RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

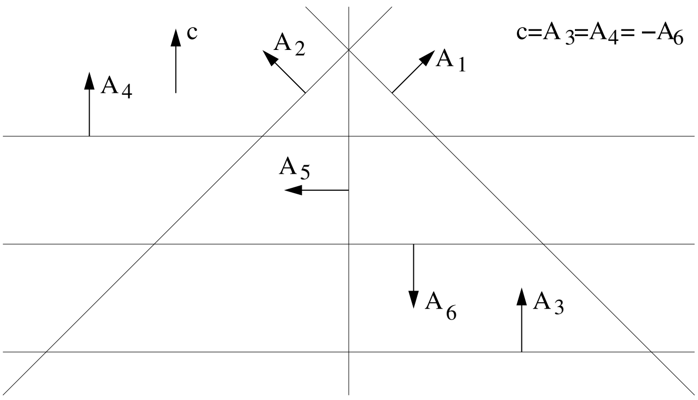
Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

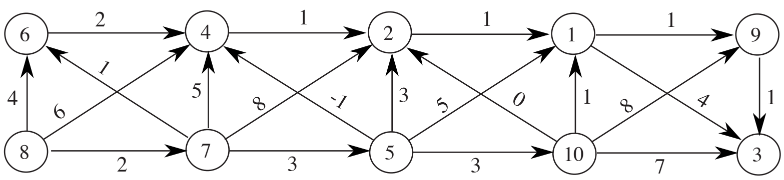
$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & - & 8x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del PL dato.

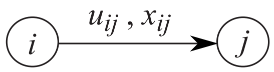
2) Si risolva graficamente il problema di PL indicato in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori y_B e η_B, l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. In caso di ottimo finito si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica, e nel caso in cui non lo sia si caratterizzino tutte le soluzioni ottime primali, giustificando la risposta.

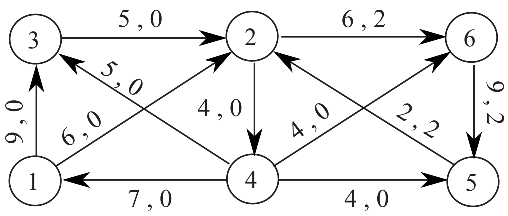


3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 8 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Durante l'esecuzione dell'algoritmo si esplorino gli archi della stella uscente del nodo selezionato in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si indichi poi come cambierebbero le risposte se l'arco $(10, 9)$ invertisse il suo verso e costo, diventando $(9, 10)$ di costo -8.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine se la soluzione determinata sarebbe ancora ottima se l'arco $(5, 2)$ avesse capacità $u_{52} = 4$.





5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$(P) \quad \max\{\ cx\ :\ Ax \leq b,\ x \geq 0\ \}.$$

Supponiamo che il sistema

$$(S) \quad \begin{cases} A\xi & \leq & 0 \\ \xi & \geq & 0 \\ c\xi & > & 0 \end{cases}$$

ammetta una soluzione $\bar{\xi} \in R^n$. Dimostrare che se (P) è non vuoto, allora è superiormente illimitato.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, il nodo con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r - 2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una fila. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore, se il rilassamento viene eseguito. Per ogni nodo dell'albero si indichi inoltre se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché.