LMB - Informatica - Prova di esame del 26 Settembre 2016

Attenzione: Questo documento presenta per ognuno degli esercizi proposti una possibile soluzione che sarebbe stata considerata corretta e ben valutata dai docenti. Naturalmente ci possono essere soluzioni corrette anche molto diverse da quelle proposte.

1. Sfruttando i diagrammi di Eulero/Venn fornire un **<u>controesempio concreto</u>** alla congettura che

   "Per ogni A, B, C *tali che* $A \subseteq B \cup \overline{C}$ *e* $B \subseteq A \cup \overline{C}$ *si ha* $A \cap B \subseteq \overline{C}$*".*

   Soluzione: Dai diagrammi di Eulero-Venn, sotto le ipotesi $A \subseteq B \cup \overline{C}$ e $B \subseteq A \cup \overline{C}$, si nota che le aree $A \cap \overline{B} \cap C$ e $\overline{A} \cap B \cap C$ sono le sole necessariamente vuote.

   Per costruire un controesempio all'inclusione $A \cap B \subseteq \overline{C}$, basta che l'insieme $A \cap B \cap C$ contenga un elemento. Ad esempio, possiamo considerare $A = B = C = \{1\}$ nell'universo con il solo elemento 1: le ipotesi $A \subseteq B \cup \overline{C}$ e $B \subseteq A \cup \overline{C}$ sono soddisfatte, ma $A \cap B = \{1\} \not\subseteq \varnothing = \overline{C}$.

2. Sapendo che *"devi scrivere una lettera se te lo chiede il capoufficio"* e che *"il capoufficio non ti chiede di scrivere una lettera"*, possiamo concludere che *"non devi scrivere una lettera"*?
   Motivare la risposta formalizzando gli enunciati.

   Soluzione: La risposta è: **NO**, dalle premesse non possiamo concludere che non devi scrivere una lettera.

   Per motivare la risposta, fissiamo i simboli proposizionali L per *"devi scrivere una lettera"* e C per *"te lo chiede il capoufficio"*. Usando questi simboli formalizziamo l'inferenza con la seguente formula:

   $$A = (((C \Rightarrow L) \wedge \neg C) \Rightarrow \neg L)$$

   L'esercizio chiede se l'inferenza è valida, quindi bisogna controllare se la formula A è una tautologia.

   Se A non è una tautologia dobbiamo essere in grado trovare un'interpretazione che la rende falsa. Trattandosi di un'implicazione, questo è possibile solo se troviamo un'interpretazione che rende vera la premessa $((C \Rightarrow L) \wedge \neg C)$ e falsa la conclusione $\neg L$. Affinché $\neg L$ sia falsa occorre che L sia vera. Affinché $((C \Rightarrow L) \wedge \neg C)$ sia vera bisogna che entrambe le formule $(C \Rightarrow L)$ e $\neg C$ siano vere. Dato che L è vera, basta assumere C falsa. Quindi l'interpretazione $\{L \mapsto 1, C \mapsto 0\}$ rende falsa la formula A dimostrando che non è una tautologia. Di conseguenza l'inferenza proposta non è valida, e il controesempio mostra perché: date le premesse, è possibile che *"tu debba scrivere la lettera"* anche se *"il capoufficio non te lo chiede"*.

3. Dimostrare, procedendo per sostituzione, che le seguenti formule proposizionali sono equivalenti:

   (a) $(\ (P \vee \neg Q) \ \Rightarrow\ (R \Rightarrow P)\ )$

   (b) $(\ ((\neg P \wedge \neg Q) \ \Rightarrow\ \neg R) \vee (R \ \Rightarrow\ (\neg Q \wedge P))\ )$

   Soluzione: Procediamo per sostituzione per semplificare entrambe le formule, cercando di ricondurle alla stessa formula:

$$
\begin{array}{l}
\text{(a) } (\ \underline{(P \vee \neg Q) \ \Rightarrow\ (\underline{R \Rightarrow P})}\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (elim. implicazione } \times 2) \ \} \\
(\ \underline{\neg(P \vee \neg Q)} \vee (\neg R \vee P)\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (De Morgan) } \} \\
(\ (\neg P \wedge \underline{\neg\neg Q}) \vee (\neg R \vee P)\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (doppia neg.) } \} \\
(\ \underline{(\neg P \wedge Q) \vee (\neg R \vee P)}\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (assoc. + comm.) } \} \\
(\ (P \vee (\neg P \wedge Q)) \vee \neg R\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (complemento) } \} \\
(\ (P \vee Q) \vee \neg R\ )
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{(b) } (\ (\underline{(\neg P \wedge \neg Q) \ \Rightarrow\ \neg R}) \vee (\underline{R \ \Rightarrow\ (\neg Q \wedge P)})\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (elim. implicazione } \times 2) \ \} \\
(\ (\underline{\neg(\neg P \wedge \neg Q)} \vee \neg R) \vee (\neg R \vee (\neg Q \wedge P))\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (De Morgan) } \} \\
(\ ((\underline{\neg\neg P} \vee \underline{\neg\neg Q}) \vee \neg R) \vee (\neg R \vee (\neg Q \wedge P))\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (doppia neg. } \times 2) \ \} \\
(\ \underline{((P \vee Q) \vee \neg R) \vee (\neg R \vee (\neg Q \wedge P))}\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (assoc. + comm.) } \} \\
(\ (P \vee (P \wedge \neg Q)) \vee (Q \vee (\underline{\neg R \vee \neg R}))\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (idem.) } \} \\
(\ (\underline{P \vee (P \wedge \neg Q)}) \vee (Q \vee \neg R)\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (assorbimento) } \} \\
(\ \underline{P \ \vee\ (Q \vee \neg R)}\ ) \\
\equiv \qquad \{ \text{ (assoc. + comm.) } \} \\
(\ (P \vee Q) \vee \neg R\ )
\end{array}
$$

4. Senza costruire l'intera tabella di verità, fornire due interpretazioni che dimostrano che la formula

$$(((P \Rightarrow (Q \wedge \neg R)) \wedge \neg(P \Rightarrow R)) \ \Rightarrow\ (P \wedge \neg S))$$

   è soddisfacibile ma che non è una tautologia.

   Soluzione: Trattandosi di una implicazione, per dimostrare che la formula non è una tautologia occorre fornire una interpretazione che renda vera la premessa $((P \Rightarrow (Q \wedge \neg R)) \wedge \neg(P \Rightarrow R))$ e renda falsa la conseguenza $(P \wedge \neg S)$. Poiché la conseguenza è una congiunzione, per renderla falsa è sufficiente che P sia falsa oppure che $\neg S$ sia falsa, cioè che S sia vera. Analizziamo ora la premessa nei due casi. Se P è falsa, l'implicazione $(P \Rightarrow R)$ è vera e quindi $\neg(P \Rightarrow R)$ è falsa, rendendo falsa tutta la premessa. Quindi P deve essere vera, e anche S deve essere vera per rendere falsa la conseguenza. Essendo P vero, la prima parte della premessa, $(P \Rightarrow (Q \wedge \neg R))$, è vera solo se Q è vera e R è falsa. Si vede facilmente che con questi valori anche la seconda parte della premessa è vera. Quindi l'interpretazione $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 1, R \mapsto 0, S \mapsto 1\}$ è un controesempio che mostra che la formula proposta non è una tautologia.

   Per il modo in cui è stata determinata, è facile convincersi che l'interpretazione $\{P \mapsto 1, Q \mapsto 1, R \mapsto 0, S \mapsto 1\}$ è l'unica che rende falsa la formula. Per mostrare che la formula è soddisfacible basta considerare una qualunque altra interpretazione (per esempio $\{P \mapsto 0, Q \mapsto 0, R \mapsto 0, S \mapsto 0\}$) e verificare che rende la formula vera.

Riportiamo sotto le corrispondenti righe della tabella di verità.

P	Q	R	S	$(((P$	$\Rightarrow$	$(Q$	$\wedge$	$\neg$	$R))$	$\wedge$	$\neg$	$(P$	$\Rightarrow$	$R))$	$\Rightarrow$	$(P$	$\wedge$	$\neg$	$S))$
1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
				(1)	(4)	(1)	(3)	(2)	(1)	(5)	(3)	(1)	(2)	(1)	(6)	(1)	(3)	(2)	(1)

5. Formalizzare l'enunciato *"ogni numero ha almeno un multiplo, ma non tutti i multipli di 2 sono multipli di 3"* utilizzando le costanti *2* e *3* e il simbolo di predicato binario *multiploDi*(_, _) interpretati in modo standard sul dominio dei numeri naturali.[1]

   Soluzione:

   $$(\ (\forall x.\ (\exists y.\ \textbf{\textit{multiploDi}}(y,x)))\ \wedge\ \neg(\forall x.\ (\textbf{\textit{multiploDi}}(x,2) \Rightarrow \textbf{\textit{multiploDi}}(x,3)))\ )$$

6. Dimostrare che le seguenti formule predicative sono logicamente equivalenti:

   (a) $(\ (\forall x\,.\,Q(x))\ \Rightarrow\ (\exists x\,.\,P(x))\ )$

   (b) $(\ \exists x\,.\,(Q(x) \Rightarrow (P(x) \wedge Q(x)))\ )$

   Soluzione: Procediamo per sostituzione per semplificare entrambe le formule, cercando di ricondurle alla stessa formula:

   (a) $(\ \underline{(\forall x\,.\,Q(x))\ \Rightarrow\ (\exists x\,.\,P(x))}\ )$
   $\equiv \quad \{\ (\text{Elim-}\Rightarrow)\ \}$
   $(\ \underline{\neg(\forall x\,.\,Q(x))}\ \vee\ (\exists x\,.\,P(x))\ )$
   $\equiv \quad \{\ (\text{De Morgan})\ \}$
   $(\ \underline{(\exists x\,.\,\neg Q(x))\ \vee\ (\exists x\,.\,P(x))}\ )$
   $\equiv \quad \{\ (\text{distrib.})\ \}$
   $(\ \exists x\,.\,(\neg Q(x)\ \vee\ P(x))\ )$

   (b) $(\ \exists x\,.\,(\underline{Q(x) \Rightarrow (P(x) \wedge Q(x))})\ )$
   $\equiv \quad \{\ (\text{Elim-}\Rightarrow)\ \}$
   $(\ \exists x\,.\,(\neg Q(x) \vee (P(x) \wedge \underline{Q(x)}))\ )$
   $\equiv \quad \{\ (\text{doppia neg.})\ \}$
   $(\ \exists x\,.\,(\neg Q(x) \vee (\underline{P(x) \wedge \neg\neg Q(x)}))\ )$
   $\equiv \quad \{\ (\text{comm.})\ \}$
   $(\ \exists x\,.\,(\underline{\neg Q(x) \vee (\neg\neg Q(x) \wedge P(x))})\ )$
   $\equiv \quad \{\ (\text{complemento})\ \}$
   $(\ \exists x\,.\,(\neg Q(x) \vee P(x))\ )$

[1] Il predicato *multiploDi*(x,y) afferma che "x è un multiplo di y".