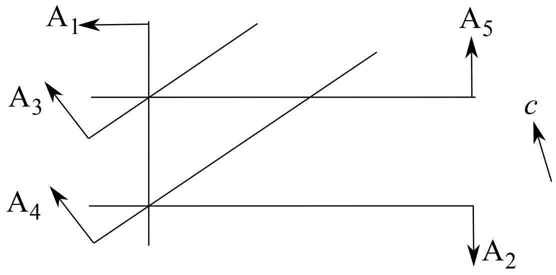
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, se l'algoritmo ha determinato una soluzione ottima si discuta l'unicità della soluzione ottima duale.

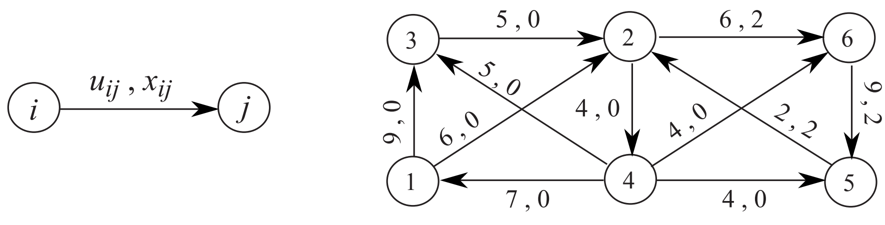


2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcl}
\max & -x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & -x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & & & \leq & 0
\end{array}$$

Si verifichi se la soluzione $\bar{x} = [1, 2]$ sia ottima per il problema. Inoltre, si specifichi se $\bar{x}$ sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Infine, nel caso $\bar{x}$ sia ottima, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

3) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine se la soluzione determinata sarebbe ancora ottima se l'arco $(5, 2)$ avesse capacità $u_{52} = 4$.



4) Si consideri il seguente modello matematico:

$$\begin{array}{ll}
\max & \min\{\, 2x_1 - x_2 + x_3 \,,\, -x_1 + x_2 + 2x_3 \,\} \\
 & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \\
 & x_1 = 1 \Longrightarrow x_2 \in \{2, 5, 8\} \\
 & x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0 \\
 & x_1 = 1 \ \textit{and} \ x_3 = 1 \Longrightarrow x_2 = 5
\end{array}$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI). Giustificare le risposte.

5) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$
\begin{array}{lrrrrrcc}
\max & 8x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +x_5 & & \\
 & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & \leq & 13 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

6) Si enunci e si dimostri il Teorema Forte della Dualità.