

RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)**Nome:****Cognome:****Matricola:**1) Si consideri il seguente problema di *PL* parametrico in ε

$$(P) \quad \begin{array}{rcll} \max & 7x_1 & - & x_2 \\ & -x_1 & - & x_2 \leq 1 \\ & -x_1 & + & x_2 \leq 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 & + & x_2 \leq 4 + \varepsilon \end{array}$$

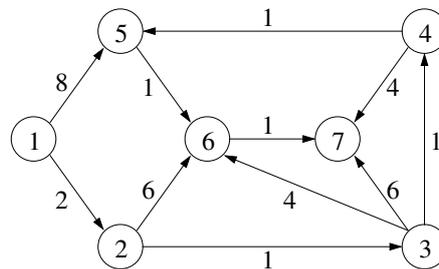
e la soluzione $\bar{y} = [0, 0, 2, 1]$ per il suo duale; utilizzando il teorema degli scarti complementari si determini per quali valori di ε la soluzione \bar{y} è ottima per il duale, discutendone l'unicità al variare di ε . Giustificare le risposte.

2) Si consideri il seguente problema di *PL*:

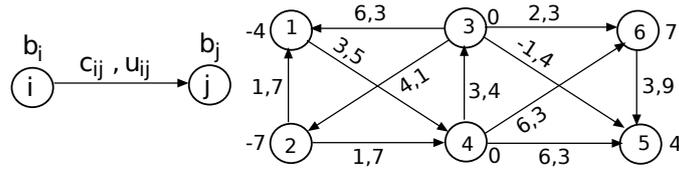
$$\begin{array}{rcll} \max & 3x_1 & + & 6x_2 \\ & x_1 & - & 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & & & x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 \leq 4 \\ & -x_1 & & \leq -4 \\ & 2x_1 & - & x_2 \leq -1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simpleso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k , il vettore η_B , il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h , giustificando le risposte. Se il problema duale risultasse inferiormente illimitato, quale sarebbe la direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo? Giustificare la risposta.

3) Si determini un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$ per il grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più efficiente dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si forniscano il nodo i selezionato, l'insieme Q (se utilizzato), i vettori delle etichette e dei predecessori. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Infine, si discuta ottimalità e unicità della soluzione ottenuta nel caso in cui nel grafo fosse presente anche l'arco $(7, 2)$, considerando sia lo scenario in cui $c_{72} = -5$ che lo scenario in cui $c_{72} = -6$. Giustificare le risposte.



4) Si determini se l'istanza del problema di Flusso di Costo Minimo in figura ammetta o no una soluzione ammissibile. Si descriva con precisione la metodologia utilizzata e si dimostri formalmente la risposta fornita, citando gli opportuni risultati teorici.



5) Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, si riformuli il seguente modello matematico

$$\begin{aligned} \max \quad & \min\{x_1 - x_2 - x_3, 2x_1 + 3x_2 + x_3\} \\ & x_1 \in \{0, 1\} \\ & 0 \leq x_2 \leq 50 \\ & x_1 = 0 \implies x_2 = 25 \\ & x_1 = 1 \implies x_3 = x_2 \\ & x_1 = 0 \implies x_3 = 26 \end{aligned}$$

come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI). Giustificare le risposte.

6) Si risolva il problema del Cammino Minimo Vincolato, dal nodo 1 al nodo 6, sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo Branch&Bound che usa come rilassamento il problema del Cammino Minimo (non vincolato), nessuna euristica, visita l'albero delle decisioni a ventaglio, e come regola di branching utilizza la seguente: dato il cammino minimo ottenuto dal rilassamento, nel primo dei figli si elimina il primo arco del cammino, nel secondo figlio si fissa in soluzione il primo arco del cammino e si elimina il secondo, nel terzo figlio si fissano in soluzione i primi due archi del cammino e si elimina il terzo, e così via fino a considerare l'ultimo sottocammino (di origine 1) la cui lunghezza è minore della soglia massima data. Per ogni nodo si riporti la soluzione del rilassamento e si indichi se il nodo viene chiuso e perché, oppure se viene effettuato il branching e come. Si esaminino solamente i primi cinque nodi dell'albero delle decisioni, compreso il nodo radice. Al termine si specifichi il gap ottenuto, giustificando la risposta.

