LMB - Informatica - Alcune soluzioni

1.6.1.11 Descrivete una procedura per verificare se un dato numero naturale n è primo oppure no.

Soluzione: Un possibile modo di procedere (ma non l'unico e non il migliore) è il seguente: diciamo che un numero naturale d *divide* n se il resto della divisione d/n è 0. Si tenta di dividere n per ciascun numero d maggiore di 1 e minore di n. Se troviamo un valore d che divide n allora possiamo asserire che n non è primo. In caso contrario (cioè se nessuno dei numeri maggiori di 1 e minori di n divide n) possiamo concludere che n è primo.

Alcune ottimizzazioni: Alcune semplici considerazioni ci permettono di semplificare la procedura escludendo automaticamente alcuni controlli di divisibilità. Per esempio, possiamo escludere a priori di verificare la divisibilità per i numeri pari maggiori di 2 (perché se n fosse divisibile per uno di questi valori allora lo sarebbe anche per 2. Possiamo decidere di restringerci a considerare solo valori minori di o uguali a $n/2$ (perché n non può essere divisibile per un valore d maggiore di $n/2$ e minore di n: il quoziente dovrebbe essere compreso strettamente tra 1 e 2 e non ci sono numeri naturali che verificano questa proprietà). Possiamo decidere di restringerci a considerare solo valori minori di o uguali a $\sqrt{n}$ (perché se n fosse divisibile per un valore d maggiore di $\sqrt{n}$ allora lo sarebbe anche per un valore minore di $\sqrt{n}$: il quoziente n/d).

1.6.2.12 Dimostrare o confutare la seguente congettura: ogni intero positivo pari può essere espresso come il prodotto di due numeri pari.

Soluzione: La congettura è falsa. Per cercare un controesempio possiamo provare a verificare la congettura sui primi numeri pari. La congettura si rivela subito falsa se consideriamo l'intero 2: se esistessero due numeri pari $n = 2k$ e $m = 2h$ (per opportuni naturali positivi k, h) tali che $nm = 2$ si avrebbe $4hk = 2$ che è impossibile perché $4 > 2$ e necessariamente $hk \geq 1$.

1.6.3.1 (c) Si dimostri l'uguaglianza $a^n = a^{n-1}a$.

Soluzione:

$$
\begin{array}{ll}
 & a^{\underline{n}} \\
= & \qquad \{ \text{ (elemento neutro) della somma } x+0=x, \text{ al contrario } \} \\
 & a^{n+\underline{0}} \\
= & \qquad \{ \text{ (differenza) } x-x=0, \text{ al contrario } \} \\
 & a^{\underline{n+(1-1)}} \\
= & \qquad \{ \text{ (associatività) } \} \\
 & a^{\underline{(n+1)}-1} \\
= & \qquad \{ \text{ (commutatività) della somma } \} \\
 & a^{\underline{(1+n)-1}} \\
= & \qquad \{ \text{ (associatività) della somma } \} \\
 & a^{\underline{1+(n-1)}} \\
= & \qquad \{ \text{ (regola della somma) } x^{(y+z)} = x^y x^z \; \}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
 & a^1 a^{n-1} \\
= & \quad \{ \text{(commutatività) del prodotto} \} \\
 & a^{n-1}\underline{a^1} \\
= & \quad \{ \text{(esponente unitario) } x^1 = x \} \\
 & a^{n-1} a
\end{array}
$$