LMB - Informatica - Prova di esame del 2 Ottobre 2015

Attenzione: Questo documento presenta per ognuno degli esercizi proposti una possibile soluzione che sarebbe stata considerata corretta e ben valutata dai docenti. Naturalmente ci possono essere soluzioni corrette anche molto diverse da quelle proposte.

1. Fornire un controesempio alla congettura che

   "Per ogni A, B, C tali che $B \subseteq A$ e $C \subseteq B$ si ha $A \setminus B \subseteq B \setminus C$".

   Soluzione: Dai diagrammi di Eulero-Venn, sotto le ipotesi $B \subseteq A$ e $C \subseteq B$, si nota che $A \setminus B$ e $B \setminus C$ sono aree disgiunte.

   Per costruire un controesempio all'inclusione $A \setminus B \subseteq B \setminus C$, basta che l'insieme $A \setminus B$ contenga un elemento. Ad esempio, possiamo considerare $A = \{1\}$, $B = \varnothing$ e $C = \varnothing$: le ipotesi $B \subseteq A$ e $C \subseteq B$ sono soddisfatte, ma $A \setminus B = \{1\} \not\subseteq \varnothing = B \setminus C$.

2. Sapendo che *"indossi il maglione solo se hai freddo"* e che *"non indossi il maglione"*, possiamo concludere che *"non hai freddo"*?
   Motivare la risposta formalizzando gli enunciati.

   Soluzione: La risposta è: **NO**, dalle premesse non possiamo concludere che non hai freddo.

   Per motivare la risposta, fissiamo i simboli proposizionali M per *"indossi il maglione"* e F per *"hai freddo"*. Usando questi simboli formalizziamo l'inferenza con la seguente formula:

   $$A = (((M \Rightarrow F) \wedge \neg M) \Rightarrow \neg F)$$

   Si noti che *"indossi il maglione solo se hai freddo"* è stato formalizzato con l'implicazione $(M \Rightarrow F)$, come discusso ampiamente a lezione e esercitazione. L'esercizio chiede se l'inferenza è valida, quindi bisogna controllare se la formula A è una tautologia.

   Se A non è una tautologia dobbiamo essere in grado trovare un'interpretazione che la rende falsa. Trattandosi di un'implicazione, questo è possibile solo se troviamo un'interpretazione che rende vera la premessa $((M \Rightarrow F) \wedge \neg M)$ e falsa la conclusione $\neg F$. Affinché $\neg F$ sia falsa occorre che F sia vera. Affinché $((M \Rightarrow F) \wedge \neg M)$ sia vera bisogna che entrambe le formule $(M \Rightarrow F)$ e $\neg M$ siano vere. Dato che F è vera, basta assumere M falsa. Quindi l'interpretazione $\{M \mapsto 0, F \mapsto 1\}$ rende falsa la formula A dimostrando che non è una tautologia. Di conseguenza l'inferenza proposta non è valida, e il controesempio mostra perché: date le premesse, è possibile che *"tu non indossi il maglione"* ma *"hai freddo"*.

3. Dimostrare, procedendo per sostituzione, che le seguenti formule proposizionali sono equivalenti:

   (a) $((P \Rightarrow (P \wedge R)) \Rightarrow \neg Q)$

   (b) $(Q \Rightarrow (\neg R \wedge (\neg P \Rightarrow R)))$

Soluzione: Procediamo per sostituzione per semplificare entrambe le formule, cercando di ricondurle alla stessa formula:

(a) $(\,(P \Rightarrow (P \wedge R)) \;\Rightarrow\; \neg Q\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (elim. implicazione) }\}$
$(\,\neg(P \Rightarrow (P \wedge R)) \;\vee\; \neg Q\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (elim. implicazione) }\}$
$(\,\neg(\neg P \vee (P \wedge R)) \;\vee\; \neg Q\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (complemento) }\}$
$(\,\neg(\neg P \vee R) \;\vee\; \neg Q\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (De Morgan) }\}$
$(\,(\neg\neg P \wedge \neg R) \;\vee\; \neg Q\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (doppia neg.) }\}$
$(\,(P \wedge \neg R) \;\vee\; \neg Q\,)$

(b) $(\,Q \;\Rightarrow\; (\,\neg R \wedge (\neg P \;\Rightarrow\; R))\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (elim. implicazione) }\}$
$(\,\neg Q \;\vee\; (\,\neg R \wedge (\neg P \;\Rightarrow\; R))\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (elim. implicazione) }\}$
$(\,\neg Q \;\vee\; (\,\neg R \wedge (\neg\neg P \;\vee\; R))\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (doppia negazione) }\}$
$(\,\neg Q \;\vee\; (\,\neg R \wedge (P \;\vee\; R))\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (comm.) }\}$
$(\,\neg Q \;\vee\; (\,\neg R \wedge (R \;\vee\; P))\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (complemento) }\}$
$(\,\neg Q \;\vee\; (\,\neg R \wedge P)\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (comm.) }\}$
$(\,\neg Q \;\vee\; (\,P \wedge \neg R)\,)$
$\equiv \quad \{\text{ (comm.) }\}$
$(\,(P \wedge \neg R) \;\vee\; \neg Q\,)$

4. Senza costruire l'intera tabella di verità, fornire due interpretazioni che dimostrano che la formula

$$(\,(P \Leftrightarrow Q) \;\wedge\; (\,(Q \wedge R) \Rightarrow (S \Rightarrow (Q \wedge R))\,)\,)$$

è soddisfacibile e che non è una tautologia.

Soluzione: Trattandosi di una congiunzione, per dimostrare che la formula è soddisfacibile bisogna fornire una interpretazione che renda vere entrambe le formule $(P \Leftrightarrow Q)$ e $(\,(Q \wedge R) \Rightarrow (S \Rightarrow (Q \wedge R))\,)$. Per la prima, possiamo assumere che P e Q siano entrambe vere. Per la seconda, trattandosi di un'implicazione, basta rendere falsa la premessa $(Q \wedge R)$, assumendo che R sia falsa. A questo punto l'interpretazione di S è ininfluente: ad esempio l'interpretazione $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 1, R \mapsto 0, S \mapsto 1\}$ dimostra che la formula è soddisfacibile.

Per dimostrare che non è una tautologia, dobbiamo trovare un'interpretazione che renda falsa una tra $(P \Leftrightarrow Q)$ e $(\,(Q \wedge R) \Rightarrow (S \Rightarrow (Q \wedge R))\,)$. Assumendo che P sia vera e Q sia falsa si ha che $(P \Leftrightarrow Q)$ risulta falsa. A questo punto l'interpretazione di R e S è ininfluente: ad esempio l'interpretazione $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 0, R \mapsto 1, S \mapsto 1\}$ dimostra che la formula non è una tautologia.

Riportiamo sotto le corrispondenti righe della tabella di verità.

P	Q	R	S	$((P$	$\Leftrightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$((Q$	$\wedge$	$R)$	$\Rightarrow$	$(S$	$\Rightarrow$	$(Q$	$\wedge$	$R))))$
1	1	0	1	1	1	1	**1**	1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	**0**	0	0	1	1	1	0	0	0	1
				(1)	(2)	(1)	(5)	(1)	(2)	(1)	(4)	(1)	(3)	(1)	(2)	(1)

5. Formalizzare l'enunciato *"ogni parente di Alice abita a Milano, ma Bruno ha un parente che abita a Torino"* utilizzando le costanti *Alice*, *Bruno*, *Milano* e *Torino* e i simboli di predicato binari $parenteDi(\_,\_)$ e $abitaA(\_,\_)$ interpretati in modo standard sul dominio delle persone e delle città.

   Soluzione:

   $$(\,(\forall x\,.\,(parenteDi(x,Alice) \Rightarrow abitaA(x,Milano))) \wedge (\exists y\,.\,(parenteDi(y,Bruno) \wedge abitaA(y,Torino)))\,)$$

6. Dimostrare che le seguenti formule predicative sono logicamente equivalenti:

   (a) $(\forall x\,.\,(\exists y\,.\,(P(x,y) \;\Rightarrow\; \neg Q(x,y))))$

   (b) $\neg\big(\exists x\,.\,\big((\forall y\,.\,Q(x,y)) \wedge \neg(\exists y\,.\,\neg P(x,y))\big)\big)$

   Soluzione: Procediamo per sostituzione per semplificare entrambe le formule, cercando di ricondurle alla stessa formula:

$$\begin{array}{l}
\text{(a) } (\forall x\,.\,(\exists y\,.\,\underline{(P(x,y) \;\Rightarrow\; \neg Q(x,y))})) \\
\equiv \qquad \{\ \text{(Elim-}\Rightarrow\text{)}\ \} \\
(\forall x\,.\,(\underline{\exists y\,.\,(\neg P(x,y) \;\vee\; \neg Q(x,y))})) \\
\equiv \qquad \{\ \text{(distrib.)}\ \} \\
(\forall x\,.\,((\exists y\,.\,\neg P(x,y)) \;\vee\; (\exists y\,.\,\neg Q(x,y))))
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\text{(b) } \neg\big(\exists x\,.\,\big((\forall y\,.\,Q(x,y)) \wedge \neg(\exists y\,.\,\neg P(x,y))\big)\big) \\
\equiv \qquad \{\ \text{(De Morgan)}\ \} \\
\big(\forall x\,.\,\underline{\neg\big((\forall y\,.\,Q(x,y)) \wedge \neg(\exists y\,.\,\neg P(x,y))\big)}\big) \\
\equiv \qquad \{\ \text{(De Morgan)}\ \} \\
\big(\forall x\,.\,\big(\underline{\neg(\forall y\,.\,Q(x,y))} \vee \underline{\neg\neg(\exists y\,.\,\neg P(x,y))}\big)\big) \\
\equiv \qquad \{\ \text{(De Morgan + doppia neg.)}\ \} \\
\big(\forall x\,.\,\big(\underline{(\exists y\,.\,\neg Q(x,y)) \vee (\exists y\,.\,\neg P(x,y))}\big)\big) \\
\equiv \qquad \{\ \text{(comm.)}\ \} \\
(\forall x\,.\,((\exists y\,.\,\neg P(x,y)) \;\vee\; (\exists y\,.\,\neg Q(x,y))))
\end{array}$$