RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

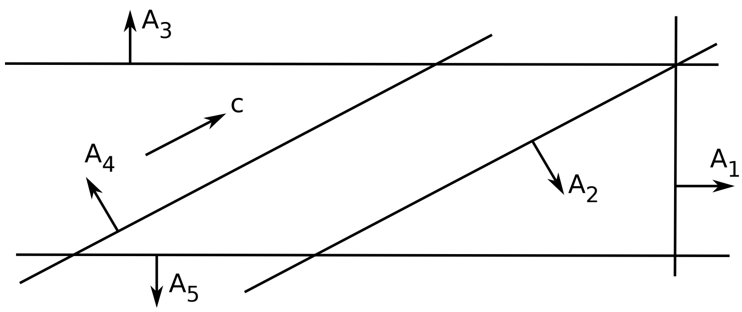
Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva algebricamente il seguente problema di PL

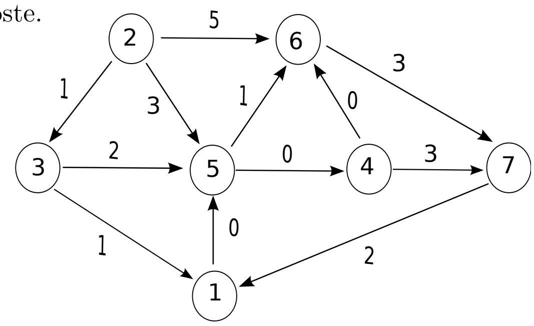
$$\begin{array}{lrrcr} \max & 2x_1 & & & \\ & & x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & -2x_2 & \leq & 10 \\ & 2x_1 & -x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 & & \leq & 2 \\ & -x_1 & & \leq & 0 \end{array}$$

mediante l'algoritmo del Simplesso Duale, partendo dalla base $B = \{1, 2\}$. Ad ogni iterazione si mostrino la base, la matrice di base e la sua inversa, le soluzioni di base, la direzione e il passo di spostamento, gli indici entrante ed uscente, giustificando le risposte. Discutere l'eventuale degenerazione primale e duale della base ottima.

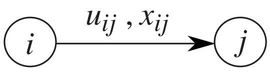
2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Alla fine, se l'algoritmo termina con esito ottimo finito, si discuta l'unicità della soluzione ottima duale determinata.

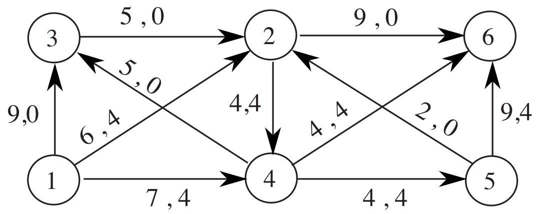


3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Nel caso in cui il costo dell'arco $(5, 6)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 1, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato al passo precedente continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2? E per quali valori di ϵ l'albero ottimo determinato sarebbe unico? Giustificare le risposte.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore $v = 8$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine come cambierebbero le risposte se l'arco $(4, 6)$ avesse capacità $u_{46} = 5$.





5) Si consideri il seguente problema di Programmazione Matematica:

$$
\begin{array}{ll}
\min & ||x - y||_\infty \\
& x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = w \\
& w \in \{3, 7, 11\} \\
& x, y \in R^2
\end{array}
$$

dove $|| \cdot ||_\infty$ denota la norma infinito in R^2, ovvero $||z||_\infty = \max\{|z_1|, |z_2|\}$. Si formuli il problema in termini di *Programmazione Lineare Intera*, giustificando la risposta.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r - 2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una coda. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi inoltre se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché.