RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \end{array}$$

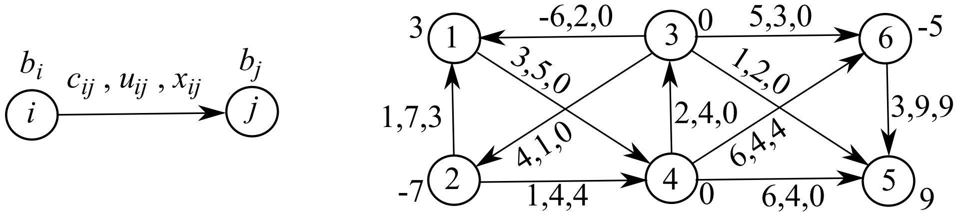
applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & & \\ & 2y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & = & 4 \\ & y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & - & 3y_4 & = & -2 \\ & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 2 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Utilizzando gli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = [1, 0, 0, 1]$ sia ottima per il problema. In questo caso si individuino tutte le soluzioni ottime del problema. Giustificare le risposte.

3) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 58$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.



4) Si consideri il seguente problema di Programmazione Matematica:

$$\begin{array}{ll} \min & ||x - y||_\infty \\ & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = w \\ & w \in \{3, 7, 11\} \\ & x, y \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

dove $|| \cdot ||_\infty$ denota la norma infinito in $\mathbb{R}^2$, ovvero $||z||_\infty = \max\{|z_1|, |z_2|\}$. Si formuli il problema in termini di *Programmazione Lineare Intera*, giustificando la risposta.

5) Si dimostri che l'algoritmo basato su cammini aumentanti per il problema di Flusso Massimo su un grafo G, da un nodo sorgente s ad un nodo pozzo t, risolve anche il problema di individuare un taglio di capacità minima che separa s da t. Si possono usare, senza dimostrarle, proprietà studiate durante il corso, purché vengano enunciate in maniera rigorosa.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo depth-first, ossia si implementi Q come una pila, e si inseriscano in Q i figli di ogni nodo in ordine lessicografico decrescente rispetto all'insieme di lati fissati a zero (ad esempio, se si fissano a zero le variabili corrispondenti a $(1,3)$ e $(1,2)$, $(1,3)$ è inserito prima di $(1,2)$; si ricordi che, essendo Q una pila, il figlio inserito per ultimo viene estratto per primo). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni (contando la radice). Se ciò non fosse sufficiente a risolvere il problema, si specifichi la migliore valutazione inferiore e superiore disponibile (e quindi il gap relativo ottenuto), giustificando la risposta.