RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -8x_1 & + & 4x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

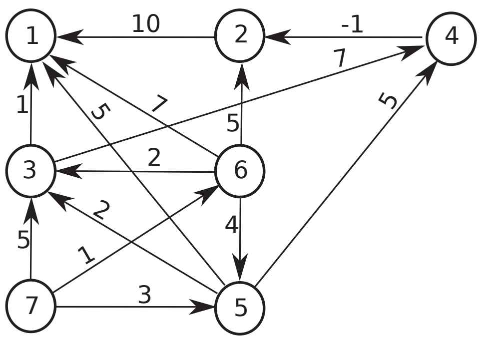
applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base e la loro eventuale degenerazione, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del PL dato. Si consideri, inoltre, l'ultima direzione ξ individuata dall'algoritmo: se il vettore dei costi c fosse $[-4, 4]$ invece che $[-8, 4]$, ξ sarebbe ancora di crescita? Giustificare tutte le risposte.

2) Si consideri il seguente problema di PL parametrico in ε

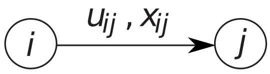
$$(P) \qquad \begin{array}{rrcrcl} \max & 3x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 4 + \varepsilon \end{array}$$

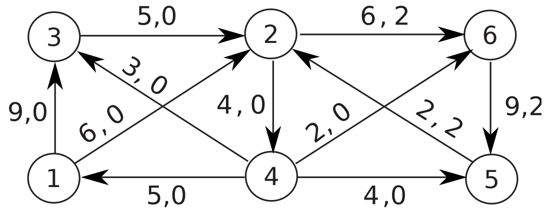
e la soluzione $\bar{y} = [3, 0, 0, 2]$ per il suo duale. Utilizzando il il teorema degli scarti complementari si determini per quali valori di ε la soluzione $\bar{y}$ è ottima per il duale, discutendone l'unicità. Giustificare le risposte.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 7 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Durante l'algoritmo si esplorino gli archi della stella uscente del nodo selezionato in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si consideri poi il caso in cui il costo dell'arco $(5, 4)$ sia un parametro reale ϵ, e si discuta per quali valori del parametro la soluzione determinata resta un albero dei cammini minimi, giustificando la risposta.



4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). A ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine se la soluzione determinata sarebbe ancora ottima nel caso in cui l'arco $(5, 2)$ invertisse il proprio orientamento, diventando $(2, 5)$.





5) Si consideri una rete di telecomunicazione descritta in termini di un grafo orientato $G = (N, A)$. In tale rete, il nodo sorgente s deve spedire una quantità di pacchetti α al nodo destinazione t. Gli archi della rete sono capacitati. A ogni collegamento $(i, j) \in A$ è infatti associata una capacità superiore u_{ij}, che indica il massimo numero di pacchetti inviabili lungo (i, j). Inoltre, a ogni arco $(i, j) \in A$ è associato un costo unitario d'invio (ovvero per pacchetto) c_{ij}.

Per evitare un'eccessiva dispersione dei pacchetti attraverso la rete, si vuole che il numero dei collegamenti utilizzati per l'invio sia non superiore a un valore dato $K \in Z^+$. Si formuli in termini di PLI il problema di inviare gli α pacchetti da s a t a costo minimo, rispettando i vincoli di capacità superiore e il vincolo relativo al numero di collegamenti utilizzabili per l'invio.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$
\begin{array}{lrrrrrrcl}
\max & 8x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +x_5 & +x_6 & & \\
 & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +3x_6 & \leq & 13 \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\}
\end{array}
$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si discuta infine come cambierebbe la soluzione ottima del problema nel caso in cui la capacità dello zaino incrementasse al valore 16. Giustificare le risposte.