# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)

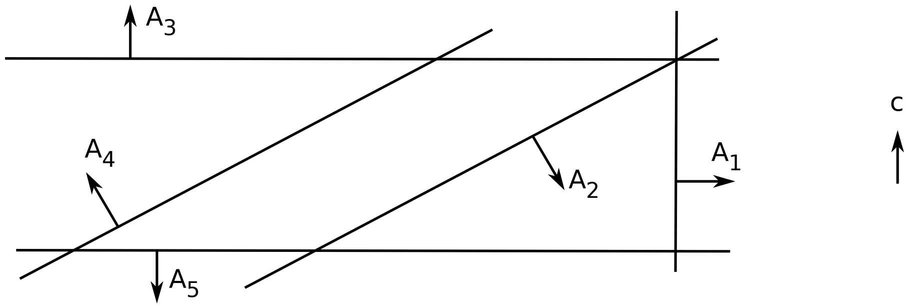
## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si consideri il seguente problema di PL:

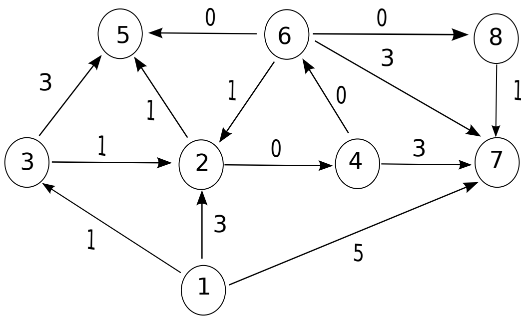
$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 10 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante $k$, il vettore $\eta_B$, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente $h$, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica, giustificando la risposta.

**2)** Si consideri l'istanza di $PL$ rappresentata in figura; si noti che $A_3$, $A_5$ e $c$ sono collineari, ed anche $A_2$ ed $A_4$ lo sono. Per ogni possibile coppia di vincoli si specifichi se la base corrispondente sia primale e/o duale ammissibile, primale e/o duale degenere. Giustificare le risposte.




**3)** Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura.

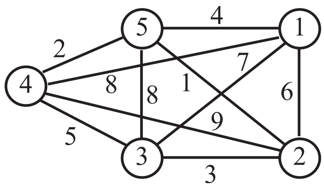



Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato $u$, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati $Q$. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Nel caso in cui il costo dell'arco $(6, 5)$ fosse un parametro reale $\epsilon$ (anzichè valere 0, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato al passo precedente continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 1? Giustificare la risposta.

**4)** Si consideri una rete di telecomunicazione descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. In tale rete, il nodo sorgente $s$ deve spedire una quantità di pacchetti $\gamma$ al nodo destinazione $t$. Gli archi della rete sono capacitati. Ad ogni collegamento $(i, j) \in A$ è infatti associata una capacità superiore $u_{ij}$, che indica il massimo numero di pacchetti inviabili lungo $(i, j)$.

Per ridurre la congestione della rete, si vuole organizzare l'invio di pacchetti da $s$ a $t$ in modo da minimizzare il massimo numero di pacchetti per collegamento. Inoltre, per evitare un'eccessiva dispersione dei pacchetti attraverso la rete, si vuole che il numero dei collegamenti utilizzati per l'invio non sia superiore ad un valore dato $K \in Z^+$. Si formuli in termini di P.L.I. il problema di decidere come inviare i $\gamma$ pacchetti da $s$ a $t$ rispettando i vincoli di capacità superiore ed il vincolo relativo al numero di collegamenti utilizzabili per l'invio, con l'obiettivo di minimizzare il massimo numero di pacchetti inviati sui singoli collegamenti della rete.

**5)** Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo col più piccolo valore $r > 2$ di archi dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali archi. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, e si inseriscano in coda i figli di un nodo in ordine lessicografico crescente dell'insieme di archi fissati a zero (ad esempio, se si seleziona il nodo 5, e si fissano a zero le variabili relative a (5,1) e (5,3), il nodo figlio relativo a (5,1) va inserito prima di quello relativo a (5,3)). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 7 nodi dell'albero delle decisioni (inclusa la radice). Se ciò non fosse sufficiente a risolvere il problema, quali sono la migliore valutazione inferiore e superiore disponibile quando l'algoritmo viene interrorro? Qual è quindi il gap relativo ottenuto? Giustificare la risposta.




**6)** Sia $P = \{\ x \in R^n\ :\ Ax \leq b\ \}$ un poliedro non vuoto, e si assuma che $A$ sia una matrice di rango massimo $n$. Si enunci e si dimostri la condizione necessaria e sufficiente per cui il problema di Programmazione Lineare $\max\{\ cx\ :\ Ax \leq b\ \}$, per una data funzione obiettivo $c$, ammette ottimo finito, e almeno una delle sue soluzioni ottime corrisponde ad un vertice di $P$. (*Suggerimento*: si utilizzi il teorema di decomposizione dei poliedri)