

Simulazione  
a.a. 2009/10  
Crescita di popolazioni

# Un semplice esempio: la dinamica di una popolazione

Si voglia studiare la crescita di una popolazione. Si hanno le seguenti **variabili** :

- livello: popolazione (numerosità);
- flussi: numero di nascite e di morti nell'unità di tempo (ad esempio all'anno);
- variabili ausiliarie: (tasso di nascita e tasso di mortalità).

# Un semplice esempio: la dinamica di una popolazione

- Popolazione:  $P(t)$
- Tasso di natalità:  $N$
- Tasso di mortalità:  $M$
- Nascite:  $N \times P(t)$
- Morti:  $M \times P(t)$

# Un semplice esempio: la dinamica di una popolazione

- Popolazione:  $P(t)$
- Tasso di natalità:  $N$
- Tasso di mortalità:  $M$
- Nascite:  $N \times P(t)$
- Morti:  $M \times P(t)$

$$\frac{dP(t)}{dt} = (N - M)P(t)$$

# Un semplice esempio: la dinamica di una popolazione

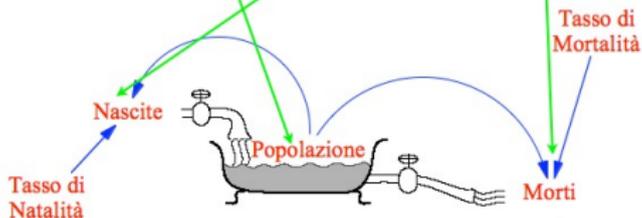
- Popolazione:  $P(t)$
- Tasso di natalità:  $N$
- Tasso di mortalità:  $M$
- Nascite:  $N \times P(t)$
- Morti:  $M \times P(t)$

$$\frac{dP(t)}{dt} = (N - M)P(t)$$

$$P(t + \Delta t) = P(t) + ((N - M)P(t))\Delta t$$

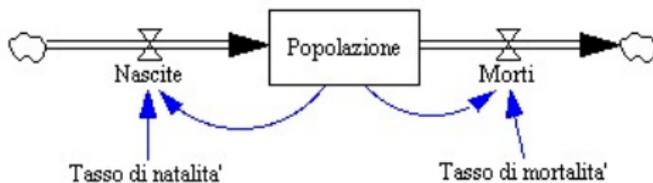
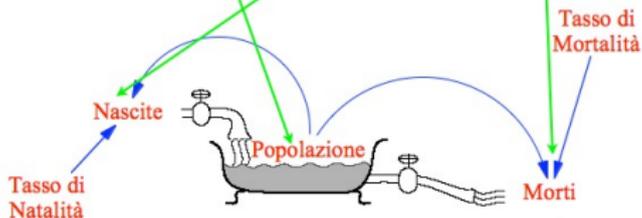
# Un possibile modello

$$P(t + \Delta t) = P(t) + (N \times P(t) - M \times P(t))\Delta t$$



# Un possibile modello

$$P(t + \Delta t) = P(t) + (N \times P(t) - M \times P(t))\Delta t$$



# Come varia la popolazione $P(t)$ nel tempo (1)

$$\frac{dP(t)}{dt} = NP(t) - MP(t) = (N - M)P(t)$$

$$\frac{dP(t)}{dt} - (N - M)P(t) = 0$$

$$e^{-(N-M)t} \frac{dP(t)}{dt} - (N - M)P(t)e^{-(N-M)t} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(P(t)e^{-(N-M)t}) = 0$$

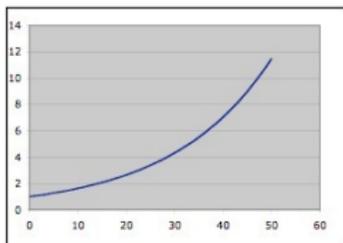
$$\int_0^t \frac{d}{ds}(P(s)e^{-(N-M)s}) = 0$$

## Come varia la popolazione $P(t)$ nel tempo (2)

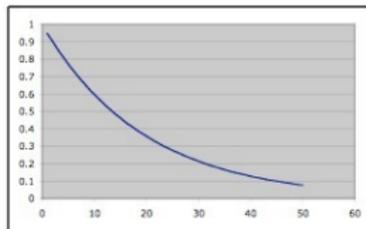
$$\int_0^t \frac{d}{ds}(P(s)e^{-(N-M)s}) = 0$$

$$P(t)e^{-(N-M)t} - P(0) = 0$$

$$P(t) = P(0)e^{(N-M)t}$$



$N > M$

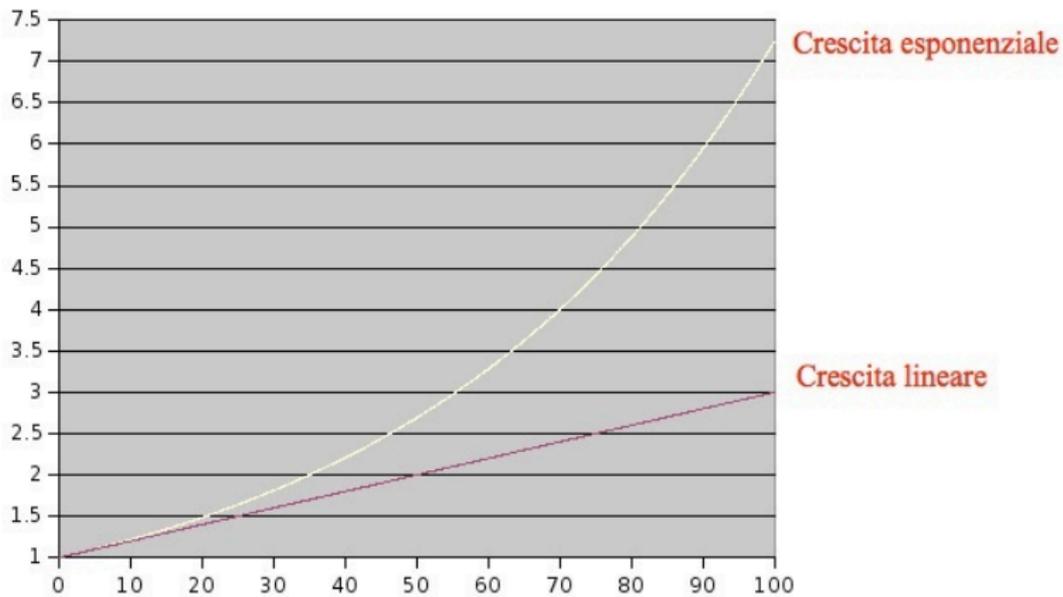


$N < M$

# Crescita esponenziale: i dati

	Crescita lineare (+.02)	Crescita esponenziale tasso del 0.02
0	1.0000	1.0000
1	1.0200	1.0200
2	1.0400	1.0404
3	1.0600	1.0612
4	1.0800	1.0824
5	1.1000	1.1041
6	1.1200	1.1262
7	1.1400	1.1487
8	1.1600	1.1717
9	1.1800	1.1951
10	1.2000	1.2190

# Crescita esponenziale: andamenti a confronto



Con un tasso di crescita del 2% annuo, si ha un raddoppio ogni 35 anni

# Discretizzazione (1)

$$\frac{dP(t)}{dt} - (N - M)P(t) = 0$$

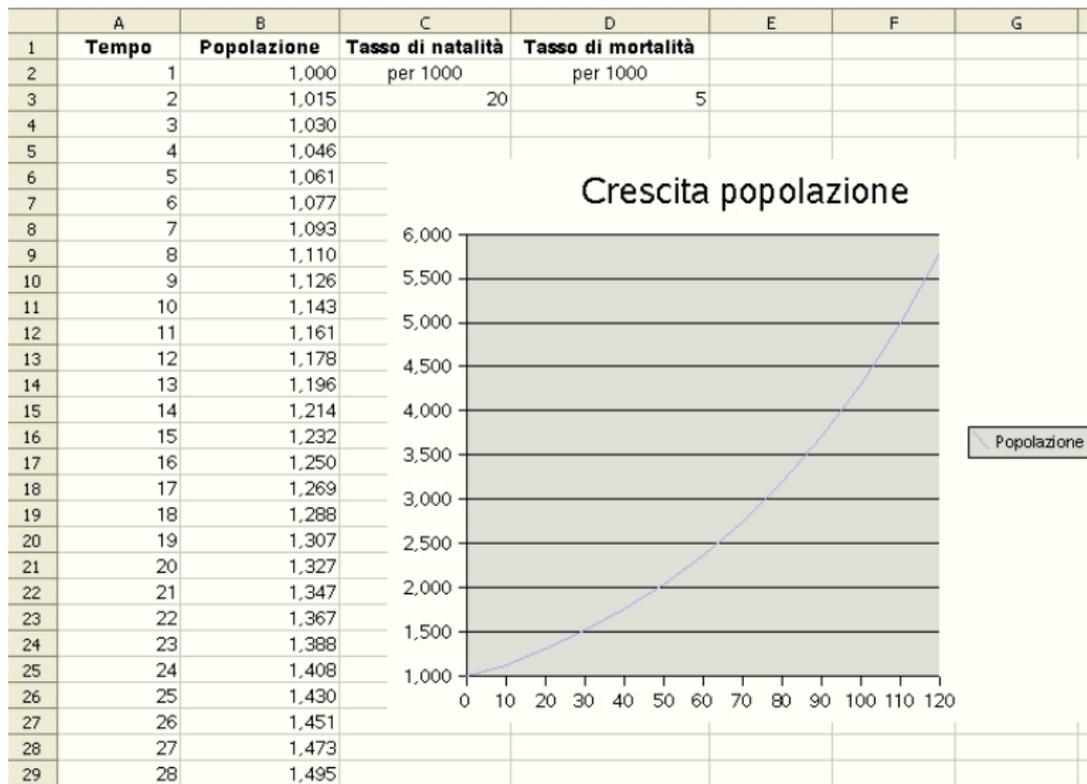


$$\frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = (N - M)P(t)$$



$$P(t + \Delta t) = P(t) + (N - M)P(t)\Delta t$$

# Discretizzazione (2)



$$B(n+1) = B_n + B_n * (\$C\$3 - \$D\$3) / 1000$$

## Discretizzazione (3)

$$P(t + 1) = P(t) + P(t)(N - M) = P(t)(1 + N - M) \quad (\text{se } \Delta t = 1)$$

## Discretizzazione (3)

$$P(t+1) = P(t) + P(t)(N - M) = P(t)(1 + N - M) \quad (\text{se } \Delta t = 1)$$

$$P(t+0.5) = P(t) + P(t)(N - M)0.5 = P(t)(1 + 0.5(N - M))$$

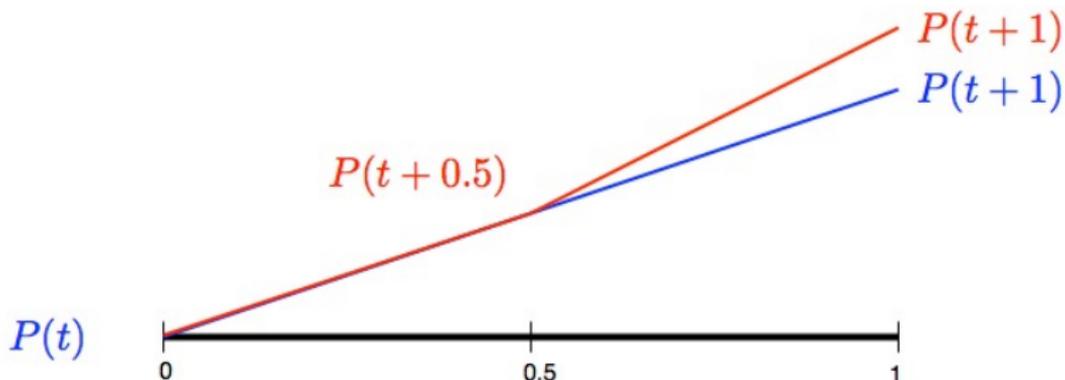
$$P(t+1) = P(t+0.5)(1 + 0.5(N - M)) = P(t)(1 + 0.5(N - M))^2$$

## Discretizzazione (3)

$$P(t+1) = P(t) + P(t)(N - M) = P(t)(1 + N - M) \quad (\text{se } \Delta t = 1)$$

$$P(t+0.5) = P(t) + P(t)(N - M)0.5 = P(t)(1 + 0.5(N - M))$$

$$P(t+1) = P(t+0.5)(1 + 0.5(N - M)) = P(t)(1 + 0.5(N - M))^2$$



# Una simulazione

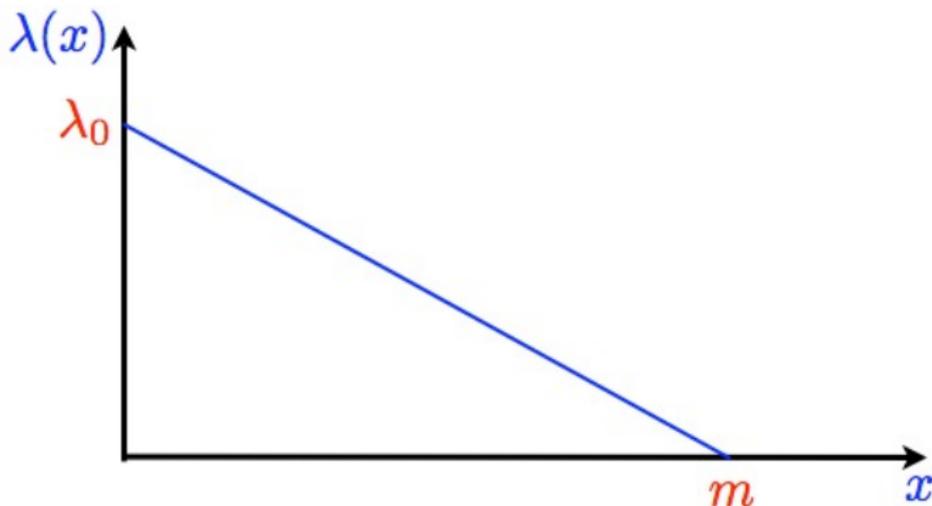
	A	B	C	D	E
1	Anni	Pop. (DT=1)	Pop. (DT=0.5)	Natalita'	Mortalita'
2	0	1.000.000	1.000.000		
3	1	1.020.000	1.020.100	0,05	0,03
4	2	1.040.400	1.040.604		
5	3	1.061.208	1.061.520		
6	4	1.082.432	1.082.857		
7	5	1.104.081	1.104.622		
8	6	1.126.162	1.126.825		
9	7	1.148.686	1.149.474		
10	8	1.171.659	1.172.579		
11	9	1.195.093	1.196.147		
12	10	1.218.994	1.220.190		
13	11	1.243.374	1.244.716		
14	12	1.268.242	1.269.735		
15	13	1.293.607	1.295.256		
16	14	1.319.479	1.321.291		
17	15	1.345.868	1.347.849		
18	16	1.372.786	1.374.941		
19	17	1.400.241	1.402.577		
20	18	1.428.246	1.430.769		
21	19	1.456.811	1.459.527		
22	20	1.485.947	1.488.864		
23	21	1.515.666	1.518.790		
24	22	1.545.980	1.549.318		
25	23	1.576.899	1.580.459		
26	24	1.608.437	1.612.226		

Consideriamo la crescita di una popolazione, assumendo che ci siano limiti alle risorse utilizzabili

- $x_0$  entità della popolazione al tempo  $t = 0$
- $\lambda_0$  massimo tasso di crescita (nel caso di risorse illimitate)
- $\lambda(x)$  tasso di crescita in funzione della popolazione  $x(t)$
- $m$  massima popolazione sostenibile, date le risorse (capacità di carico dell'ecosistema)

# Possibile andamento della funzione $\lambda(x)$

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{m-x}{m}$$



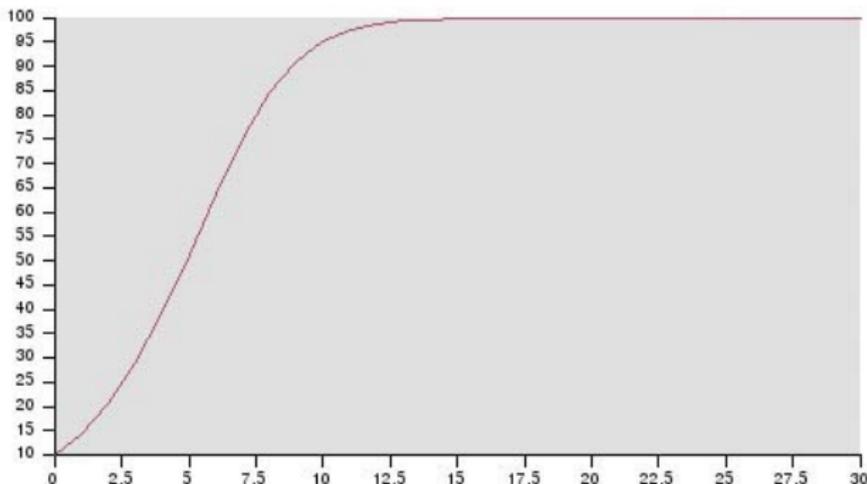
# Possibile andamento della funzione $x(t)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\lambda(x) = x(t)\lambda_0 \frac{m - x(t)}{m}$$

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{1 + \frac{x_0}{m}(e^{\lambda_0 t} - 1)}$$



Questa funzione viene detta **logistica** e il suo andamento è:



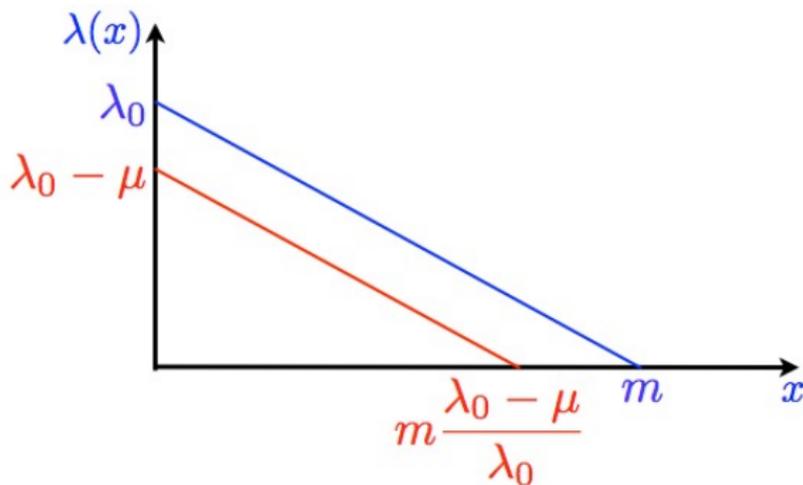
# Presenza di un tasso di mortalità costante

Supponiamo ora che  $\lambda_0 \frac{m-x}{m}$  sia il tasso di natalità e che ci sia un **tasso di mortalità**  $\mu$  costante. Il tasso di crescita sarà allora:

$$\lambda(x) = \lambda_0 \frac{m-x}{m} - \mu = \lambda'_0 \frac{m'-x}{m'}$$

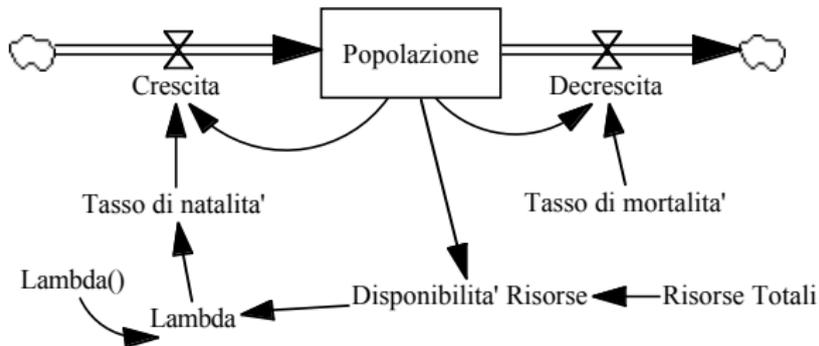
con

$$\lambda'_0 = \lambda_0 - \mu \text{ e } m' = m \frac{\lambda_0 - \mu}{\lambda_0}$$

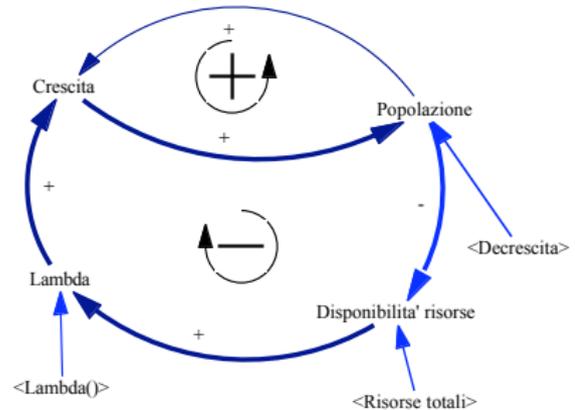
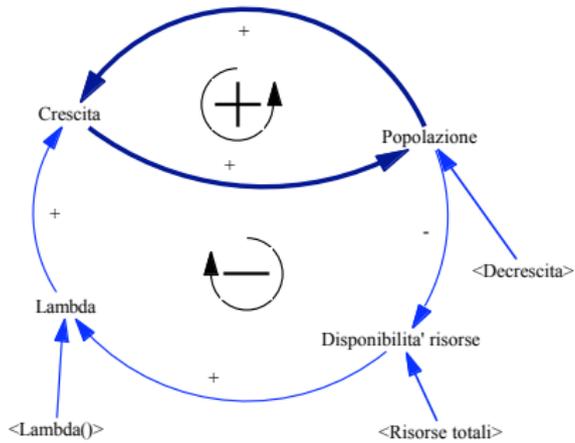


In presenza di un un **tasso di mortalità**  $\mu$  costante si ha:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$



# Cicli causali



# Condizioni di equilibrio

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

Nella dinamica della popolazione si raggiunge una condizione di equilibrio quando il numero di nati è uguale al numero dei morti, e quindi si ha che  $x(t)$  è costante.

# Condizioni di equilibrio

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

Nella dinamica della popolazione si raggiunge una condizione di equilibrio quando il numero di nati è uguale al numero dei morti, e quindi si ha che  $x(t)$  è costante.

$$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{m - x(t)}{m} = \mu$$

# Condizioni di equilibrio

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

Nella dinamica della popolazione si raggiunge una condizione di equilibrio quando il numero di nati è uguale al numero dei morti, e quindi si ha che  $x(t)$  è costante.

$$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{m - x(t)}{m} = \mu$$

$$\lambda_0 m - \lambda_0 x(t) = \mu m \quad \Rightarrow \quad x(t) \frac{\lambda_0}{m} = \lambda_0 - \mu m \quad \Rightarrow \quad x^*(t) = m \frac{\lambda_0 - \mu}{\lambda_0}$$

# Condizioni di equilibrio

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

Nella dinamica della popolazione si raggiunge una condizione di equilibrio quando il numero di nati è uguale al numero dei morti, e quindi si ha che  $x(t)$  è costante.

$$\lambda(t) = \lambda_0 \frac{m - x(t)}{m} = \mu$$

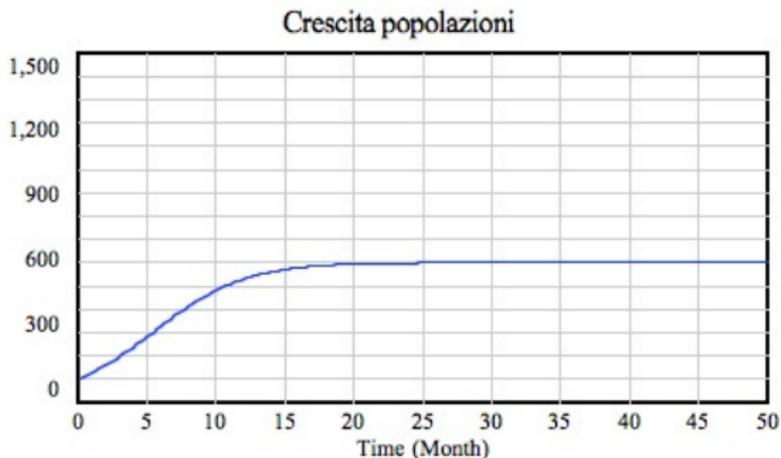
$$\lambda_0 m - \lambda_0 x(t) = \mu m \Rightarrow x(t) \frac{\lambda_0}{m} = \lambda_0 - \mu m \Rightarrow x^*(t) = m \frac{\lambda_0 - \mu}{\lambda_0}$$

$x^*(t)$  rappresenta il **valore di equilibrio della popolazione**

# Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (1)

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 0.5$
- $x^* = 1000 \frac{0.5 - 0.2}{0.5} = 600$



Lambda0 = 0.5 ————— popolazione

## Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (2)

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 1$
- $x^* = 1000 \frac{1-0.2}{1} = 800$



Lambda0 = 1

popolazione

## Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (3)

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 2$
- $x^* = 1000 \frac{2-0.2}{2} = 900$



Lambda0 = 2

popolazione

## Esempio di crescita di una popolazione $x(t)$ (4)

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$

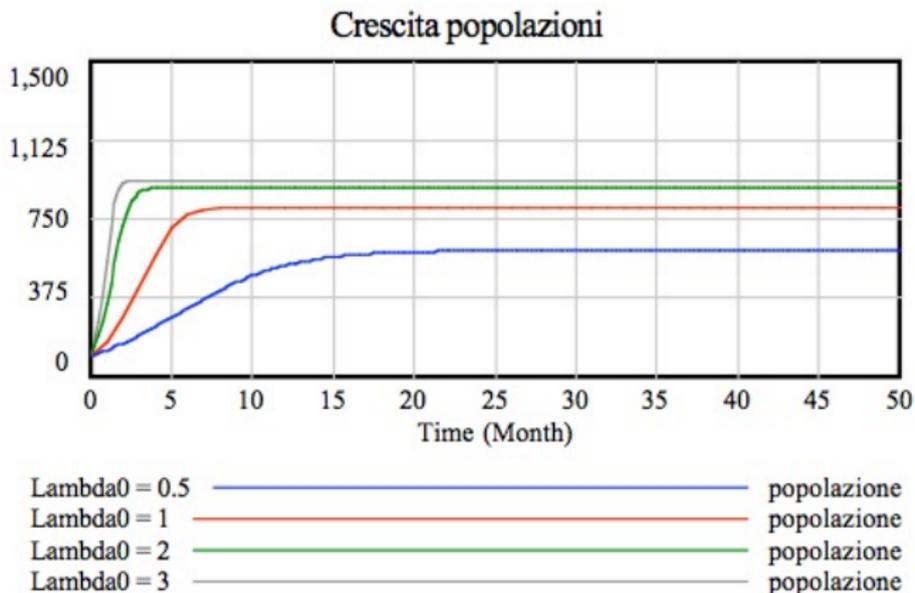
- $\mu = 0.2$
- $\lambda_0 = 3$
- $x^* = 1000 \frac{3-0.2}{3} = 933.33$



Lambda0 = 3 ————— popolazione

# Andamenti (1) – (4) a confronto

$$x(t + \Delta t) = x(t) + [\lambda(t)x(t) - \mu x(t)]\Delta t$$



# Caveat

Per i valori 2 e 3, abbiamo usato un valore di  $\Delta t$  pari a 0.25. Se avessimo usato un valore pari a 1 avremmo avuto andamenti caotici del tipo di quello riportato sotto.



dove:

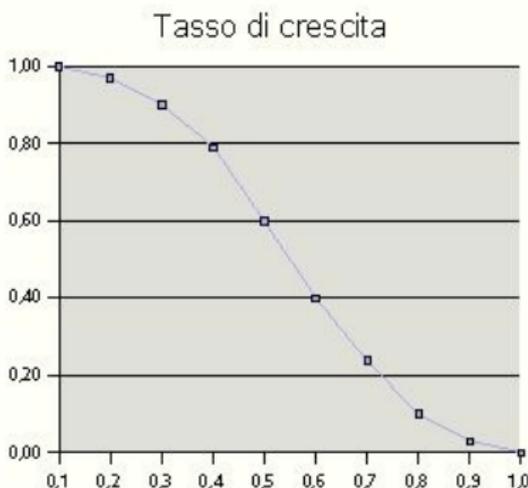
$$\mu = 0.2 \quad \lambda_0 = 3 \quad \Delta t = 1$$

# Andamenti non lineari

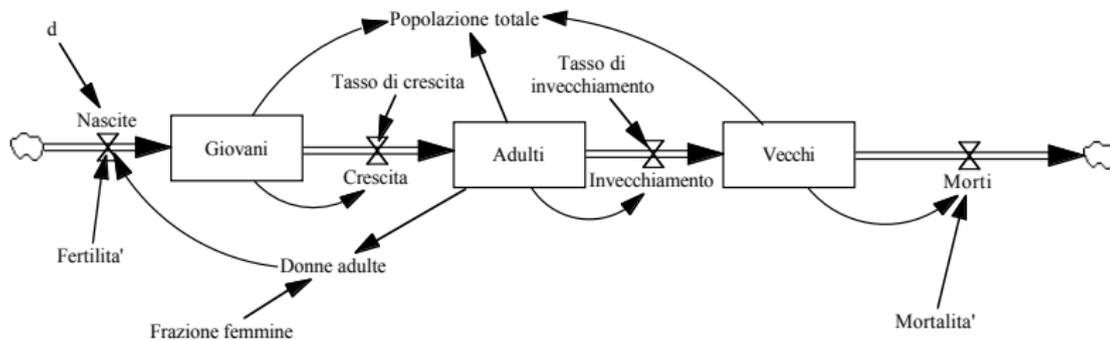
L'ipotesi che il tasso di crescita sia una funzione lineare della  $x$  non è molto realistica. È più realistica una funzione del tipo di quella della seguente tabella, dove le scale degli assi coordinati sono state normalizzate fra 0 ed 1.

**Esercizio** Si costruisca un modello di crescita della popolazione usando questa funzione e lo si faccia girare con i valori di tasso di crescita e capacità di carico visti precedentemente.

0,0	1,00
0,1	1,00
0,2	0,97
0,3	0,90
0,4	0,79
0,5	0,60
0,6	0,40
0,7	0,24
0,8	0,10
0,9	0,03
1,0	0,00



# Un'altro modello di crescita della popolazione



# Ipotesi del modello (1)

Si fanno le seguenti ipotesi:

- Giovani: fascia di età compresa fra 0 e 16 anni
- Adulti: fascia di età compresa fra 17 e 42 anni
- Vecchi: da 42 anni in poi, con una età media della popolazione di 72 anni.
- Le morti avvengono solo fra la popolazione di *Vecchi*
- Il numero dei nati è determinato dal numero di *Donne adulte* e dal *Tasso di fertilità*

## Ipotesi del modello (2)

Inoltre si ha:

- il numero di giovani che ogni anno diventano adulti è pari ad  $1/16$  dei giovani presenti;
- tale ipotesi costituisce una semplificazione accettabile se la popolazione non varia velocemente.

$$Crescita(t) = Giovani(t) \times Tasso\_di\_crescita$$

$$Tasso\_di\_crescita = \frac{1}{16}$$

## Ipotesi del modello (3)

$$\text{Invecchiamento}(t) = \text{Adulti}(t) \times \text{Tasso\_di\_invecchiamento}$$

$$\text{Tasso\_di\_invecchiamento} = \frac{1}{25}$$

$$\text{Morti}(t) = \text{vecchi}(t) \times \text{Mortalità}$$

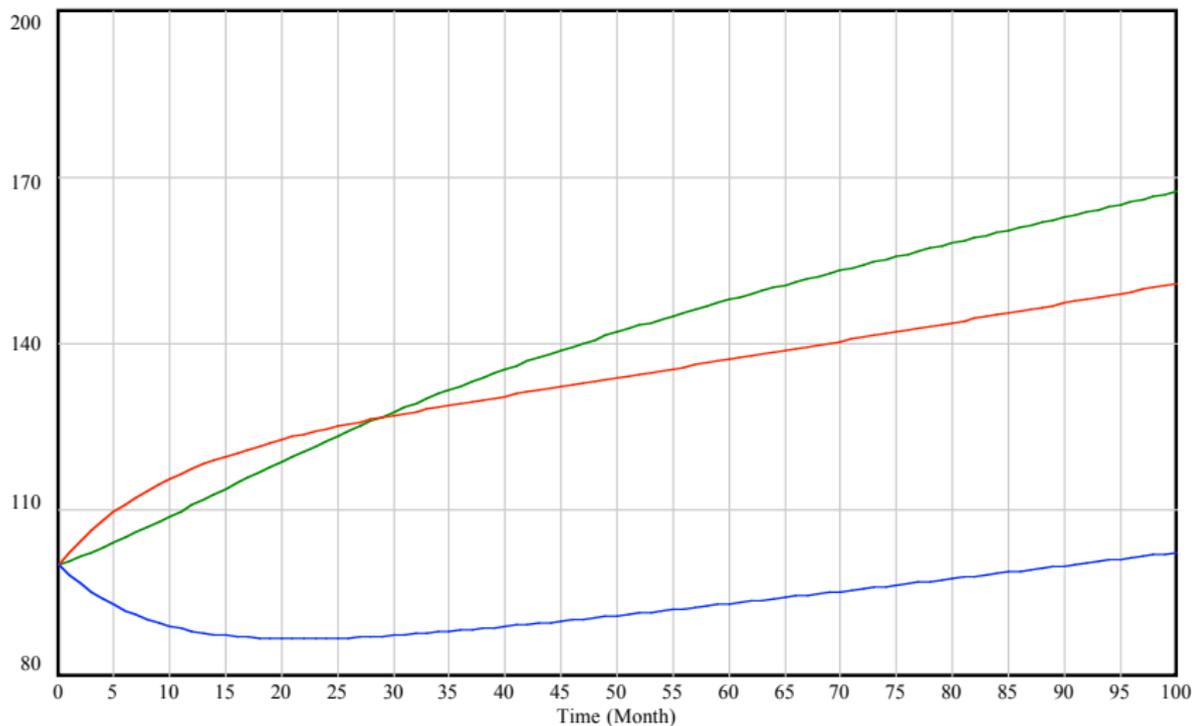
$$\text{Mortalità} = \frac{1}{30}$$

Il modello contiene le seguenti **variabili esogene** i cui valori possono essere variati in modo da valutare diversi andamenti dei tre livelli

## **Giovani, Adulti e Vecchi:**

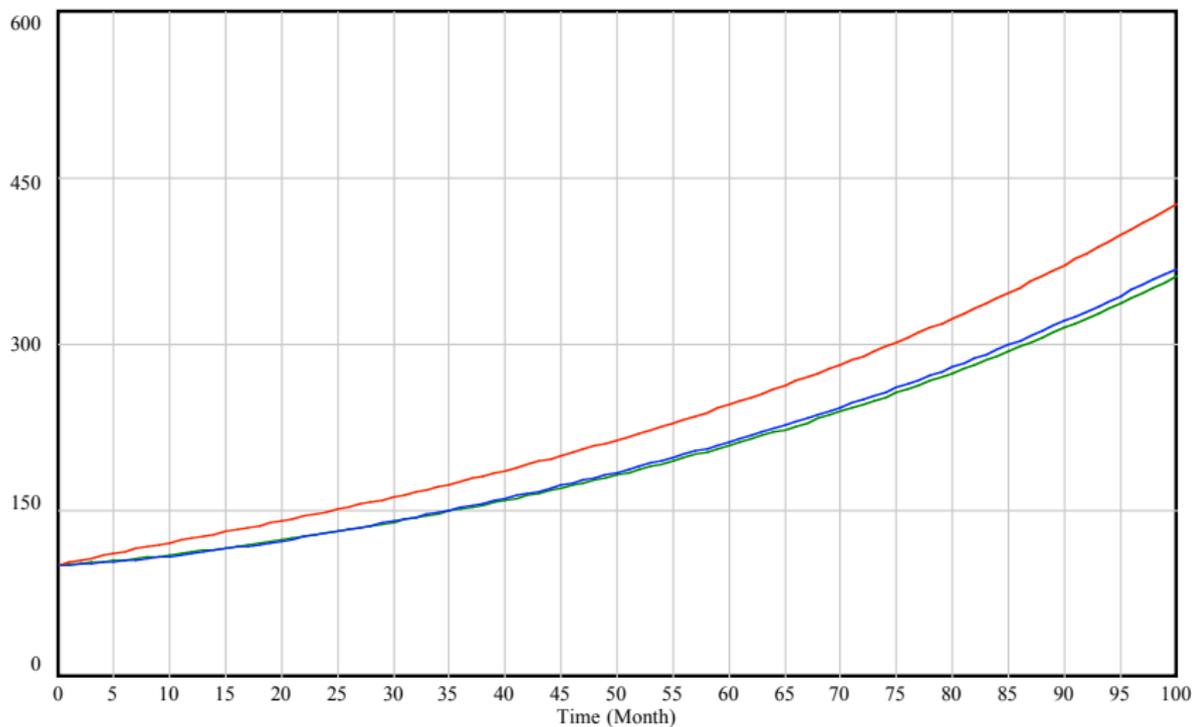
- *Fertilità* misurata in numero di figli per *donna adulta*;
- *Frazione femmine* come percentuale di femmine rispetto ai maschi.

# Caso (1): 2 figli per donna adulta



Giovani —————  
Adulti —————  
Vecchi —————

## Caso (2): 3 figli per donna adulta

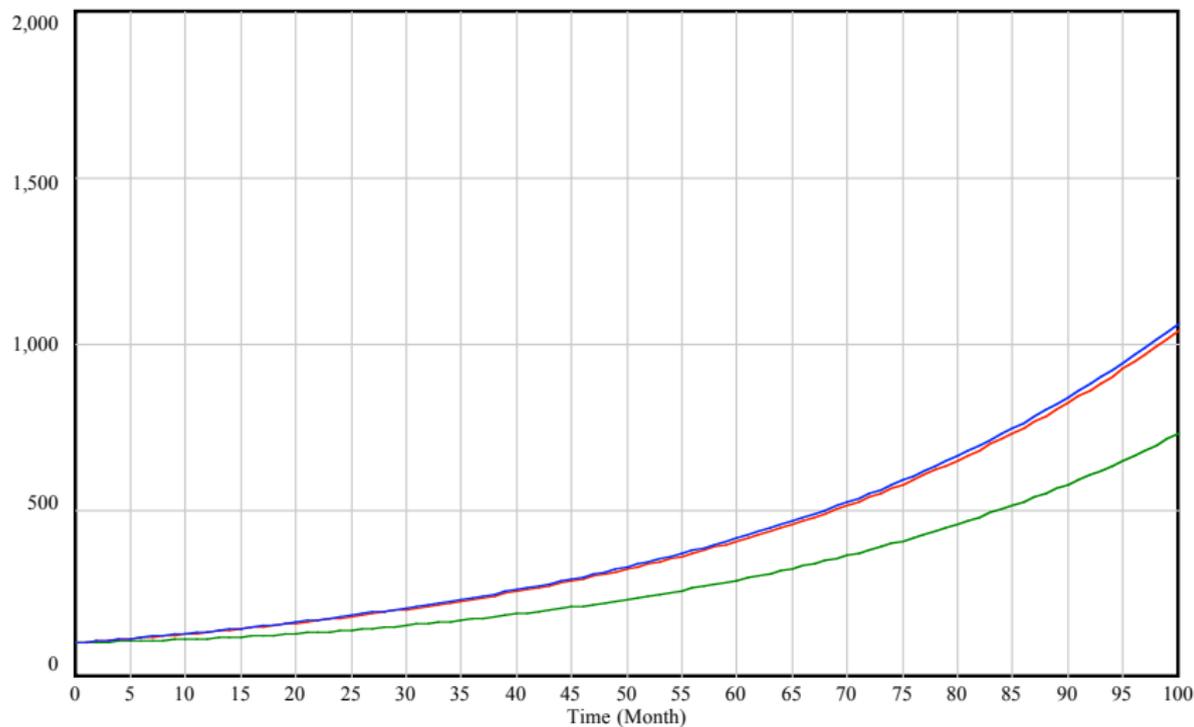


Giovani

Adulti

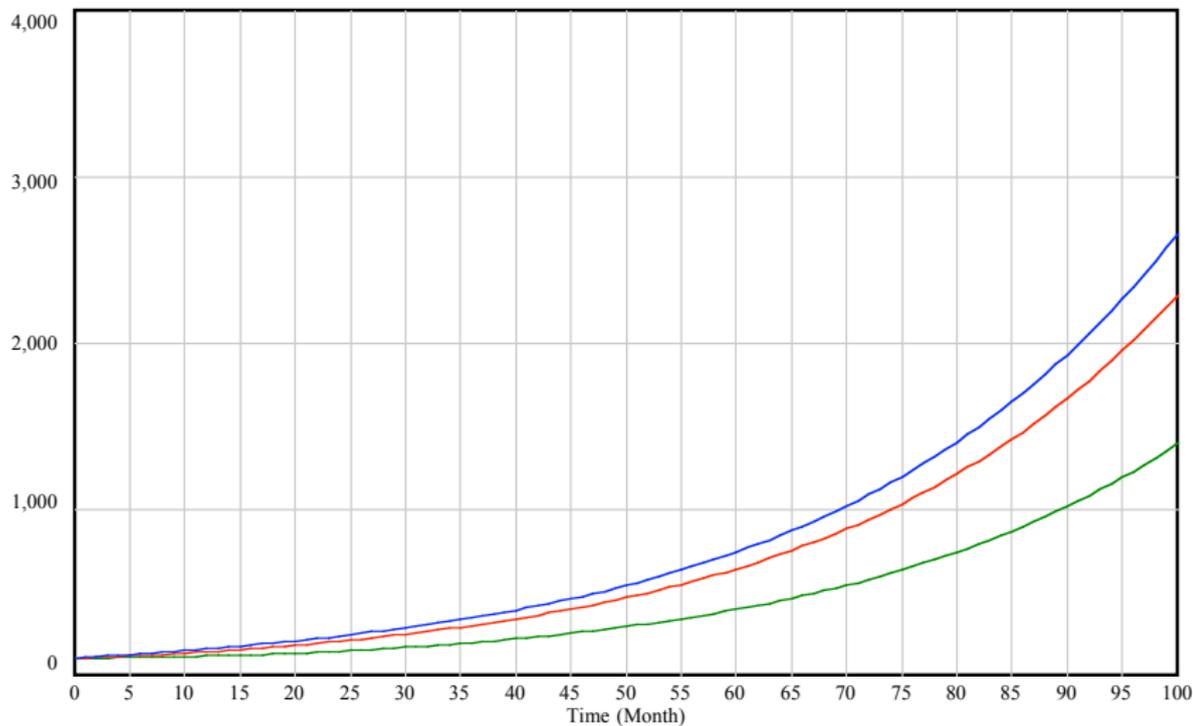
Vecchi

# Caso (3): 4 figli per donna adulta



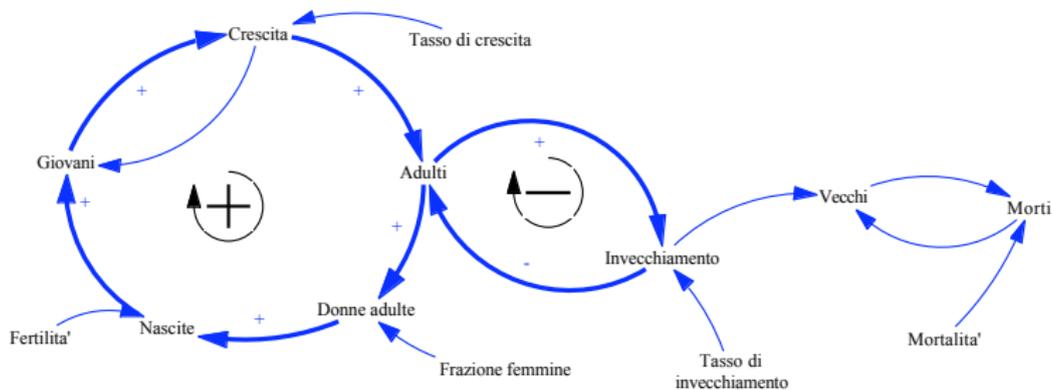
Giovani —  
Adulti —  
Vecchi —

# Caso (4): 5 figli per donna adulta



Giovani —————  
Adulti —————  
Vecchi —————

# Cicli causali nel nuovo modello di crescita



Sono evidenziati:

- un **ciclo positivo** a sinistra;
- un **ciclo negativo** a destra.

# Commenti(1)

Nei casi visti la popolazione tende sempre a crescere. Per che valori di fertilità si raggiunge una situazione di equilibrio? L'equilibrio si ha quando per ogni livello l'input è uguale all'output, quindi, indicando con  $n$  il tasso di fertilità, quando risulta:

$$\frac{n}{25} \times 0.55 \times \text{Adulti} = \frac{\text{Giovani}}{16} = \frac{\text{Adulti}}{25} = \frac{\text{Vecchi}}{30}$$

Si ha allora:  $\text{Adulti} = \frac{25}{16} \times \text{Giovani}$ , e quindi

$$\frac{n}{25} \times 0.55 \times \frac{25}{16} \times \text{Giovani} = \frac{\text{Giovani}}{16}$$

da cui

$$n = \frac{1}{0.55} = 1.8181$$

Questo è il tasso di fertilità a cui, nel nostro modello, corrisponde una situazione di equilibrio.

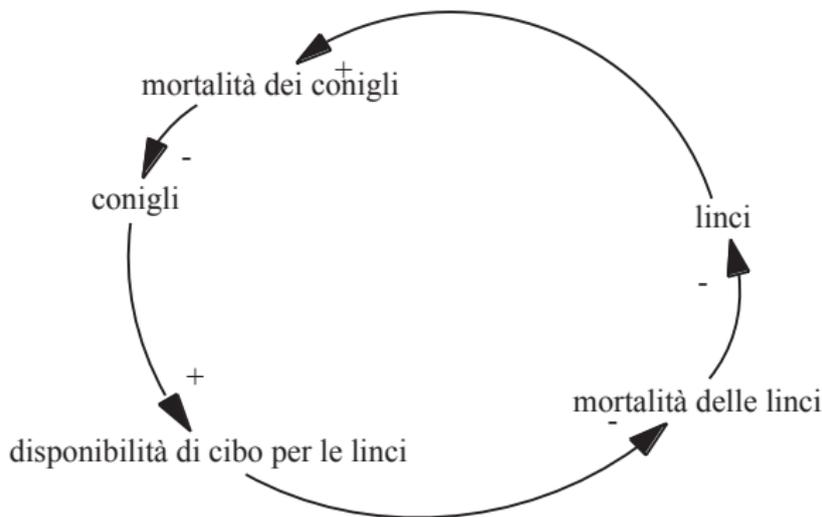
- Nel modello abbiamo assunto che le morti avvengano solamente fra la popolazione dei vecchi.
- Si tratta di una ipotesi semplificativa. In realtà c'è un tasso di mortalità non nullo anche tra i giovani e gli adulti.
- Si modifichi il modello inserendo un tasso di mortalità di valore 0.02 per i giovani e di valore 0.03 per gli adulti. Si ripetano poi gli esperimenti in questa nuova situazione.

Riprendiamo il modello Preda-Predatore visto nel primo capitolo

- Non ci interessa l'informazione riguardante le singole prede e i singoli predatori
- Siamo invece interessati a seguire l'evoluzione nel tempo delle due popolazioni a livello aggregato
- Le variabili di stato principali sono numero delle linci ed numero dei conigli.

# Anelli di retroazione

Anche qui svolge un ruolo importante il concetto di retroazione per cui la variazione in un senso di una variabile porta, attraverso catene di tipo *causa-effetto* ad ulteriori variazioni nella stessa direzione o in direzione opposta.



# Interazione fra due popolazioni: il modello Preda-Predatore

Il modello Preda-Predatore è stato sviluppato dal matematico italiano Vito Volterra (1860-1940) per studiare un fenomeno che era stato evidenziato dallo zoologo Umberto D'Ancona.

Analizzando le statistiche relative alla pesca nel nord dell'Adriatico, D'Ancona aveva osservato che durante gli ultimi anni della prima guerra mondiale e negli anni immediatamente seguenti si era verificato un sostanziale aumento della percentuale dei predatori (Selaci) pescati. L'unica circostanza che appariva collegabile a questo incremento era la diminuzione dell'attività di pesca causata dalle attività belliche.

- *Variabili di livello*: rappresentano grandezze che mantengono il loro valore anche in condizione statiche, cioè nell'ipotesi che si blocchi lo scorrere del tempo.
  - *Prede*
  - *Predatori*
- *Variabili di flusso*: rappresentano delle variazioni nell'unità di tempo, e che quindi assumerebbero valore nullo se bloccassimo lo scorrere del tempo
  - *Nascite\_Prede*
  - *Morti\_Prede*
  - *Nascite\_Predatori*
  - *Morti\_Predatori*

- *Variabili di livello*: rappresentano grandezze che mantengono il loro valore anche in condizione statiche, cioè nell'ipotesi che si blocchi lo scorrere del tempo.
  - *Prede*
  - *Predatori*
- *Variabili di flusso*: rappresentano delle variazioni nell'unità di tempo, e che quindi assumerebbero valore nullo se bloccassimo lo scorrere del tempo
  - *Nascite\_Prede*
  - *Morti\_Prede*
  - *Nascite\_Predatori*
  - *Morti\_Predatori*

$$\text{Livello}(t+\Delta t) = \text{Livello}(t) + (\text{FlussoInput}(t) - \text{FlussoOutput}(t))\Delta t$$

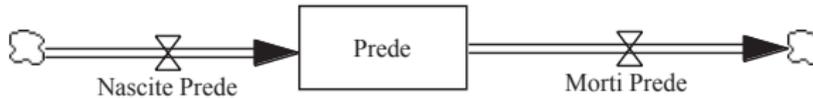
- *FlussoInput* e *FlussoOutput* si sono le variazioni per unità di tempo, in aumento ed in diminuzione rispettivamente, della variabile *Livello*
- $\Delta t$  si è l'intervallo di tempo tra una valutazione delle variabili e la successiva nel processo di simulazione

# Livelli e Flussi nel modello preda-predatore

$$\begin{aligned} \text{Prede}(t + \Delta t) &= \text{Prede}(t) + \\ &\quad (\text{Nascite\_Prede}(t) - \text{Morti\_Prede}(t))\Delta t \\ \text{Predatori}(t + \Delta t) &= \text{Predatori}(t) + \\ &\quad (\text{Nascite\_Predatori}(t) - \text{Morti\_Predatori}(t))\Delta t \end{aligned}$$

# Livelli e Flussi nel modello preda-predatore

$$\begin{aligned} \text{Prede}(t + \Delta t) &= \text{Prede}(t) + \\ &\quad (\text{Nascite\_Prede}(t) - \text{Morti\_Prede}(t))\Delta t \\ \text{Predatori}(t + \Delta t) &= \text{Predatori}(t) + \\ &\quad (\text{Nascite\_Predatori}(t) - \text{Morti\_Predatori}(t))\Delta t \end{aligned}$$



# Variabili ausiliarie e costanti: il sottosistema delle prede

$$Nascite\_Prede(t) = A \cdot Prede(t)$$

$$Prede\_Catturate(t) = B \cdot Incontri\_Prede\_Predatori$$

$$Incontri\_Prede\_Predatori = Prede(t) \cdot Predatori(t)$$

$$Prede\_Pescate(t) = \varepsilon \cdot Prede(t)$$

$$Morti\_Prede = Prede\_Catturate(t) + Prede\_Pescate(t)$$

# Variabili ausiliarie e costanti: il sottosistema dei predatori

$$Nascite\_Predatori(t) = D \cdot Prede(t) \cdot Predatori(t)$$

$$Mortalità\_Predatori(t) = C \cdot Predatori(t)$$

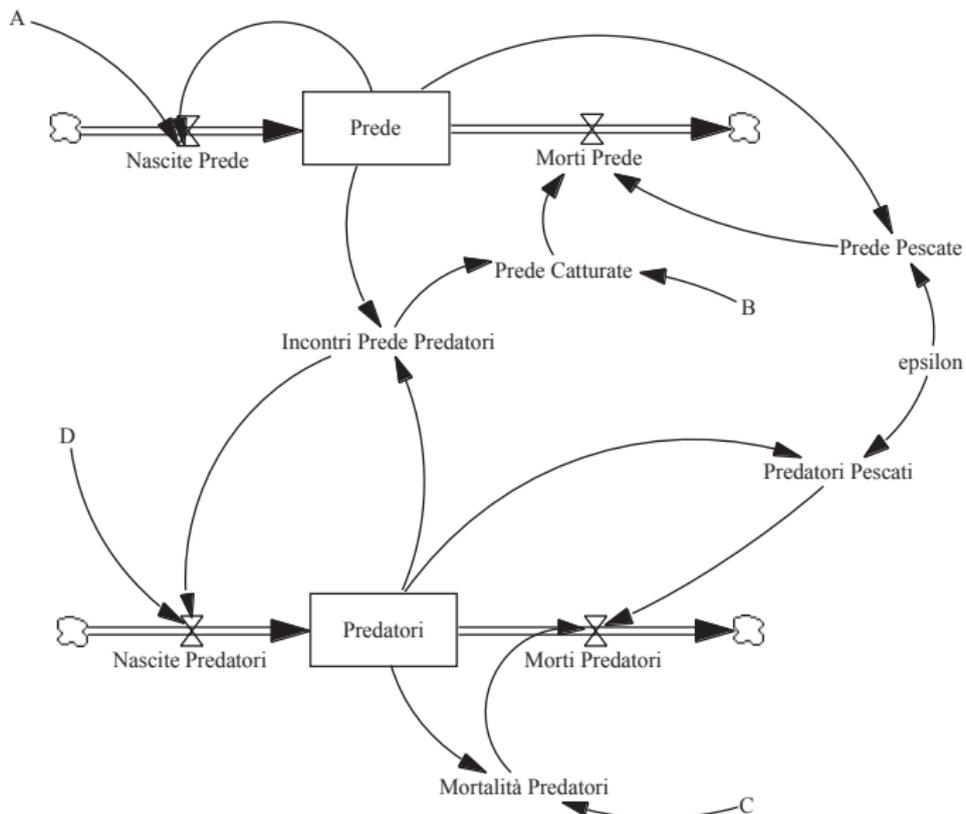
$$Predatori\_Pescati(t) = \varepsilon \cdot Predatori(t)$$

$$Morti\_Predatori = Mortalità\_Predatori(t) + Predatori\_Pescati(t)$$

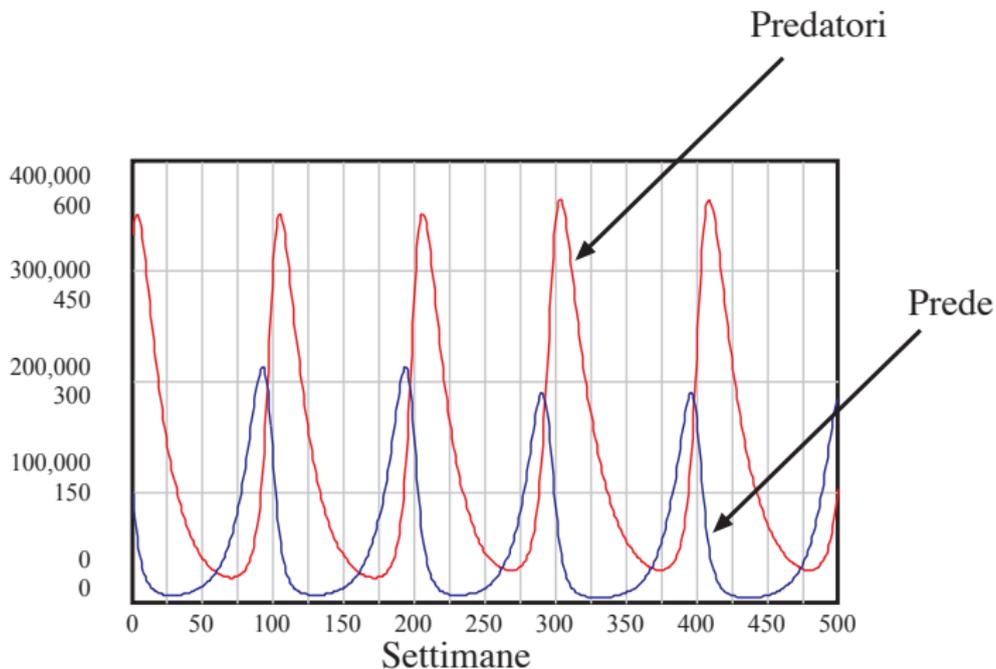
# I parametri del modello

A	0.1
B	0.0005
C	0.05
D	0.000001
Prede iniziali	100,000
Predatori iniziali	500

# Il sistema completo

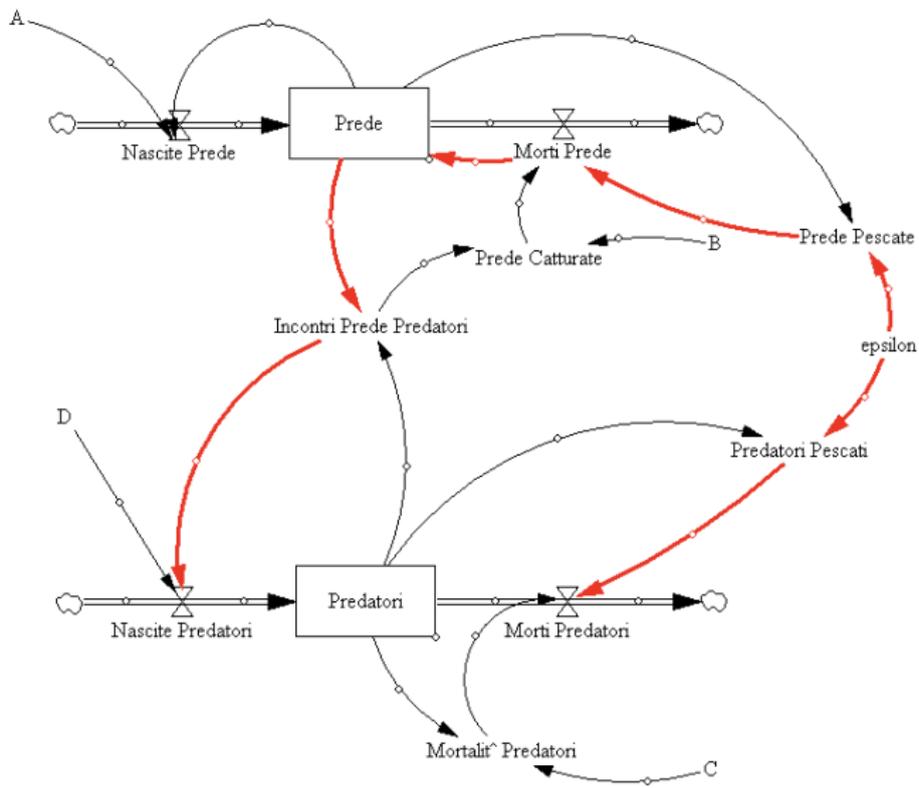


# Andamento delle prede e dei predatori



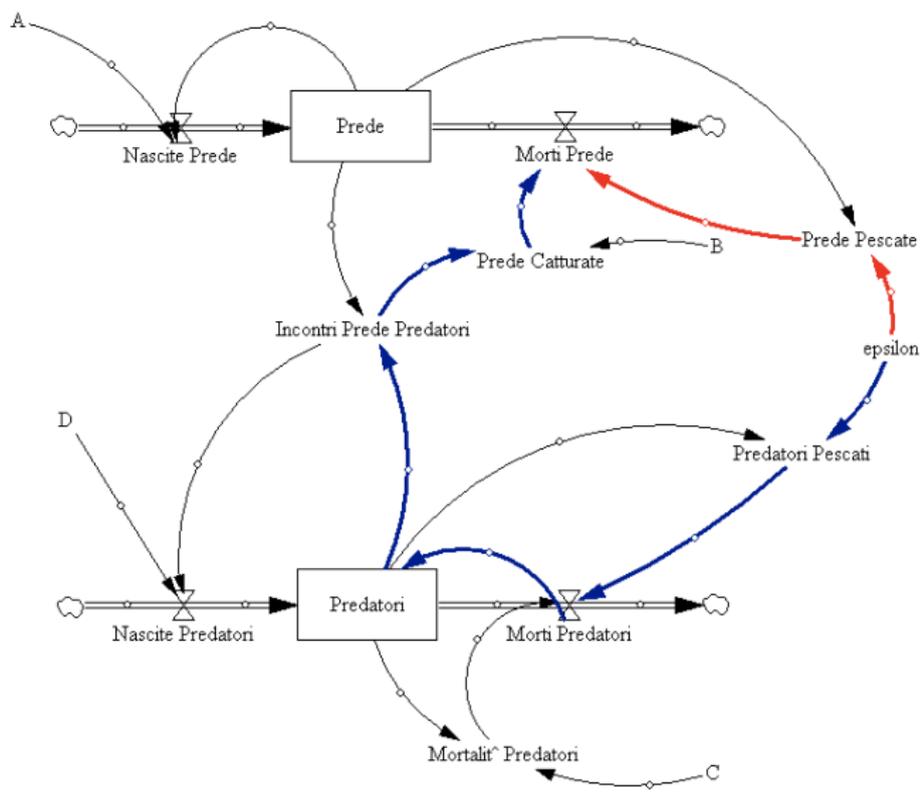
L'attività di pesca viene interrotta nella 250<sup>a</sup> settimana

# Effetti della pesca sui predatori



Ci sono due catene concordanti

# Effetti della pesca sulle prede



Ci sono due catene discordanti

# La funzione logistica

$$x(t) = \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{1 + \frac{x_0}{m} (e^{\lambda_0 t} - 1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \frac{\lambda_0 x_0 e^{\lambda_0 t} (1 + \frac{x_0}{m} (e^{\lambda_0 t} - 1)) - \lambda_0 x_0 e^{\lambda_0 t} \frac{x_0}{m} e^{\lambda_0 t}}{(1 + \frac{x_0}{m} (e^{\lambda_0 t} - 1))^2} \\ &= \lambda_0 \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{(1 + \frac{x_0}{m} (e^{\lambda_0 t} - 1))} \frac{(1 + \frac{x_0}{m} (e^{\lambda_0 t} - 1)) - \frac{x_0}{m} e^{\lambda_0 t}}{(1 + \frac{x_0}{m} (e^{\lambda_0 t} - 1))} \\ &= \lambda_0 x(t) \left(1 - \frac{x_0 e^{\lambda_0 t}}{m(1 + \frac{x_0}{m} (e^{\lambda_0 t} - 1))}\right) \\ &= \lambda_0 x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{m}\right) = \lambda_0 x(t) \left(\frac{m - x(t)}{m}\right) \end{aligned}$$