RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

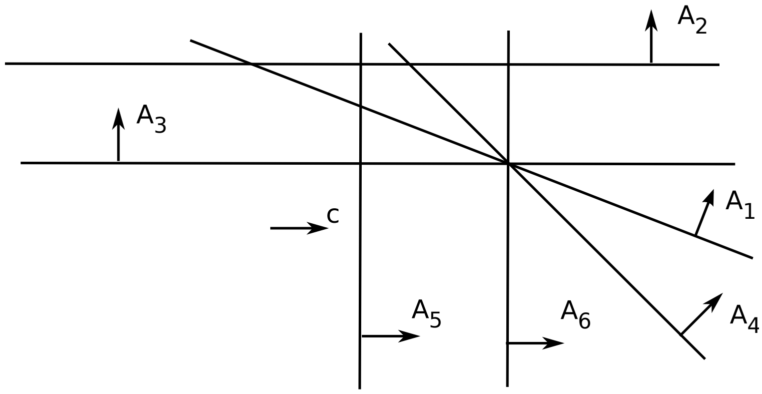
Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

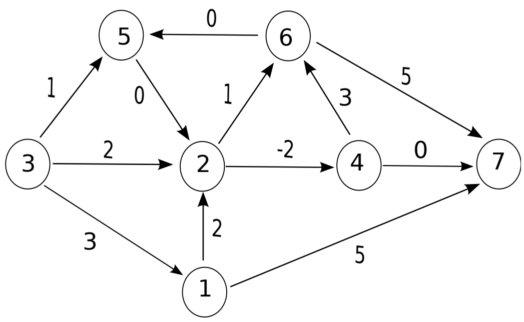
$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -2x_1 & - & x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & & - & x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante. In caso di ottimo finito, si discuta l'unicità della soluzione ottima primale determinata. Giustificare tutte le risposte.

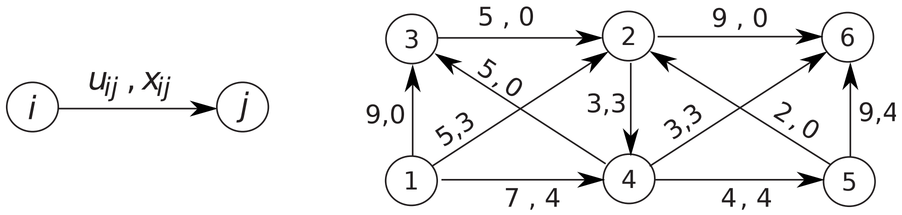
2) Si risolva graficamente il problema di *PL* in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{2, 6\}$; si noti che c, A_5 ed A_6 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni ottime, primale e duale, individuate.



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 3, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Si esaminino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima ottenuta è unica? Giustificare la risposta.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 7$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine come cambierebbero le risposte se l'arco $(2, 6)$ avesse capacità $u_{26} = 10$.



5) Si consideri il seguente modello matematico:

$$
\begin{array}{ll}
\min & ||x - y||_\infty \\
 & x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = w \\
 & w \in \{4, 9, 11\} \\
 & w \in \{9, 11\} \Rightarrow x_1 = 0 \\
 & x, y \in R^{2+}
\end{array}
$$

dove $|| \cdot ||_\infty$ denota la norma infinito in R^2, ovvero $||z||_\infty = \max\{|z_1|, |z_2|\}$. Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli in termini di Programmazione Lineare Intera (PLI), giustificando la risposta.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$
\begin{array}{lccccccccc}
\max & 6x_1 & +8x_2 & +5x_3 & +5x_4 & +3x_5 & +x_6 & & \\
 & 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +4x_4 & +3x_5 & +2x_6 & \leq & 15 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 \in & \{0, 1\} &
\end{array}
$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria della soluzione ottima del rilassamento continuo, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

Si discuta infine se la soluzione ottima determinata resterebbe tale nel caso in cui il costo del quinto oggetto fosse 0 (invece che 3), giustificando la risposta.