RICERCA OPERATIVA (a.a. 2017/18)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & 4x_2 & & \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 10 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & -4 \end{array}$$

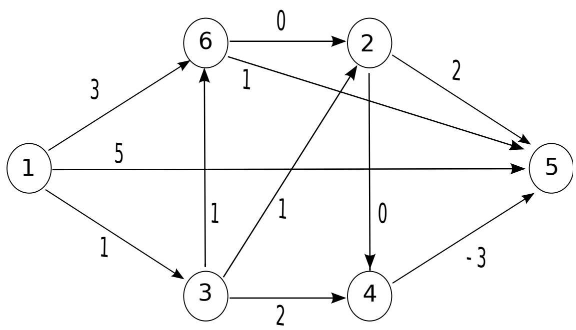
Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2,3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo non finito, qual è la direzione di decrescita illimitata implicitamente individuata dall'algoritmo? Giustificare la risposta.

2) Si dimostri l'ottimalità della soluzione $\bar{x} = [1,1]$ per il seguente problema di PL

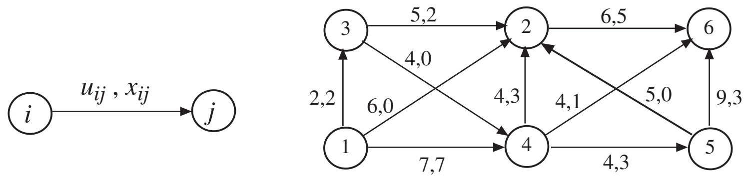
$$(P) \qquad \begin{array}{rrcrcr} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & - & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

discutendone l'unicità, il fatto che sia una soluzione di base e l'eventuale degenerazione. Si individui inoltre l'insieme delle soluzioni ottime del duale di (P). Giustificare le risposte.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si discuta infine se l'albero individuato sia l'unico albero dei cammini minimi di radice 1.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato, di valore $v = 9$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità. Si discuta infine come cambierebbero il flusso massimo e il taglio di capacità minima individuati dall'algoritmo se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità $u_{12} = 5$.



5) Si consideri il seguente modello matematico:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \max\{\, 2x_1 - x_2 + x_3 \,,\, -x_1 + x_2 + 2x_3 \,\} \\
& x_1, x_3 \in \{0, 1\} \\
& x_1 = 1 \Longrightarrow x_2 \in \{2, 7, 13\} \\
& x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0 \\
& x_1 = 1 \ \textit{and} \ x_3 = 1 \Longrightarrow x_2 = 13
\end{array}
$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI). Giustificare le risposte.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$
\begin{array}{lrrrrrcl}
\max & 11x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +x_5 & & \\
& 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & \leq & 13 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0, 1\}
\end{array}
$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.