retta cercata ha equazione $y = -1 - 3/4(x - 2)$.

3.2.10 Determinare la distanza del punto $P = (-3, 2)$ dalla retta $4x-3y+12 = 0$.

Soluzione. Per l'esercizio precedente la retta perpendicolare passante per $(-3, 2)$ ha equazione $y = 2-3/4(x+3)$. Il piede della perpendicolare è soluzione del sistema

$$\begin{cases} y = 4/3x + 4 \\ y = 2 - 3/4(x + 3) \end{cases}$$

Quindi le due rette si incontrano nel punto $Q = (-51/25, 32/25)$. La distanza fra P e Q risulta

$$\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = \sqrt{\left(\frac{51}{25} - 3\right)^2 + \left(2 - \frac{32}{25}\right)^2} = \frac{6}{5}.$$

3.2.11 Si dica quali sono nel piano cartesiano i luoghi dei punti rappresentati dalle seguenti equazioni:

(a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, (b) $x^2 + y^2 = 0$, (c) $x^2 + y^2 + 1 = 0$,
(d) $x^2 + y^2 + 2xy = 0$, (e) $x^2 + y^2 + xy = 0$, (f) $x^2 - y^2 = 0$,
(g) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 2 = 0$, (h) $(x^2 - 1)^2 + y^2 = 0$.

Soluzione. (a) la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1, (b) il punto $(0, 0)$, (c) nessun punto, (d) la retta $y = -x$, (e) il punto $(0, 0)$, (f) la coppia di rette $y = x$ e $y = -x$, (g) il punto $(-1, -1)$, (h) la coppia di punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

3.2.12 Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $O = (0, 0)$ e tangente alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x + y = 0$.

Soluzione. La circonferenza passa per l'origine, quindi vi è un'unica tangente alla circonferenza in O. Per determinarla si può procedere in due modi.
(a) Una retta passante per l'origine ha l'equazione $y = mx$. Sostituendo questa relazione nell'equazione della parabola si trovano le ascisse dei punti di intersezione. Si ottiene $(1 + m^2)x^2 + (m - 2)x = 0$, quindi in generale vi sono due punti di intersezione, di ascissa 0 e $(m - 2)/(1 + m^2)$. Per il valore $m = 2$ i due punti vengono a coincidere con l'unico punto di tangenza. L'equazione della tangente risulta $y = 2x$.

(b) L'equazione della circonferenza è equivalente alla

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad \Longrightarrow \quad (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

quindi il centro è in $(1, -1/2)$ e il raggio è $\sqrt{5}/2$. Il diametro passante per l'origine ha equazione

$$y = 0 + \frac{-1/2 - 0}{1 - 0}(x - 0) = -\frac{1}{2}\,x.$$

La perpendicolare a questa retta nell'origine ha equazione $y = 2x$.

3.3 Esercizi proposti

(una sola risposta fra le quattro indicate è corretta)

3.3.1 Sono dati due triangoli: il primo ABC è isoscele e rettangolo in A, il secondo ACD è rettangolo in D. Sapendo che i due cateti del secondo triangolo hanno lunghezze 1 e 2, che lunghezza ha l'ipotenusa del primo triangolo?

(A) $\sqrt{6}$ (B) $2\sqrt{5}$ (C) $\sqrt{10}$ (D) $2\sqrt{3}$

3.3.2 In un triangolo prendo i punti medi dei lati e considero un secondo triangolo che ha questi punti come vertici. Il rapporto fra l'area del secondo triangolo e l'area del primo è

(A) 1/3 (B) 1/4 (C) 1/2 (D) 2

3.3.3 Sui lati del rettangolo $ABCD$ vengono presi i punti E sul lato BC a distanza 1 da B e 3 da C, ed F sul lato CD a distanza 3 da C e 2 da D. Qual è l'area del triangolo AEF?

(A) 8 (B) 8.5 (C) 9 (D) 9.5

3.3.4 Dato un rettangolo, si aumenta la sua base del 40% e si diminuisce l'altezza del 50%. Di quanto diminuisce in percentuale l'area del rettangolo iniziale?

(A) 25% (B) 30% (C) 35% (D) 40%

3.3.5 In un triangolo di vertici ABC l'angolo in B è di 74°. Sappiamo inoltre che la lunghezza del lato AB è u, la lunghezza del lato BC è v, la lunghezza del lato CA è w. Quale delle seguenti relazioni si può dedurre da ciò che sappiamo?

(A) $u^2+v^2 < w^2$ (B) $u^2+v^2 > w^2$ (C) $u+v > w^2$ (D) $u+v < w$

3.3.6 Un foglio di carta quadrato viene piegato a metà; si ottiene così un rettangolo che ha perimetro 18cm. Qual è l'area del quadrato iniziale espressa in cm^2?

(A) 48 (B) 64 (C) 36 (D) 16

3.3.7 Sono dati due quadrati parzialmente sovrapposti, uno dei quali ha lato di lunghezza 4 e l'altro ha lato di lunghezza 3. Sapendo che l'area dell'intersezione dei quadrati è 2, qual è l'area della regione coperta dai due quadrati?

(A) 21 (B) 24 (C) 25 (D) 23

3.3.8 Due triangoli rettangoli T_1 e T_2 hanno un cateto in comune. L'angolo di T_1 adiacente a tale cateto misura 60°, mentre l'angolo di T_2 adiacente al cateto misura 30°. Allora

(A) l'area di T_2 è circa il 33% di quella di T_1

(B) l'area di T_2 è circa il 50% di quella di T_1

(C) l'area di T_2 è circa il 36% di quella di T_1

(D) l'area di T_2 è circa il 25% di quella di T_1

3.3.9 Un foglio rettangolare viene piegato lungo la congiungente i punti medi del lato più lungo, ottenendo così un rettangolo più piccolo. Si osserva che quello che prima era il lato minore è adesso diventato quello maggiore e che il rapporto fra lato maggiore e lato minore del foglio iniziale è lo stesso che si ha per il foglio piegato. Quanto vale questo rapporto?

(A) $\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $3/2$ (D) 2

3.3.10 Su una cartina geografica in scala $1 : 50000$ (ossia tale che 1 cm sulla mappa rappresenta 50000 cm reali), individuo una zona piana rappresentata da un rettangolo di area 6 cm^2. L'area di tale zona è circa

(A) 6 km^2 (B) 3 km^2 (C) 30 km^2 (D) 1.5 km^2

3.3.11 Un triangolo ABC ha gli angoli in B e C di 30° e due lati di 40 cm. La sua altezza relativa al lato BC è uguale a

(A) $10\sqrt{3}$ cm (B) 20 cm (C) $20\sqrt{33}$ cm (D) 80 cm

3.3.12 In un cerchio di raggio r, quanto è lunga una corda che dista dal centro un terzo di r?

(A) $5\sqrt{2}r/3$ (B) $4\sqrt{2}r/3$ (C) $2\sqrt{2}r/3$ (D) $\sqrt{2}r/3$

3.3.13 Una finestra è costituita da un rettangolo sormontato da un semicerchio. Il perimetro della finestra è 2 metri. Posto r il raggio del semicerchio, quale delle seguenti espressioni descrive l'area della finestra in metri quadri?

(A) $\dfrac{\pi r^2}{2} + r(2 - \pi r + 2r)$ (B) $\dfrac{\pi r^2}{2} + r(2 - \pi r - r)$

(C) $\dfrac{\pi r^2}{2} + 2r(2 + \pi r - 2r)$ (D) $\dfrac{\pi r^2}{2} + r(2 - \pi r - 2r)$

3.3.14 Qual è l'area del triangolo individuato nel piano cartesiano dall'asse delle x, dall'asse delle y e dalla retta di equazione $y = 3x - 2$

(A) $2/3$ (B) $3/4$ (C) $3/2$ (D) $4/3$

3.3.15 Nel piano cartesiano si consideri il triangolo rettangolo avente l'ipotenusa sulla retta $x = 1$ e il vertice nell'origine. Quale delle seguenti condizioni è vera per ogni punto (x, y) del triangolo?

(A) $x \leq 1$ (B) $y \geq 0$ (C) $y \geq x$ (D) $y \geq -x$

3.3.16 La tangente nel punto $(1, \sqrt{3})$ alla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ ha equazione

$A)$ $y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$ (B) $-\sqrt{3}(x-2)$ (C) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ (D) $-\sqrt{3}(x-1)$

3.3.17 La retta di equazione $y = 2 - 3x$ incontra gli assi cartesiani in due punti A e B. Quanto misura il segmento AB?

(A) $\dfrac{2}{3}\sqrt{10}$ (B) $2\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ (C) $\dfrac{1}{2}\sqrt{5}$ (D) $\dfrac{1}{3}\sqrt{17}$

3.3.18 In un piano cartesiano si consideri il triangolo di vertici $O = (0, 0)$, $A = (0, 2)$, $B = (2, 0)$. Ricordiamo che il baricentro è il punto in cui si incontrano le mediane del triangolo. Qual è la distanza tra il baricentro del triangolo OAB e l'origine O?

(A) $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ (B) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ (C) $\dfrac{1}{3}\sqrt{6}$ (D) $\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$

3.3.19 Nel piano cartesiano è data la semicirconferenza di raggio 1, centrata nel punto $(1, -2)$ e che sta sopra alla retta di equazione $y = -2$. La semicirconferenza è il grafico di una delle seguenti funzioni. Quale?

(A) $f(x) = 2 - \sqrt{2x - x^2}$ (B) $f(x) = \sqrt{4x - x^2 - 3} - 1$
(C) $f(x) = 1 - \sqrt{4x - x^2 - 3}$ (D) $f(x) = -2 + \sqrt{2x - x^2}$

3.3.20 I punti $A = (-3, 1)$, $B = (6, 7)$, $C = (-3, 6)$ sono i vertici di un triangolo. Qual è l'area del triangolo?

(A) 22.5 (B) 23.5 (C) 24 (D) 23

3.3.21 Sia r la retta di equazione $x + 2y - 1 = 0$. Quale fra le seguenti è l'equazione di una retta perpendicolare a r?

(A) $y = -x$ (B) $y = 2x$ (C) $y = x/2$ (D) $y = -2x$

3.3.22 Si consideri il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ x^2 - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

Quanti punti (x, y) del piano cartesiano soddisfano il sistema?

(A) 1 (B) 0 (C) 4 (D) 2

3.3.23 La retta r passa per i punti $A = (0, 2)$ e $B = (3, 0)$. Qual è l'equazione della retta S perpendicolare alla r in B?

(A) $3x - 2y - 9 = 0$ (B) $2x - 3y - 6 = 0$ (C) $2x + 3y - 6 = 0$
(D) $3x + 2y - 9 = 0$

3.3.24 L'insieme dei punti (x, y) del piano che soddisfano l'equazione $(x^2 - 4)(y - 1) = 0$ è formato da

(A) una parabola e un punto (B) tre rette (C) tre punti
(D) una retta e una parabola

3.3.25 La retta passante per $A = (2, 0)$ con pendenza $1/3$ interseca l'asse y nel punto

(A) $(0, -2)$ (B) $(0, -3/4)$ (C) $(0, -2/3)$ (D) $(0, -1)$

3.3.26 Nel piano cartesiano sono dati i punti $A = (0, 0)$ e $B = (3, 0)$. Tra tutti i triangoli APB, con il vertice P sulla curva $y = (x + 1)(9 - x)/5$ con $y \geq 0$, ve ne è uno di area massima. Tale area è uno dei valori seguenti. Quale?

(A) 8.5 (B) 7.5 (C) 7 (D) 8

3.3.27 Data la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 = 4$, siano P il punto in cui la bisettrice del secondo quadrante taglia γ e Q il punto in cui il semiasse positivo delle ascisse taglia γ. Qual è la lunghezza del segmento PQ?

(A) $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ (B) $2\sqrt{2(\sqrt{2} - 1)}$ (C) $2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ (D) $\sqrt{2\sqrt{2} + 1}$

3.3.28 In un piano le rette parallele alla retta $r \ : \ y = x$ e aventi distanza da r uguale a 1 hanno come equazioni

(A) $y = x + 1$ e $y = x - 1$ (B) $y = x + \sqrt{2}/2$ e $y = x - \sqrt{2}/2$
(C) $y = x + \sqrt{2}$ e $y = x - \sqrt{2}$ (D) $y = x + 1/2$ e $y = x - 1/2$

3.3.29 In un piano l'insieme dei punti $P = (1 + t^2, 1 + t^2)$ ottenuto al variare di t nei reali è

(A) una parabola (B) una retta (C) una semiretta
(D) una circonferenza

3.3.30 In un piano l'insieme dei punti $P = (x, y)$ verificanti l'equazione $x^2 - 2y^2 = 0$ è

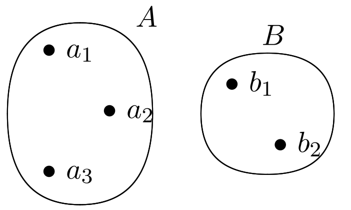
(A) l'origine del sistema di riferimento (B) una retta
(C) una coppia di rette aventi un punto in comune (D) un'ellisse

Capitolo 4

Le funzioni

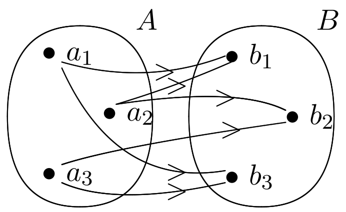
4.1 Richiami di teoria

Dati due insiemi A e B (che possono anche coincidere), si definisce *prodotto cartesiano* di A e B, e si indica con $A \times B$, l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Gli elementi del prodotto cartesiano vengono rappresentati in una tabella con tante righe quant'è il numero di elementi di A e tante colonne quant'è il numero di elementi di B.



	b_1	b_2
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)
a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)

Si definisce *relazione* fra A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano di A e B. Quindi una relazione è un insieme di coppie (a, b). Si usa la notazione $a \sim b$ per indicare che a è in relazione con b.



	b_1	b_2	b_3
a_1	*		*
a_2	*	*	
a_3		*	*

Esempio importante di relazione di un insieme A con se stesso è la relazione di *equivalenza* che verifica le proprietà:

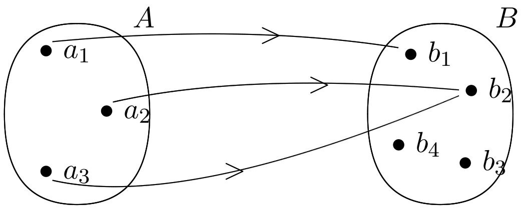
1. $a \sim a$ (proprietà riflessiva),

2. se $a \sim b$, allora $b \sim a$ (proprietà simmetrica),

3. – se $a \sim b$ e $b \sim c$, allora $a \sim c$ (proprietà transitiva).

Altri esempi di relazione sono le *relazioni d'ordine*, in cui si usano le notazioni $a < b$ $a \leq b$, $a > b$, $a \geq b$. Una relazione d'ordine non è una relazione di equivalenza perché non verifica le proprietà riflessiva e simmetrica.

Si definisce *applicazione* o *funzione* da A in B una relazione fra A e B in cui ad ogni elemento di A corrisponde un solo elemento di B.

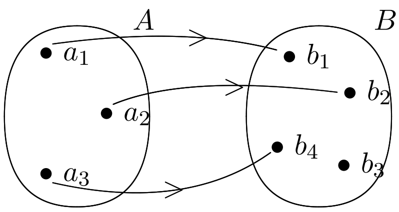


Di solito una funzione si indica tramite i due insiemi A e B scrivendo $f : A \to B$. L'elemento di B corrispondente ad a viene indicato con $f(a)$. L'insieme A viene detto *dominio* della funzione, l'insieme B *codominio*, l'insieme $f(A) = \{f(a),\ a \in A\}$ è l'*immagine* di A (è un sottoinsieme di B). Il *grafico* della f è l'insieme delle coppie $(a, f(a))$ per $a \in A$.

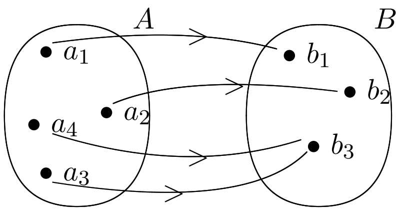
Una funzione si dice *iniettiva* se manda elementi distinti di A in elementi distinti di B, cioè

$$f(a) = f(a') \implies a = a',$$

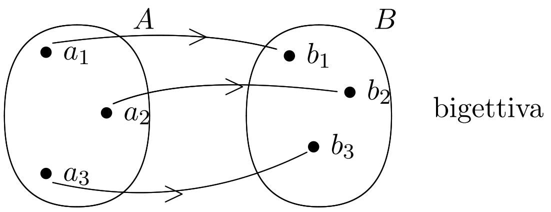
si dice *surgettiva* se ogni elemento di B proviene da qualche elemento di A, cioè $B = f(A)$), si dice *bigettiva* se è iniettiva e surgettiva. In tal caso si dice anche che tra A e B vi è una *corrispondenza biunivoca.* Due insiemi che sono in corrispondenza biunivoca hanno la stessa cardinalità.



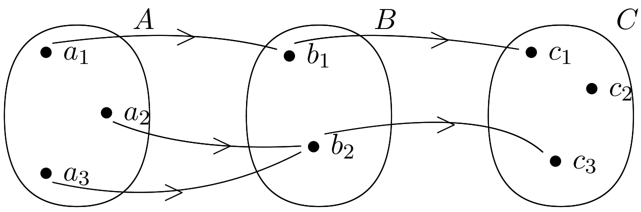
iniettiva



surgettiva



Sull'insieme delle funzioni si definisce l'operazione di *composizione* nel modo seguente: date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, la funzione *composta* è $g \circ f : A \to C$ che associa ad ogni $a \in A$ l'elemento $g(f(a))$.



La funzione *identica* $i : A \to A$ è quella che manda ogni elemento di A in sé (i è l'elemento neutro rispetto all'operazione di composizione di funzioni).

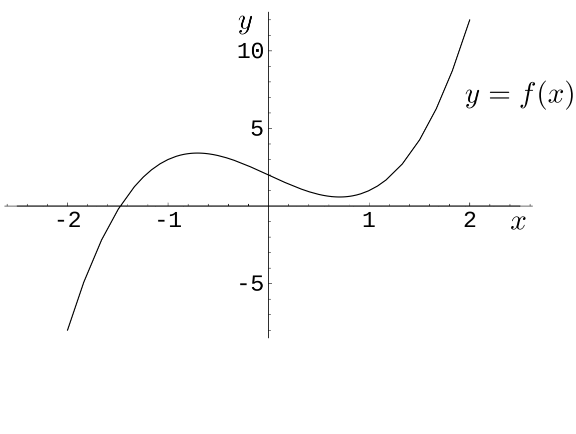
Se la funzione f è iniettiva si può associare ad ogni b dell'immagine l'unico elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Si determina così una funzione, detta funzione *inversa*, che viene indicata con f^{-1}. Quindi $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = i$. Vale la proprietà $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Importanti funzioni numeriche che andiamo ad esaminare in dettaglio sono

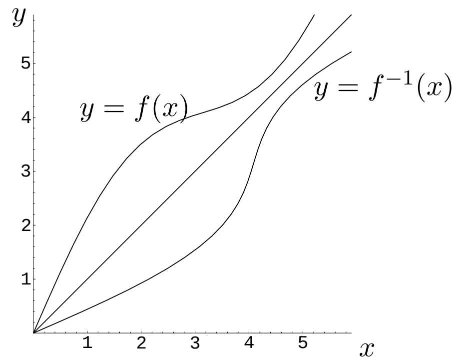
(a) le *funzioni reali* di variabile reale, in cui A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$,

(b) le *successioni*, in cui A è l'insieme $\mathbb{N}$ e B è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

(a) Nel caso di una funzione reale di variabile reale, la f viene di solito data tramite una espressione analitica. Per convenzione si assume come dominio della f il massimo sottoinsieme X degli x su cui si può definire $f(x)$ e come codominio Y l'immagine $\{y = f(x) \text{ per } x \in X\}$. Il grafico della f viene rappresentato nel piano cartesiano con X in ascissa e Y in ordinata. Ad esempio, il grafico della funzione $y = 2x^3 - 3x + 2$ è



Se la funzione f è invertibile, cioè ammette l'inversa f^{-1}, il grafico dell'inversa è l'insieme delle coppie $(y, f^{-1}(y))$, con $y \in Y$. Poiché $y = f(x)$, questo insieme è formato dalle coppie $(f(x), x)$ per $x \in X$. Quindi i grafici di f e di f^{-1} sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$, la bisettrice del primo e terzo quadrante. La figura riporta i grafici della funzione $y = 1.3x + \sin x$ e della sua inversa.



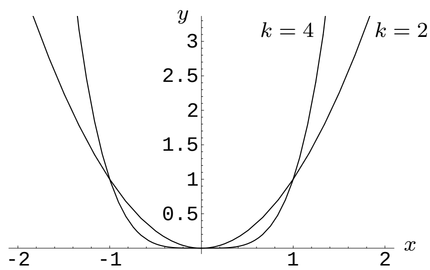
Una funzione f è detta *monotona*

crescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$,
strettamente crescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$,
decrescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$,
strettamente decrescente se $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$ per ogni $x_1, x_2 \in X$.

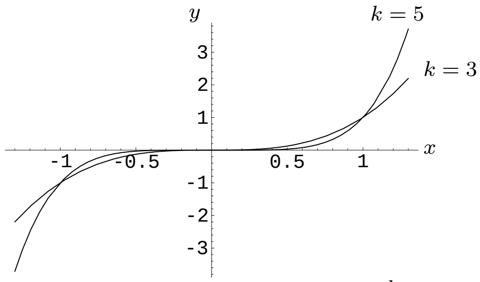
Se la funzione f è strettamente monotona, cioè crescente o decrescente, allora f è iniettiva, e quindi ammette l'inversa f^{-1}. Inoltre f^{-1} è strettamente monotona dello stesso tipo di f. Nota: la proposizione inversa non è vera, cioè esistono funzioni invertibili che non sono strettamente monotone.

Fra le funzioni reali ci sono polinomi, visti nel cap. 2, e altre ne vedremo più avanti in questo capitolo. Alcune funzioni elementari meritano di essere esaminate in dettaglio.

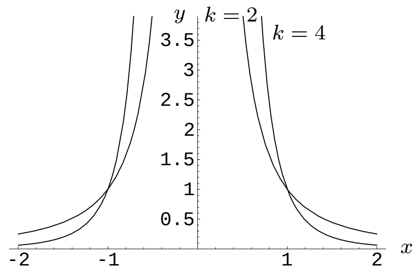
– Le potenze ad esponente intero positivo: $y = x^k$, con $k \in \mathbb{Z}^+$, definite per $x \in \mathbb{R}$. Per k pari le potenze sono strettamente decrescenti per $x < 0$ e strettamente crescenti per $x > 0$. Valgono 0 per $x = 0$ e 1 per $x = \pm 1$. I grafici per $k = 2$ e $k = 4$ sono



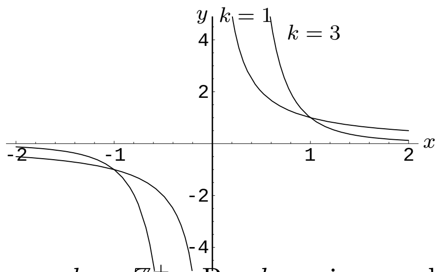
Per k dispari le potenze sono strettamente crescenti sia per $x < 0$ che per $x > 0$. Valgono 0 per $x = 0$, -1 per $x = -1$ e 1 per $x = 1$. I grafici per $k = 3$ e $k = 5$ sono



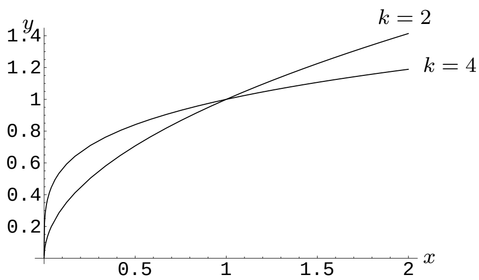
– Le potenze ad esponente intero negativo: $y = x^{-k}$, con $k \in \mathbb{Z}^+$, definite per $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Per k pari sono strettamente crescenti per $x < 0$ e strettamente decrescenti per $x > 0$. Valgono 1 per $x = \pm 1$. I grafici per $k = 2$ e $k = 4$ sono



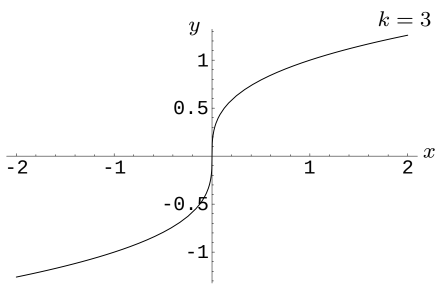
Per k dispari sono strettamente decrescenti sia per $x < 0$ che per $x > 0$. Valgono -1 per $x = -1$ e 1 per $x = 1$. I grafici per $k = 1$ e $k = 3$ sono



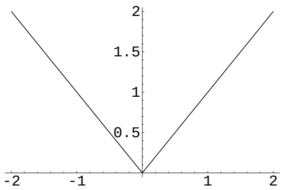
– Le radici: $y = \sqrt[k]{x}$, con $k \in \mathbb{Z}^+$. Per k pari sono definite per $x \geq 0$, sono strettamente crescenti e valgono 0 per $x = 0$ e 1 per $x = 1$. I grafici per $k = 2$ e $k = 4$ sono Per k dispari sono definite per $x \in \mathbb{R}$, sono strettamente crescenti

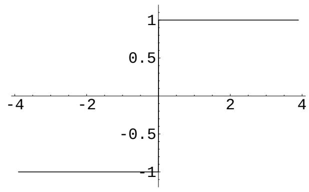


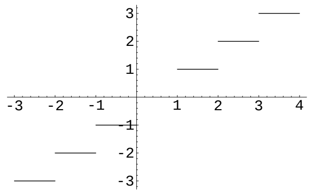
e valgono 0 per $x = 0$, -1 per $x = -1$ e 1 per $x = 1$. Il grafico per $k = 3$ è



Le funzioni possono essere definite anche *a tratti*, cioè diversamente su intervalli separati. Ad esempio, la funzione *valore assoluto* $y = |x|$, che vale x per $x \geq 0$ e $-x$ per $x < 0$, la funzione *segno* $y = \mathrm{sgn}(x)$ che vale 1 per $x > 0$ e -1 per $x < 0$, la funzione *parte intera inferiore* $y = \lfloor x \rfloor$ che dà il più grande intero relativo minore o uguale ad x. I grafici di queste tre funzioni sono







(b) Le *successioni* sono sequenze ordinate di numeri. Una successione viene definita mediante il suo termine n-esimo $a_n = f(n)$, tramite una espressione esplicita oppure con una relazione di ricorrenza a partire da uno o più valori iniziali.

Esempi di successioni definite esplicitamente:

$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad a_n = n \cdot r \quad \text{(la successione aritmetica di ragione } r\text{)},\\
&f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad a_n = n^2 \quad \text{(la successione dei quadrati)},\\
&f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, \quad a_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{(la successione armonica)},\\
&f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad a_n = r^n \quad \text{(la successione geometrica di ragione } r\text{)}.
\end{aligned}$$

Esempi di successioni definite per ricorrenza:

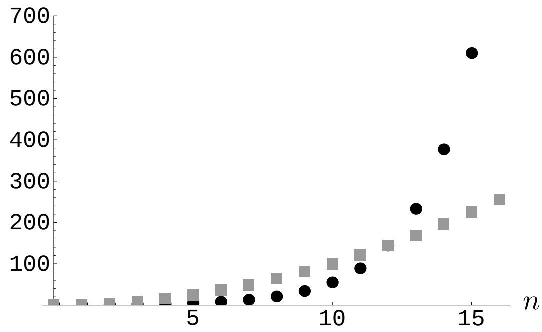
$$\begin{aligned}
&f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + r \quad \text{(la successione aritmetica di ragione } r\text{)},\\
&f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad a_0 = 1, \quad a_{n+1} = n \cdot a_n \quad \text{(la successione dei fattoriali)},\\
&f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad \text{(la successione di Fibonacci)},\\
&f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad a_0 = 1, \quad a_{n+1} = r \cdot a_n \quad \text{(la successione geometrica di ragione } r\text{)}.
\end{aligned}$$

Per alcune successioni si possono usare indifferentemente sia la definizione esplicita che quella per ricorrenza, in altri casi è più semplice o addirittura necessario utilizzare una delle due e non l'altra.

Come tutte le altre funzioni, le successioni possono essere rappresentate nel piano cartesiano. Il grafico, formato da punti isolati (n, a_n), dà spesso informazioni visive, che sarebbe più difficile ricavare dalle formule. Ad esempio, il grafico della successione di Fibonacci (pallini neri) a confronto con il grafico della successione dei quadrati (quadratini grigi) mostra che i numeri di Fibonacci all'inizio per $n \leq 11$ valgono meno dei corrispondenti quadrati, per $n = 12$ i due valori coincidono e per $n > 12$ i numeri di Fibonacci crescono molto più rapidamente dei quadrati.

Data una successione, è spesso richiesto di calcolarne la somma di un sottoinsieme finito (*progressione*) di termini. Per particolari successioni questo può essere fatto in modo formale. Ad esempio, sia S la somma dei primi N interi positivi

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (N-2) + (N-1) + N.$$



La somma non cambia se si procede dal maggiore al minore

$$S = N + (N-1) + (N-2) + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Ora si somma termine a termine e si ottiene

$$2S = (N+1) + (N+1) + (N+1) + \ldots + (N+1) + (N+1) + (N+1) = N(N+1).$$

Quindi

$$\sum_{n=0}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}.$$

Sfruttando questa relazione si trova la somma degli N termini di una progressione aritmetica di ragione r

$$\sum_{n=0}^{N} n \cdot r = \frac{N(N+1)}{2}\, r.$$

Per trovare la somma di una progressione geometrica di ragione $r > 0$ e $r \neq 1$

$$S = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{N-1} + r^N,$$

si moltiplica per r

$$rS = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^N + r^{N+1},$$

e si sottrae l'espressione precedente, ottenendo $r\,S - S = r^{N+1)=} - 1$, da cui si ricava

$$S = \frac{r^{N+1} - 1}{r - 1}.$$

4.1.1 La funzione esponenziale

Fissato come base un numero reale $a > 0$, si vuole definire la funzione esponenziale a^x per ogni esponente x reale. Nel cap. 1, partendo dalla potenza a^n con esponente intero positivo n, si sono definite successivamente

– la potenza $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$,

– la potenza $a^{1/m} = \sqrt[m]{a}$.

Sfruttando le proprietà delle potenze si definisce anche

– la potenza $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n$.

Si è così dato un significato ad a^r per ogni $r = n/m$ razionale.

Per definire $y = a^x$ per x reale si introducono i due insiemi

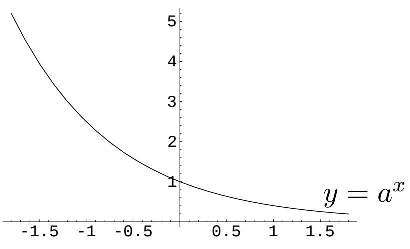
$$A = \{a^r \ : \ r \in \mathbb{Q},\ r < x\}, \qquad B = \{a^s \ : \ s \in \mathbb{Q},\ r > x\}.$$

Per la proprietà di continuità di $\mathbb{R}$ esiste un elemento separatore fra A e B che è un numero reale. Tale elemento viene indicato con a^x.

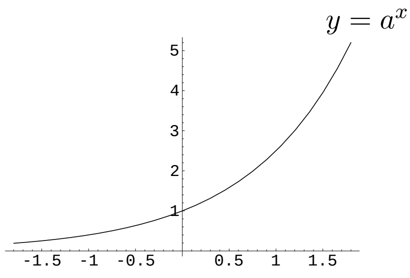
Si è così definita la *funzione esponenziale* $y = a^x$ per x reale. Per questa funzione continuano a valere le proprietà delle potenze

$$a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{(x-y)}, \quad a^x \cdot b^x = (a\,b)^x, \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Se tracciamo il grafico della funzione notiamo che vi è una differenza sostanziale a seconda che a sia minore o maggiore di 1. In entrambi i casi la funzione è positiva e il valore nell'origine è 1, ma se la base è minore di 1 la funzione è decrescente, mentre se la base è maggiore di 1 la funzione è crescente.



$a < 1$



$a > 1$

Un caso particolarmente interessante è quello della funzione esponenziale $y = \mathrm{e}^x$, dove la base e=2.718281. . . è il *numero di Nepero*.

Per risolvere un'equazione esponenziale, cioè un'equazione in cui l'incognita compare ad esponente di una potenza, bisogna ricondursi, utilizzando le proprietà delle potenze, ad un'equazione della forma

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}, \quad \text{oppure} \quad a^{f(x)} = b, \quad \text{oppure} \quad a^{f(x)} = b^{g(x)}.$$

Nel primo caso basta imporre che $f(x) = g(x)$, negli altri due casi occorre utilizzare i logaritmi (vedere sotto).

Per risolvere invece una disequazione esponenziale, bisogna tenere conto del fatto che

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > g(x) \text{ se } a > 1, \\ f(x) < g(x) \text{ se } a < 1. \end{cases}$$

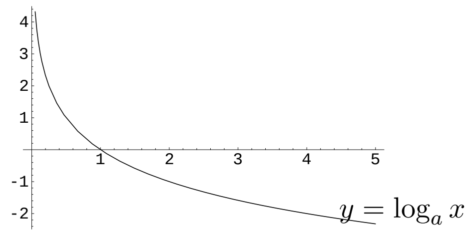
4.1.2 La funzione logaritmo

Escluso il caso $a = 1$, la funzione esponenziale è positiva e monotona e la sua immagine è tutta la semiretta $(0, +\infty)$. Quindi la funzione esponenziale è invertibile. Si definisce così la *funzione logaritmo* (o semplicemente il logaritmo) $y = \log_a x$ come funzione inversa della funzione esponenziale, cioè $x = a^y$. In pratica, il logaritmo in base a di un numero reale x è l'esponente y che va dato ad a per ottenere x. La funzione è definita per $x > 0$.

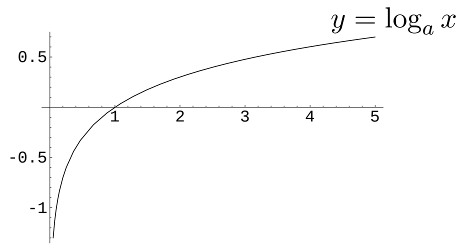
Dalla definizione si ottengono le due proprietà fondamentali del logaritmo

$$\log_a a^b = b \quad \text{e} \quad a^{\log_a b} = b. \tag{4.1}$$

I grafici nei due casi di $a < 1$ e di $a > 1$ sono



$a < 1$



$a > 1$

Dalle proprietà della funzione esponenziale discendono quelle del logaritmo

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \qquad \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b, \qquad \log_a b^c = c \cdot \log_a b. \tag{4.2}$$

Dalla seconda delle (4.1) e dalla terza delle (4.2) si ha che

$$\log_a b = log_a(c^{\log_c b}) = \log_c b \cdot \log_a c,$$

da cui si ricava

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}.$$

Ponendo $b = a$, poiché $\log_a a = 1$, si ottiene la formula del cambiamento di base

$$\log_c a = \frac{1}{\log_a c}.$$

Le basi abitualmente usate per il logaritmo sono 2, e, 10 a cui corrispondono le notazioni $\log_2 x$ (logaritmo in base 2), $\log x$ (logaritmo naturale), $\log_{10} x$ (logaritmo decimale).

Per risolvere un'equazione logaritmica, cioè un'equazione in cui l'incognita compare come argomento di uno o più logaritmi o come base di logaritmi, bisogna ricondursi, utilizzando le proprietà dei logaritmi, ad un'equazione della forma

$$\log_a f(x) = \log_a g(x), \quad \text{oppure} \quad \log_a f(x) = b, \quad \text{oppure} \quad \log_a f(x) = \log_b g(x).$$

Nel primo caso basta imporre che $f(x) = g(x)$, nel secondo è $f(x) = a^b$, nel terzo, sfruttando le regole del cambiamento di base e del logaritmo di una potenza, si ha $f(x) = g(x)^{\log_b a}$. In ogni caso occorre tenere conto della correttezza dei passaggi fatti, cioè che gli argomenti o le basi dei logaritmi che intervengono siano strettamente positivi. Ad esempio, l'equazione

$$\log_2(x^2 - 3x) = 2 \log x$$

può essere risolta solo per $x > 3$, perché solo questi valori rendono positivi gli argomenti dei logaritmi. L'equazione data è equivalente all'equazione $x - 3 = x^{(log 4 - 1)}$. Quest'ultima equazione viene risolta con metodi numerici e si trova che la soluzione è $x \sim 4.84$.

Nel caso dell'equazione

$$2 \log_x 4 = \log_2 x - 3,$$

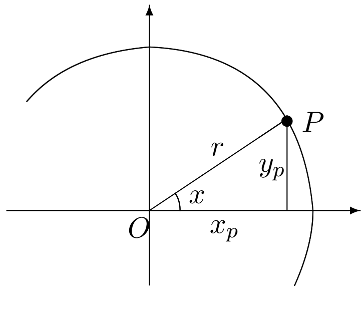
deve essere $x > 0$. Un'equazione equivalente è $4/\log_2 x = \log_2 x - 3$ che fornisce per $\log_2 x$ le due soluzioni -1 e 4, quindi $x = 1/2$ e $x = 16$.

4.1.3 Le funzioni trigonometriche

Come abbiamo visto nel cap. 3, le lunghezze degli archi di una circonferenza sono proporzionali ai corrispondenti angoli al centro. Convenzionalmente gli angoli vengono misurati in gradi, assegnando la misura di 360° all'angolo giro. Se consideriamo una circonferenza di raggio r, la lunghezza dell'arco che corrisponde ad un angolo al centro che misura α gradi risulta $\ell = \alpha\pi r/180$. Questa relazione suggerisce di misurare gli angoli con una misura meno arbitraria. Si definisce così il *radiante* come la misura dell'angolo al centro corrispondente ad un arco di lunghezza uguale al raggio. Con questa unità di misura, la lunghezza di un arco risulta uguale al raggio moltiplicato per la misura in radianti del corrispondente angolo al centro. Poiché la circonferenza ha lunghezza $2\pi r$, a 360° corrispondono 2π radianti, a 180° corrispondono π radianti, e così via.

Vi è tuttavia una differenza: la misura in gradi è assoluta, cioè non ha segno, mentre alla misura in radianti viene assegnato un segno che è positivo se si suppone di misurare l'angolo facendo ruotare una delle sue semirette in senso antiorario sull'altra, negativo altrimenti.

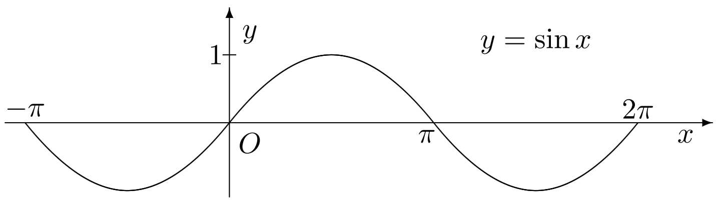
In un sistema di coordinate cartesiane consideriamo il cerchio di centro O e raggio r. Sia $P = (x_p, y_p)$ un punto sulla circonferenza.

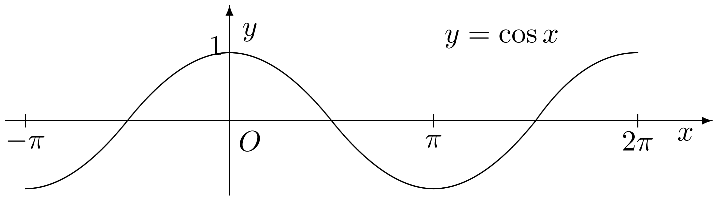


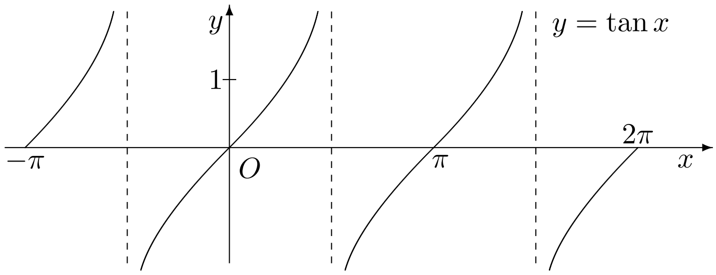
Quindi x_p e y_p misurano le proiezioni (con segno) di P sugli assi coordinati. Indicato con x l'angolo che l'asse delle ascisse forma con la semiretta OP (attenzione al segno, perché d'ora in poi misureremo sempre gli angoli in radianti), si definiscono

$$\sin x = \frac{y_p}{r}, \quad \cos x = \frac{x_p}{r}, \quad \tan x = \frac{y_p}{x_p}.$$

In questo modo le funzioni *seno*, *coseno* e *tangente* risultano definite per $0 \le x \le 2\pi$ (esclusa la tangente che non è definita per $\pi/2$ e $3\pi/2$). Si prolungano per periodicità in modo da ottenere le funzioni trigonometriche $\sin x$ e $\cos x$ definite su tutta la retta reale e $\tan x$ definita per $x \neq \pi/2,\ 3\pi/2,\ 5\pi/2,\ \ldots$







– Le funzioni trigonometriche verificano le seguenti proprietà.

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin\pi = 0, \qquad \cos\pi = -1,$$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x,}$$

$$\sin(-x) = \sin x, \qquad \cos(-x) = -\cos x, \qquad \tan(-x) = -\tan x,$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x, \qquad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x, \qquad \tan(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{\tan x},$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \tan(\pi - x) = -\tan x.$$

- *Formule di addizione.*

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$

- *Formule di duplicazione e bisezione.*

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x},$$

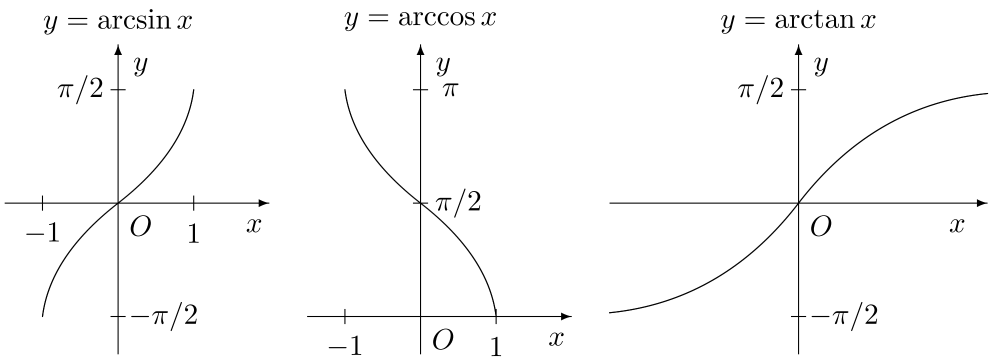
$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x},$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}, \qquad \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}},$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 \mp \tan^2 x}, \qquad \tan \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

Molte altre proprietà sono state dimostrate per le funzioni trigonometriche, ad esempio le formule di prostaferesi che trasformano somme di funzioni in prodotti e le formule di Werner che trasformano prodotti di funzioni in somme. Queste ed altre possono essere trovate nei manuali.

La funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ di una funzione trigonometrica $f(y)$ è definita solo se la $f(y)$ viene ristretta ad un opportuno intervallo in cui essa è strettamente crescente o strettamente decrescente (ramo principale). La funzione inversa di $\sin y$ è definita per $-\pi/2 \le y \le \pi/2$, la funzione inversa di $\cos y$ è definita per $0 \le y \le \pi$, la funzione inversa di $\tan y$ è definita per $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. Quindi $\arcsin x$ è definita per $-1 \le x \le 1$ e assume valori compresi fra $-\pi/2$ e $\pi/2$, $\arccos x$ è definita per $-1 \le x \le 1$ e assume valori compresi fra π e 0, $\arctan x$ è definita per ogni x e assume valori compresi fra $-\pi/2$ e $\pi/2$. Le rette $y = -\pi/2$ e $y = \pi/2$ sono asintoti per $\arctan x$.



- Le funzioni trigonometriche inverse verificano le seguenti proprietà.

$$\arcsin x + \arccos x = \pi/2,$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

$$\arctan(-x) = -\arctan x,$$

$$\arctan x) = \pi/2 - \arctan(1/x), \qquad \arctan x) = \pi/4 - \arctan((1-x)/(1+x))$$

La risoluzione di equazioni trigonometriche, cioè equazioni in cui l'incognita compare come argomento di una o più funzioni trigonometriche, può richiedere l'applicazione successiva di varie formule fra quelle che abbiamo visto, in modo da ottenere, se possibile, espressioni semplici della forma

$$\sin x = q, \quad \text{oppure} \quad \cos x = q, \quad \text{oppure} \quad \tan x = q.$$

Nei primi due casi l'equazione è risolubile solo per $-1 \leq q \leq 1$. La retta $y = q$ interseca il grafico di $y = \sin x$ o $y = \cos x$ in uno (se $|q| = 1$) o due punti P_1 e P_2 le cui ascisse α_1 e α_2 appartengono all'intervallo di riferimento $[0, 2\pi)$. Tenuto conto della periodicità delle due funzioni, le soluzioni sono espresse nella forma $x = \alpha_{1,2} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Nel terzo caso l'equazione ammette soluzioni della forma $x = \alpha + k\pi$, con $\alpha \in (-\pi, \pi)$ e $k \in \mathbb{Z}$.

4.2 Esercizi svolti

4.2.1 Quali di queste funzioni reali di variabile reale sono iniettive, quali surgettive e quali invertibili?

$$(1) \quad f(x) = x^2, \qquad (2) \quad f(x) = x^3 - x, \qquad (3) \quad f(x) = 1/x,$$

$$(4) \quad f(x) = 1/(x^2+1), \qquad (5) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 0, \\ -x^2 & \text{se} \quad x < 0. \end{cases}$$

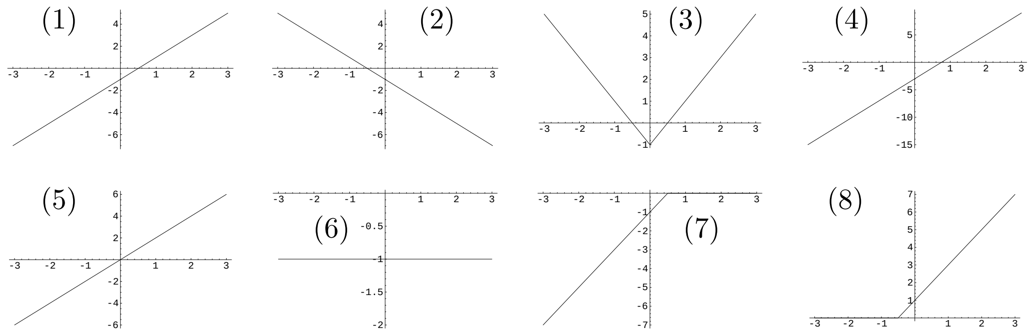
Soluzione. Tutte le funzioni hanno $\mathbb{R}$ come dominio, eccetto la (3) che è definita per $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. La (1) non è iniettiva, infatti $f(-x) = f(x)$, è surgettiva sul codominio dei reali non negativi, non è invertibile perché non monotona su $\mathbb{R}$. La sua restrizione al dominio dei reali non negativi è invertibile. La (2) non è iniettiva, infatti $f(-1) = f(0) = f(1)$, è surgettiva, non è invertibile perché non monotona su $\mathbb{R}$. La sua restrizione al dominio $\{x \geq 1\}$ è invertibile. La (3) è iniettiva, è surgettiva sul codominio dei reali non nulli. Separatamente sui due intervalli $x < 0$ e $x > 0$ è anche invertibile. La (4) è come la (1), con l'ulteriore limitazione che il codominio escluda lo zero. La (5) è iniettiva, surgettiva e invertibile.

4.2.2 Sia $f(x) = 2x - 1$. tracciare il grafico delle seguenti funzioni

$$(1) \quad f(x), \qquad (2) \quad f(-x), \qquad (3) \quad \max\{f(x), f(-x)\}, \qquad (4) \quad f(f(x)),$$

$$(5) \ \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad (6) \ \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad (7) \ \min\{f(x), 0\}, \quad (8) \ \max\{-f(-x), 0\}$$

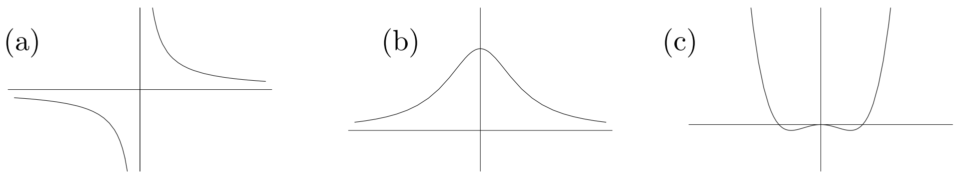
Soluzione.



4.2.3 Date le funzioni $f(x) = 2x$ e $g(x) = x^2$, costruire le funzioni composte $g \circ f$ e $f \circ g$.

Soluzione. È $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x)^2 = 4x^2$ e $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2) = 2x^2$.

4.2.4 I seguenti grafici



corrispondono alle tre funzioni

$$y = x^4 - x^2, \qquad y = \frac{1}{1+x^2}, \qquad y = \frac{1}{x}.$$

Si associ ad ogni grafico la corrispondente funzione.

Soluzione. Il grafico (a) mostra un asintoto verticale corrispondente all'asse y. Quindi ci si aspetta che la funzione corrispondente abbia un denominatore che si annulla per $x = 0$. Inoltre è negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$. La terza funzione ha queste caratteristiche. Il grafico (b) mostra un asintoto orizzontale corrispondente all'asse x. Quindi ci si aspetta che la funzione corrispondente abbia un denominatore che non si annulla per x finito, ma che cresce senza limiti per x crescente. Inoltre è sempre positiva ed è simmetrica rispetto all'asse y. La seconda funzione ha queste caratteristiche, infatti $1/(1 + x^2) = 1/(1 + (-x)^2)$. Il grafico (c) non mostra asintoti, è simmetrico rispetto all'asse y, presenta almeno tre punti di annullamento ed è positivo al di fuori dell'intervallo contenente gli zeri. La funzione corrispondente è la prima, infatti $y = x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$ si annulla in 0, -1 e 1 ed è positiva per $|x| > 1$.

4.2.5 Trovare il termine generico delle seguenti successioni

$$(1) \quad \{1, -1, 1, -1, 1, \ldots\} \qquad (2) \quad \{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots\}$$

$$(3) \quad \{0, 1, 0, 3, 0, 5, 0, \ldots\} \qquad (4) \quad \{1, \frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}, 1, \frac{7}{6}, 1, \frac{9}{8}, \ldots\}$$

Soluzione. Per la (1) è $a_n = (-1)^n$. Per la (2) è $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Per la (3) è $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}n$. Per la (4) è $a_n = 1 + \dfrac{1-(-1)^n}{2}\dfrac{1}{n+1}$.

4.2.6 Dimostrare che per ogni numero reale $a \geq 0$ e per ogni intero pari $n \geq 2$ l'equazione $x^n = a$ ha le due soluzioni reali $x = \pm\sqrt[n]{a}$, mentre se n è dispari l'equazione è risolubile anche per a negativo ed ha una sola soluzione reale data da

$$x = \begin{cases} \sqrt[n]{a} & \text{se} \quad a \geq 0, \\ -\sqrt[n]{-a} & \text{se} \quad a < 0, \end{cases}$$

Soluzione. Se $a \geq 0$, il numero reale $x = \sqrt[n]{a}$ è soluzione dell'equazione, infatti

$$x^n = (\sqrt[n]{a})^n = (a^{1/n})^n = a.$$

Se n è pari si ha $n = 2m$, con m numero naturale, e anche il numero reale $x = -\sqrt[n]{a}$ è soluzione dell'equazione, infatti

$$x^n = (-\sqrt[n]{a})^n = (-a^{1/n})^{2m} = ((-a^{1/n})^2)^m = ((a^{1/n})^2)^m = (a^{1/n})^{2m} = (a^{1/n})^n = a.$$

Se n è pari, le due soluzioni considerate hanno lo stesso modulo $|x| = \sqrt[n]{a}$ e non vi sono altre soluzioni reali, infatti un y tale che $|y| < \sqrt[n]{a}$ oppure $|y| > \sqrt[n]{a}$ porterebbe a $|y|^n < a$ oppure $|y|^n > a$ e non potrebbe essere soluzione dell'equazione.

Se $a \geq 0$ e n è dispari, il numero $x = -\sqrt[n]{a}$ non è una soluzione reale dell'equazione, infatti ripetendo i passaggi precedenti si ottiene $x^n = -a$. Se $a < 0$ e n è dispari, l'equazione $x^n = a$ è equivalente all'equazione $-x^n = -a$, la cui soluzione è uguale alla soluzione, cambiata di segno, dell'equazione $y^n = -a$, perché $(-x)^n = -(x^n)$. Siccome $-a > 0$, per quanto visto sopra la soluzione di quest'ultima equazione è $y = \sqrt[n]{-a}$. Ne segue che $x = -\sqrt[n]{-a}$.

4.2.7 Sia $a > 1$ un numero reale. Che relazione c'è fra i grafici delle due funzioni $y = a^x$ e $y = (1/a)^x$? E fra i grafici delle funzioni $y = \log_a x$ e $y = \log_{1/a} x$?

Soluzione. Poiché $(1/a)^x = a^{-x}$, i grafici delle due funzioni esponenziali sono simmetrici rispetto all'asse y. In modo analogo si verifica che i grafici delle due funzioni logaritmo sono simmetrici rispetto all'asse x.

4.2.8 Risolvere l'equazione $3^{x+1} = 5^{1-x}$.

Soluzione. Prendendo i logaritmi in base 3 di entrambi i membri si ottiene

$$x + 1 = (1-x)\log_3 5 \quad \Longrightarrow \quad x(1 + \log_3 5) = \log_3 5 - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\log_3 5 - 1}{\log_3 5 + 1}.$$

Poiché $\log_3 5 \sim 1.465$, risulta $x \sim 0.189$

4.2.9 Sia $a \geq 1$. Dimostrare che $|a^x - 1| \leq a^{|x|} - 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Se $x \geq 0$ è $a^x \geq 1$. Quindi in questo caso la disequazione diventa $a^x - 1 \leq a^x - 1$ che è banalmente verificata. Se $x < 0$ è $0 < a^x < 1$. Quindi in questo caso la disequazione diventa

$$-a^x+1 \leq a^{-x}-1 \implies -a^x+1 \leq \frac{1}{a^x}-1 \implies \frac{-a^{2x}+2a^x-1}{a^x} \leq 0 \implies -(a^x-1)^2 \leq 0.$$

Questa equazione è verificata per ogni x.

4.2.10 Dimostrare che $\log_2 5$ è irrazionale.

Soluzione. Per assurdo, si suppone che esistano p e q interi positivi tali che $\log_2 5 = p/q$. Allora $2^{p/q} = 5$, da cui $2^p = 5^q$, ma questa relazione non può valere perché 2 e 5 sono primi fra loro.

4.2.11 Risolvere la disequazione $\log_{2x} x < \dfrac{1}{2}$.

Soluzione. Applicando la formula del cambiamento di base si ha

$$\frac{1}{\log_x 2x} < \frac{1}{2} \implies \frac{1}{\log_x 2+1} < \frac{1}{2} \implies \frac{\log_2 x}{\log_2 x+1} < \frac{1}{2}.$$

Per $0 < x < 1/2$ è $\log_2 x < -1$, per cui sia il numeratore che il denominatore della frazione a primo membro sono negativi; la disequazione diventa $2\log_2 x > \log_2 x+1$ e non vale. Per $1/2 < x \leq 1$ è $-1 < \log_2 x \leq 0$, per cui il numeratore è ≤ 0 e il denominatore è positivo. La frazione a primo membro è ≤ 0, quindi minore di $1/2$ e la disequazione vale. Per $x > 1$ sia il numeratore che il denominatore sono positivi; la disequazione diventa $2\log_2 x < \log_2 x + 1$ e vale solo per $x < 2$. In conclusione la disequazione vale per $1/2 < x < 2$.

4.2.12 Risolvere l'equazione $2\cos(x/2) + 2\sqrt{3}\cos x = 1 - \sqrt{3}$.

Soluzione. Tenendo conto che $\cos x = \cos(2x/2) = 2\cos^2(x/2) - 1$ e ponendo $z = \cos(x/2)$ si ha

$$2\cos(x/2) + 2\sqrt{3}(2\cos^2(x/2) - 1) = 1 - \sqrt{3} \implies 4\sqrt{3}z^2 + 2z - (\sqrt{3}+1) = 0$$

L'ultima equazione ha le soluzioni $z = 1/2$ e $z = -(3+\sqrt{3})/6$. La determinazione $z = 1/2$ dà le soluzioni $x/2 = \pm\pi/3 + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, quindi $x = \pm 2\pi/3 + 4k\pi$. L'altra determinazione dà le soluzioni $x = \pm 2\arccos(-(3+\sqrt{3})/6) + 4k\pi$.

4.2.13 È vero che $\sin 1 < \sin 2$?

Soluzione. Applicando la formula di duplicazione si ha $\sin 2 = 2\sin 1\cos 1$. Poiché $1 < \pi/3$ e nell'intervallo $[0, \pi/3]$ la funzione $\cos x$ è decrescente, si ha $\cos 1 > \cos\pi/3 = 1/2$, quindi $\sin 2 > 2\,\sin 1\,(1/2) = \sin 1$.

4.2.14 Dimostrare che

$$\sin(\alpha+\beta) \leq \sin\alpha + \sin\beta, \quad \text{per} \quad \alpha,\beta \in [0,\pi/2].$$

Soluzione. Applicando la formula di addizione si ha $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ e per $\alpha,\beta \in [0,\pi/2]$ è $0 < \cos\alpha, \cos\beta \leq 1$, da cui si ottiene la maggiorazione cercata.

4.2.15 Risolvere la disequazione $\sin x + \cos x \geq \sqrt{2}$.

Soluzione. Imponendo che $\sin x + \cos x \geq 0$, si elevano a quadrato entrambi i membri

$$(\sin x+\cos x)^2 \geq 2 \implies \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x \geq 2 \implies 1+\sin 2x \geq 2 \implies \sin 2x \geq 1.$$

L'ultima disequazione è soddisfatta solo dalle soluzioni dell'equazione $\sin 2x = 1$, quindi per $2x = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, quindi per $x = \pi/4 + k\pi$. Però le soluzioni con k dispari vengono scartate perché danno $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$.

4.3 Esercizi proposti

(una sola risposta fra le quattro indicate è corretta)

4.3.1 Due grandezze positive x e y sono legate da una relazione per cui se x dimezza allora y quadruplica. Una sola tra le seguenti è la relazione tra x e y. Quale?

(A) $y = 8x$ $\qquad$ (B) $y = 1/x^2$ $\qquad$ (C) $y = 4\sqrt{x}$ $\qquad$ (D) $y = 2/x$

4.3.2 Due grandezze x e y sono legate dalla relazione $x = 2/y^2$. Se x triplica, allora y diventa

(A) 2/3 del valore iniziale $\qquad$ (B) $1/\sqrt{3}$ del valore iniziale

(C) 1/3 del valore iniziale $\qquad$ (D) 1/9 del valore iniziale

4.3.3 Sia f la funzione definita da $f(x) = x^3 + 8$. Per quale x si ha che $f(x)$ è il doppio del valore della funzione in $x = 0$?

(A) 16 $\qquad$ (B) 0 $\qquad$ (C) 2 $\qquad$ (D) -2

4.3.4 In quanti punti si incontrano i grafici delle funzioni $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = |x|$?

(A) 4 $\qquad$ (B) 0 $\qquad$ (C) 1 $\qquad$ (D) 2

4.3.5 Si considerino i grafici delle funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = 2-x$. L'insieme degli x tali che il grafico di $f(x)$ è sotto il grafico di $g(x)$ è

(A) $[0,4)$ $\qquad$ (B) $[0,1)$ $\qquad$ (C) $[0,1) \cup (4,+\infty)$ $\qquad$ (D) $(1,+\infty)$

4.3.6 Tre variabili x, y e z diverse da zero verificano le relazioni $x = z^2 + z$ e $(y - 1)/z = 2$. Si esprima y^2 in funzione della sola variabile x.

(A) $y^2 = x^2 + 1$ (B) $y^2 = 2x + 1$ (C) $y^2 = (x + 1)^2$ (D) $y^2 = 4x + 1$

4.3.7 Sia f la funzione definita per ogni numero naturale n maggiore di 2 dalla formula $f(n) = 3(n - 2)$. Quale delle seguenti espressioni è costante?

(A) $f(n)/n$ (B) $f(n+1) - f(n)$ (C) $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ (D) $\dfrac{f(n+1)}{3n}$

4.3.8 Si consideri la successione così definita $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ per $n \geq 2$. Quanto vale a_6?

(A) 43 (B) 21 (C) 32 (D) 61

4.3.9 Si consideri la successione così definita $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 1/a_n$. Quanto vale a_{93}?

(A) 10^{-93} (B) 10^{93} (C) 10 (D) 1/10

4.3.10 Data la funzione $f(x) = x^2 - 1$, si consideri la successione così definita $a_1 = 0$, $a_{n+1} = f(a_n)$, per $n \geq 1$. Quanto vale a_{64}?

(A) -64 (B) -1 (C) 0 (D) 63

4.3.11 Costruiamo le due successioni $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ e $\{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ nel modo seguente $a_1 = 1$, $b_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + b_n$, $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ per $n \geq 1$. Quanto vale b_5?

(A) 6 (B) 11 (C) 17 (D) 30

4.3.12 La somma dei primi 100 numeri naturali multipli di 3 è uguale a

(A) 15150 (B) 5050 (C) 300 (D) 14850

4.3.13 La somma $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ è uguale a

(A) $\left(\frac{4}{5}\right)^N$ (B) $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^N$ (C) $1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{N+1}$ (D) $5 - 4\left(\frac{4}{5}\right)^N$

4.3.14 Una sola delle funzioni indicate sotto soddisfa la condizione $f(x) < 3$ per ogni x reale. Quale?

(A) $f(x) = 2^x - 3$ (B) $f(x) = 3 \cdot 2^{-x}$ (C) $f(x) = 3 - 2^x$ (D) 2^{x-3}

4.3.15 Sia α la soluzione dell'equazione $2^{-x} = 5$. Quale delle seguenti stime è corretta?

$(A)\quad -3 < \alpha < -2 \qquad (B)\quad -2 < \alpha < 0 \qquad (C)\quad 2 < \alpha < 4$

$(D)\quad -4 < \alpha < -3$

4.3.16 Una funzione f definita sull'insieme dei numeri naturali, ha la seguente proprietà $f(n+1) = 3f(n)$, per ogni n. Allora, sapendo che per un certo numero naturale m si ha $f(m) = 5$, si può dedurre che $f(2m)$ vale

$(A)\quad 2 \cdot 5^m \qquad (B)\quad 5 \cdot 3^m \qquad (C)\quad 15 \qquad (D)\quad 3 \cdot 5^m$

4.3.17 Della funzione $f(t) = c\,a^{-(t-t_0)}$, dove a e c sono due parametri positivi, sappiamo che $f(t_0) = 1$ e $f(t_0+2) = 16$. Possiamo quindi calcolare il valore di a e c. Quanto vale il rapporto a/c?

$(A)\quad 1/2 \qquad (B)\quad 2 \qquad (C)\quad 1/4 \qquad (D)\quad 4$

4.3.18 Se $\log_2 \sqrt{x} = 6$, allora

$(A)\quad x = 2^{12} \qquad (B)\quad x = 2^3 \qquad (C)\quad x = 2^6 \qquad (D)\quad x = 2^9$

4.3.19 Per ogni coppia di numeri x e $y > 0$, la funzione $f(x) = \log x$ soddisfa

$(A)\quad f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (B)\quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

$(C)\quad f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \qquad (D)\quad f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$

4.3.20 Quanto vale $\log_3(1/9)$?

$(A)\quad 1/2 \qquad (B)\quad \sqrt{2} \qquad (C)\quad -2$ $\qquad (D)$ non esiste

4.3.21 Se $\log_3(6/x) = 2$, allora x è uguale a

$(A)\quad 2/3 \qquad (B)\quad 1/3 \qquad (C)\quad 2 \qquad (D)\quad 3/2$

4.3.22 La soluzione dell'equazione $\log_2(\log_3 x) = 3$ è

$(A)\quad 3 \qquad (B)\quad 3^4 \qquad (C)\quad 3^6 \qquad (D)\quad 3^8$

4.3.23 Sia α la soluzione dell'equazione $\log_2(x+1) = -2$. Allora

$(A)\quad -\dfrac{3}{2} < \alpha < -1 \qquad (B)\quad -1 < \alpha < -\dfrac{1}{2} \qquad (C)\quad \dfrac{1}{2} < \alpha < 0 \qquad (D)\quad 0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$

4.3.24 È data la funzione $f(x) = 3^{2x-1}$. Tra le funzioni indicate sotto ce n'è una e una sola tale che $f(g(t)) = t$ per tutti i numeri reali t positivi. Quale?

$(A)\quad g(t) = \sqrt{\log_3 t - 3} \qquad (B)\quad g(t) = \log_3 \sqrt{3t} \qquad (C)\quad g(t) = \log_3 \sqrt{t+1}$

$(D)\quad g(t) = \sqrt{\log_3 t}/6$

4.3.25 Quale delle seguenti affermazioni sulla funzione $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$ è corretta?

(A) È una funzione positiva (B) È una funzione limitata

(C) È una funzione crescente per ogni x reale

(D) Il grafico di f è simmetrico rispetto all'asse delle y

4.3.26 Sia $x = \log_{10}(2^{10})$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

(A) $x > 100$ (B) $30 < x < 40$ (C) $4 < x < 5$ (D) $3 < x < 4$

4.3.27 Sia $x = \log_{10}(4^{13} \cdot 5^{28})$. Quale delle seguenti è corretta?

(A) $28 < x < 29$ (B) $29 < x < 30$ (C) $26 < x < 27$ (D) $27 < x < 28$

4.3.28 Una popolazione è data al tempo t dalla legge $p(t) = c \cdot 2^{-t}$, dove c è una costante. Si ha evidentemente $p(0) = c$. La popolazione si riduce ad un terzo di c dopo un tempo t pari a

(A) $\log_3(1/c)$ (B) $\log_3 2$ (C) $(\log_2 3)/c$ (D) $\log_2 3$

4.3.29 La relazione fra il livello sonoro y e intensità sonora x di un rumore è $y = \log_{10} x + 12$. Allora se la differenza tra i livelli sonori di due rumori vale 2, quanto vale il rapporto tra le loro intensità sonore?

(A) 20 (B) 112 (C) 100 (D) 24

4.3.30 Si consideri la funzione $y = a \sin x + b$, dove a e b sono due parametri positivi. Il valore massimo della funzione è 3 e il grafico della funzione è tangente all'asse x. Quanto vale a?

(A) 1/3 (B) 3/4 (C) 2/3 (D) 3/2

4.3.31 È dato il triangolo rettangolo di vertici $A = (3, 0)$, $B = (0, -2)$ e $C = (0, 0)$. Indicati con α e β gli angoli in A e in B, si dica quale tra le seguenti relazioni è corretta.

(A) $\tan\beta < \cos\alpha$ (B) $\sin\beta < \cos\alpha$ (C) $\cos\beta < \cos\alpha$

(D) $\tan\beta < \tan\alpha$

4.3.32 Due angoli di un triangolo hanno ampiezza α e il terzo angolo ha ampiezza β. Si sa che $\sin\alpha = 0.8$. Allora $\sin\beta$ è uguale a

(A) 0.48 (B) 0.64 (C) 0.72 (D) 0.96

4.3.33 Su un terreno orizzontale è posta un'asta verticale. Se la sua ombra ha lunghezza b quando i raggi del sole formano un angolo α con il suolo, la sua altezza è

(A) $\dfrac{b}{\sin\alpha}$ (B) $\dfrac{b}{\tan\alpha}$ (C) $b\tan\alpha$ (D) $\dfrac{b}{\cos\alpha}$

4.3.34 La retta che passa per i punti $P = (-2, 0)$ e $Q = (5, 4)$, forma un angolo β con l'asse delle x. Quanto vale $\tan\beta$?

(A) $7/4$ (B) $5/4$ (C) $4/5$ (D) $4/7$

4.3.35 Di un triangolo ABC rettangolo in B sappiamo che l'ampiezza dell'angolo in A è α e che $BC = \tan\alpha$. Allora AC è uguale a

(A) $\sqrt{1+\cos^2\alpha}$ (B) $\sqrt{1+\tan^2\alpha}$ (C) $\sqrt{\tan^2\alpha+\cos^2\alpha}$

(D) $\sqrt{1+\sin^2\alpha}$

4.3.36 I lati uguali di un triangolo isoscele sono lunghi a e formano un angolo 2γ. L'area del triangolo è

(A) $a^2\sin\gamma\cos\gamma$ (B) $(a^2\sin\gamma)/2$ (C) $a^2\cos 2\gamma$ (D) $a^2\sin^2\gamma$

4.3.37 Si consideri la funzione $f(x) = \sin(\omega x)$, dove ω è una costante positiva. Se $f(a) = 0$ e $f(b) = 1$, qual è la minima distanza possibile fra a e b?

(A) $\dfrac{\pi}{2\omega}$ (B) $\dfrac{\pi}{\omega}$ (C) $\dfrac{2\pi}{\omega}$ (D) $\dfrac{\pi}{4\omega}$

4.3.38 Quale delle seguenti funzioni ha periodo π?

(A) $\sin(x^2)$ (B) $\sin^2 x$ (C) $\sin x+\sin^2 x$ (D) $\sin x+\cos x$

4.3.39 Quale delle seguenti funzioni ha periodo π?

(A) $2\sin x$ (B) $2\sin(x/2)$ (C) $\sin 2x$ (D) $\sin(x/2)$

4.3.40 Qual è tra i seguenti l'intervallo di lunghezza maggiore sul quale la funzione $f(x) = \sin x$ è invertibile?

(A) $[0, \pi/2]$ (B) $[-\pi/2, \pi/2]$ (C) $[0, \pi]$ (D) $[-\pi, \pi]$

4.3.41 L'equazione $\sin 2x = 2\sin x$ è verificata

(A) per ogni x (B) per nessun x

(C) solo per $x = 2k\pi$ con k numero intero qualsiasi

(D) solo per $x = k\pi$ con k numero intero qualsiasi

4.3.42 Indica quale delle seguenti funzioni ha la proprietà: "per ogni coppia di numeri x_1 e x_2 del dominio, se $x_1 > x_2$ allora $f(x_1) > f(x_2)$"

(A) $f(x) = |x|$ (B) $f(x) = \cos x$ (C) $f(x) = \log_{10} x$ (D) $f(x) = 1/x$