RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)

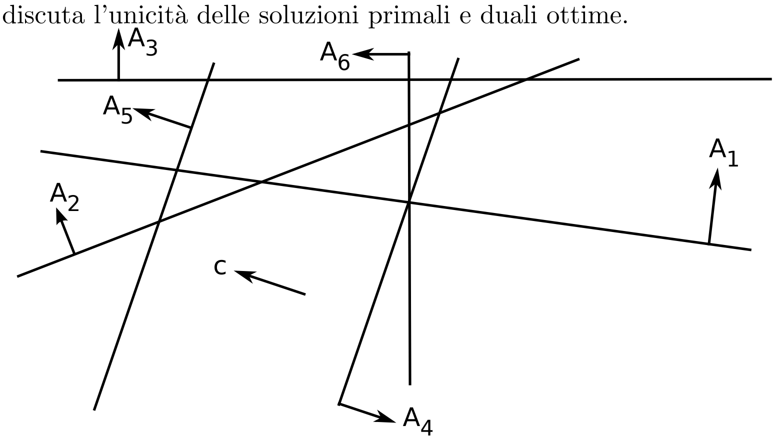
Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

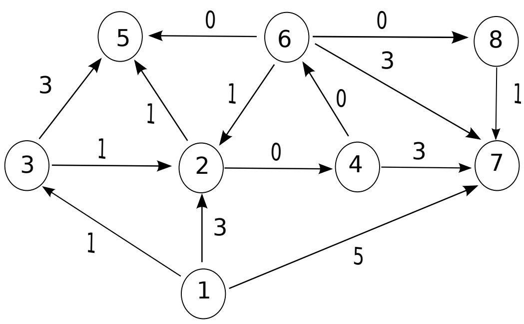
$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & - & 4x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del *PL* dato.

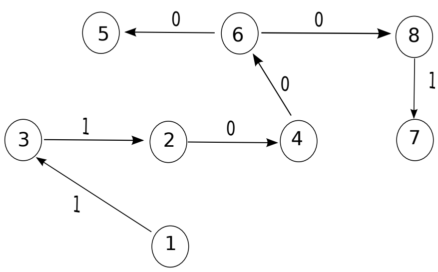
2) Si risolva graficamente il problema di *PL* in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{\ 1\ ,\ 5\ \}$; si noti che c, A_4 ed A_5 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni primali e duali ottime.



3) Dato il grafo in figura

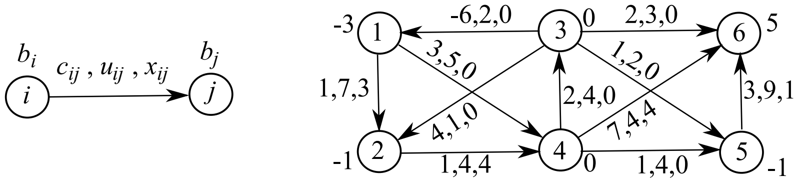


si consideri l'albero T



Si verifichi se T sia un albero dei cammini minimi di radice 1 per il grafo in figura. Inoltre, si discuta l'eventuale ottimalità di T nel caso in cui l'arco $(4, 6)$ costi 2 invece che 0. Nel caso in cui T non sia un albero ottimo, si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 per lo scenario $c_{46} = 2$, e se ne discuta l'unicità. Giustificare le risposte.

4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato di costo $cx = 38$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si verifichi se la soluzione ottenuta è unica, giustificando la risposta.



5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrrrcl} \max & x_1 & +2x_2 & +\alpha x_3 & & \\ & 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 2 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Assumendo $\alpha = 1$, si individui una soluzione ottima utilizzando la teoria della dualità della PL. Successivamente si indichi per quali valori di α la soluzione individuata rimane ottima. Giustificare le risposte. (*Suggerimento*: si utilizzino le condizioni degli scarti complementari per la coppia simmetrica di problemi di PL, ricavandole se necessario da quelle, note, per la coppia asimmetrica.)

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo col più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r - 2$ di tali lati. Si visiti breadth-first l'albero delle decisioni, ossia si implementi Q come una fila, e si inseriscano in coda i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente dell'insieme di lati fissati a zero. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni (la radice conta per uno); se ciò non è sufficiente a risolvere il problema, si indichino la migliore valutazione inferiore e superiore disponibile (e quindi il gap relativo ottenuto), giustificando la risposta.