# Il problema di flusso di costo minimo



- $G = (N, A)$ rete di flusso
- $c_{ij}$, $\forall (i,j) \in A$ costo di $(i,j)$
- $u_{ij} > 0$, $\forall (i,j) \in A$ capacità superiore di $(i,j)$
- $b_i$, $\forall i \in N$ bilancio del nodo $i$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\text{Min} \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij} \\
&\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = b_i , \quad i \in N \\
&0 \le x_{ij} \le u_{ij} , \quad (i,j) \in A
\end{aligned}
}
$$

Studiamo condizioni di ottimalità per il problema: dato un flusso ammissibile $x$, $x$ è ottimo? (ovvero: è di costo minimo?)

Sia $G_x = (N, A_x)$ il grafo residuo rispetto a $x$, definito come per il problema di flusso massimo:

$\forall (i,j) \in A$ t.c. $x_{ij} < u_{ij} \Rightarrow (i,j) \in A_x$ $\quad c'_{ij} = c_{ij}$

$\forall (i,j) \in A$ t.c. $x_{ij} > 0 \Rightarrow (j,i) \in A_x$ $\quad c'_{ji} = -c_{ij}$

NB: $G_x$ è ora pesato, in quanto ai suoi archi è associato un costo di percorrenza

Un ciclo aumentante è un ciclo orientato in $G_x$.

La massima quantità di flusso inviabile lungo un ciclo aumentante $C$ è:

$$\theta(C, x) = \min \{ (u_{ij} - x_{ij}) : (i,j) \in C^+, \; x_{ij} : (i,j) \in C^- \}$$

con:

$C^+$ : archi diretti del ciclo (in $G$)

$C^-$ : archi inversi del ciclo (in $G$)

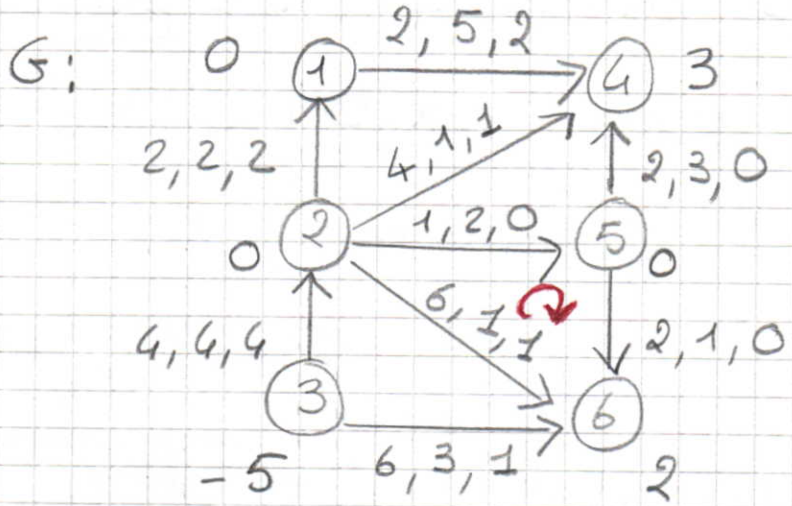
< considerando l'orientamento dato dal verso di percorrenza in $G_x$ >

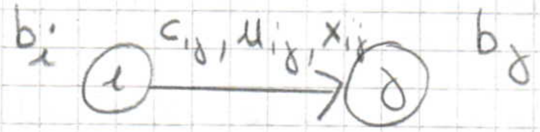
Proprietà: Se $x$ è un flusso ammissibile e $C$ è un ciclo in $G_x$ (ciclo aumentante),

$$x(\theta) = x \oplus \theta C \quad , \quad 0 \le \theta \le \theta(C, x)$$

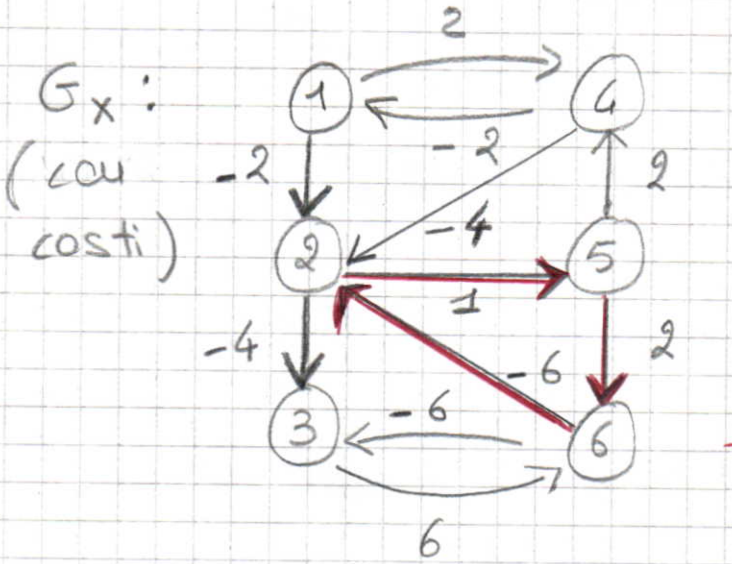
è ancora un flusso ammissibile □

Esempio

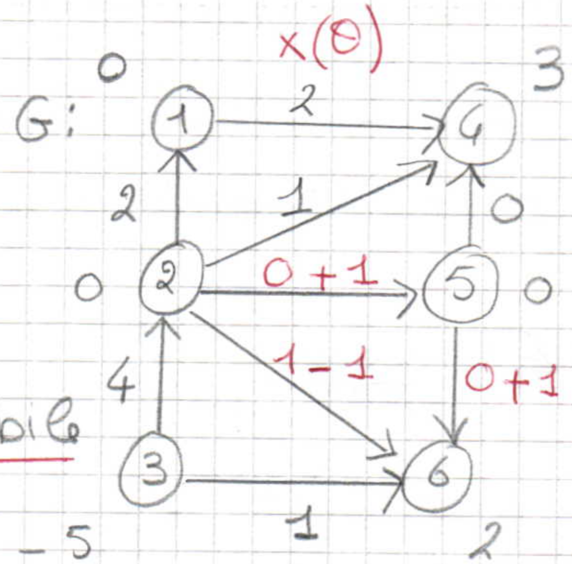




$$cx = \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} = 40$$



$\Rightarrow x(\theta)$ è ammissibile



ciclo aumentante $C$

$$\theta(C, x) = \min\{2, 1, 1\} = 1 = \theta$$

Qual è il costo di $x(\theta)$?

Se $c(C) = \sum_{(i,j)\in C^+} c_{ij} - \sum_{(i,j) C^-} c_{ij}$ <u>è il costo di $C$</u>

(ovvero è la somma dei costi degli archi in $G_x$), allora:

$$cx(\theta) = c(x \oplus \theta C) = cx + \theta c(C)$$

<u>Quindi</u>: se $c(C) < 0$, ovvero $C$ è un <u>ciclo aumentante negativo</u>, allora $cx(\theta) < cx$, e pertanto $x$ <u>non</u> è un flusso di costo minimo.

<u>Condizione necessaria per l'ottimalità di un flusso ammissibile $x$</u>: non devono esistere cicli aumentanti negativi in $G_x$

<u>Esempio</u>

$c(C) = -3$, quindi $x$ <u>non</u> è un flusso di costo minimo.

Infatti $cx(\theta) = cx + \theta c(C) = 40 + 1(-3) = 37$

La condizione è anche sufficiente?

Serve il seguente risultato:

Teorema di decomposizione di flussi:

Siano $x$ e $x'$ flussi ammissibili in $G$.

Allora esistono $k$ cicli aumentanti in $G_x$, $C_1, C_2, \dots C_k$, con $k \leq m$, tali che

$$x' = x \oplus \theta_1 C_1 \oplus \theta_2 C_2 \oplus \dots \oplus \theta_k C_k$$

con $0 < \theta_i \leq \theta(C_i, x)$ $i = 1, \dots k$

Ovvero: un qualsiasi flusso ammissibile $x'$ è ottenibile da un qualsiasi (altro) flusso ammissibile $x$ inviando flusso lungo al più $m$ cicli aumentanti rispetto a $x$

Dim (costruttiva)

capacità

Sia $A_x^+ = \{(i,j) : x'_{ij} > x_{ij}\}$ $\quad d_x(i,j) = x'_{ij} - x_{ij} > 0$

e $A_x^- = \{(j,i) : x'_{ij} < x_{ij}\}$ $\quad d_x(j,i) = x_{ij} - x'_{ij} > 0$

esempio:

se $i \xrightarrow{x_{ij}=4} j$ , $x'_{ij}=7$ in $A^+_x$: $i \xrightarrow{d_x(i,j)=3} j$

se $i \xrightarrow{x_{ij}=3} j$ , $x'_{ij}=2$ in $A^-_x$: $i \xleftarrow{d_x(j,i)=1} j$

(devo togliere un'unità di flusso)

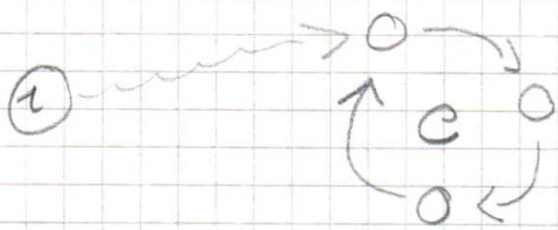
Sia $\bar{G}_x = (N, A^+_x \cup A^-_x)$ : sottografo di $G_x$

Proprietà: se un nodo in $\bar{G}_x$ ha un arco entrante, deve avere almeno un arco uscente

Quindi (procedura per convertire $x$ in $x'$):

- scelgo un nodo $i$ avente almeno un arco uscente in $\bar{G}_x$ (se non ne esistono STOP: $x = x'$)
- visito $\bar{G}_x$ a partire da $i$ fino a visitare un nodo già visitato: ciclo

aumentante rispetto a x ($C$)



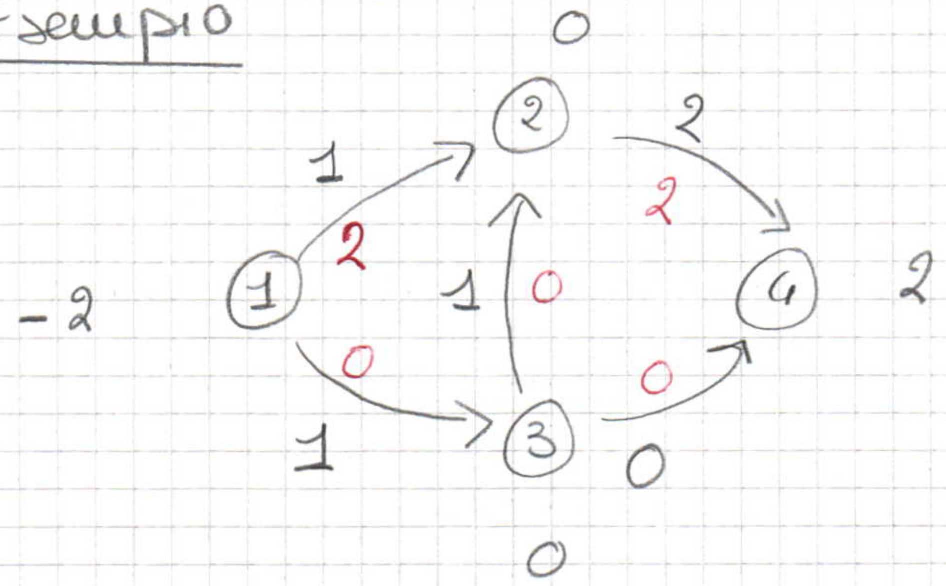

- invio la quantità di flusso $\theta = \min\{d_x(i,j) : (i,j) \in C\}$ lungo $C$
- elimino da $\bar{G}_x$ ogni arco $(i,j)$ tale che $x_{ij} = x'_{ij}$ dopo l'invio (almeno uno)
- aggiorno le capacità $d_x(i,j)$ e itero finché $x$ è stato convertito in $x'$

$\boxed{\text{O(m) invii lungo cicli aumentanti rispetto a x !}}$

□

ovvero ho eliminato ogni arco da $\bar{G}_x$

## Esempio



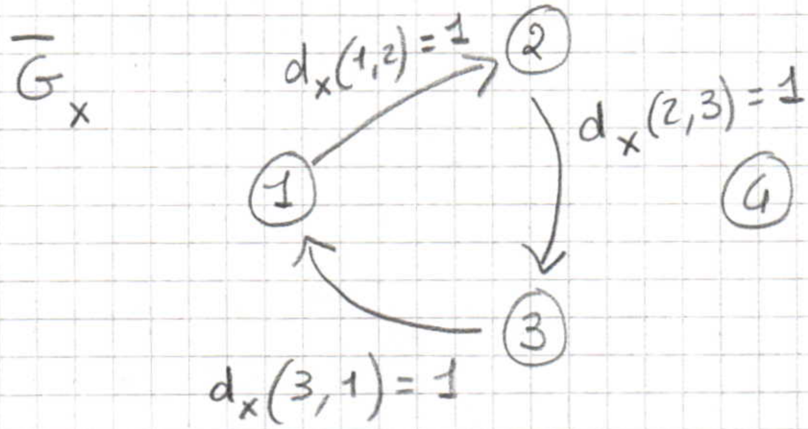
$u_{ij} = 3$

$\forall (i,j)$

$x$

$x'$

Convertiamo $x$ in $x'$ :



- ciclo aumentante rispetto a $x$ ; invio

  $\theta = \min\{1, 1, 1\} = 1$ lungo $C$

- così facendo converto $x$ in $x'$ : STOP

  (rimuovo i 3 archi da $\overline{G}_x$)

Segue il seguente

**Teorema**: Un flusso ammissibile $x$ è di costo minimo **sse** non esistono cicli aumentanti negativi rispetto a $x$

**Dim**

**solo se** (già dimostrato)

**se** (sufficienza): supponiamo non esistano cicli aumentanti negativi rispetto a $x$.

Sia $x'$ un qualsiasi altro flusso ammissibile in $G$; per il Teorema di decomposizione di flussi

$$x' = x \oplus \theta_1 C_1 \oplus \dots \oplus \theta_K C_K$$

quindi

$$c x' = c x + \overset{>0}{\theta_1} \underset{\geq 0}{c(C_1)} + \dots + \overset{>0}{\theta_K} \underset{\geq 0}{c(C_m)}$$

per ipotesi

Quindi $c x' \geq c x$, cioè $x$ è un flusso di costo minimo

□

Le condizioni di ottimalità suggeriscono il seguente algoritmo:

## 2.6.3 Algoritmo basato su cancellazione di cicli

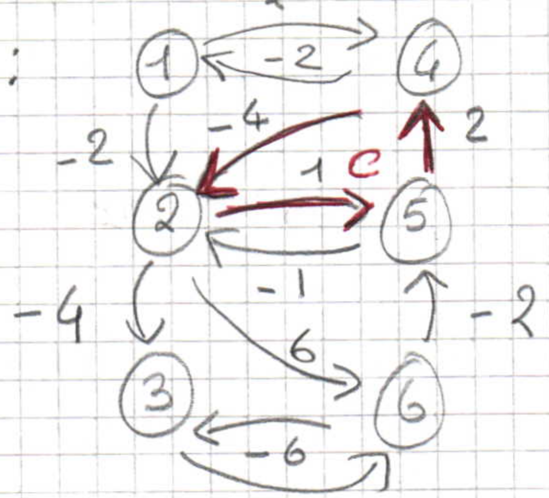
pag. 115

- Determina, se esiste, un flusso ammissibile $x$
- Finché esistono cicli negativi:
  - determina un ciclo negativo, $C$, in $G_x$
  - sia $\theta = \theta(C, x)$ la massima quantità di flusso inviabile lungo $C$
  - aggiorna $x$ : $x := x \oplus \theta C$

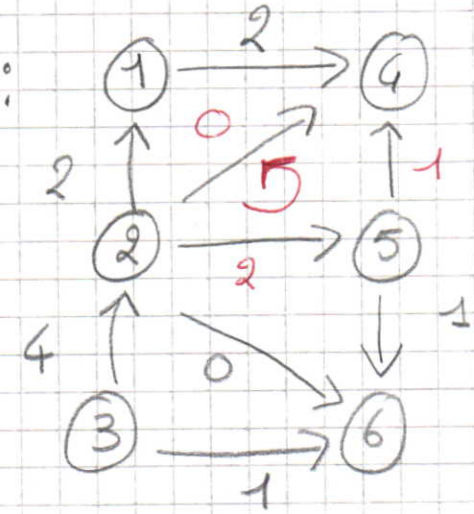
(procedura Cancella-Cicli pag 116) ("cancella" $C$)

Esempio (cont.)

$G_x$ :

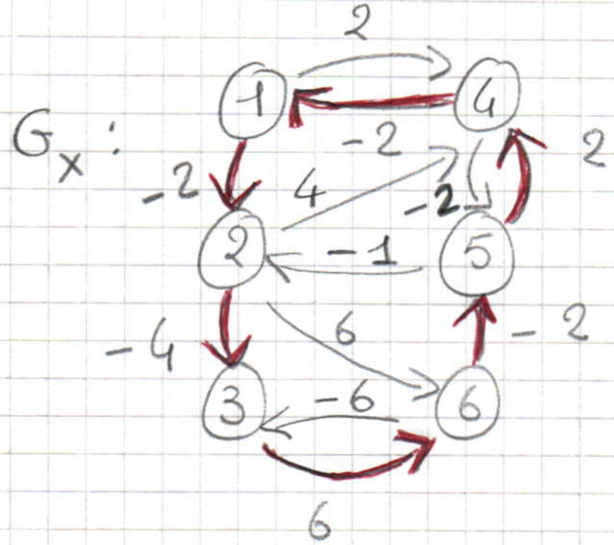


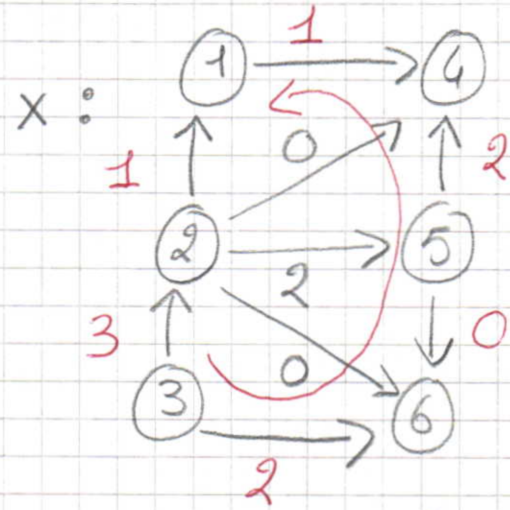

$x$ :




$c(C) = -1 \quad \theta = 1$

$cx = 37 + \theta(-1) = 36$

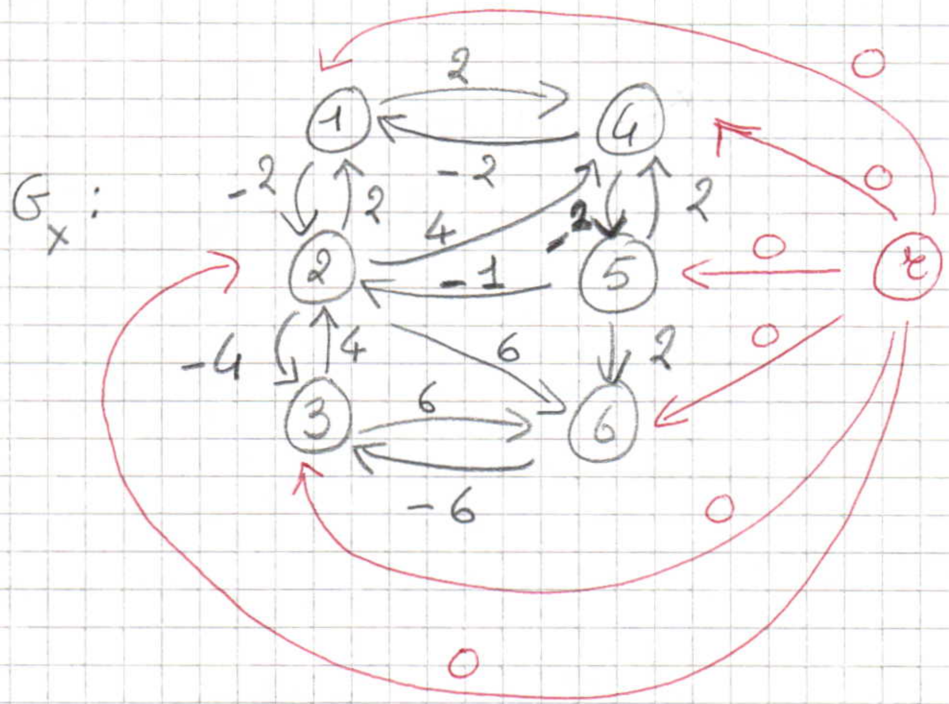




$c(C) = -2 \quad \theta = 1$

$cx = 36 + \theta(-2) = 34$

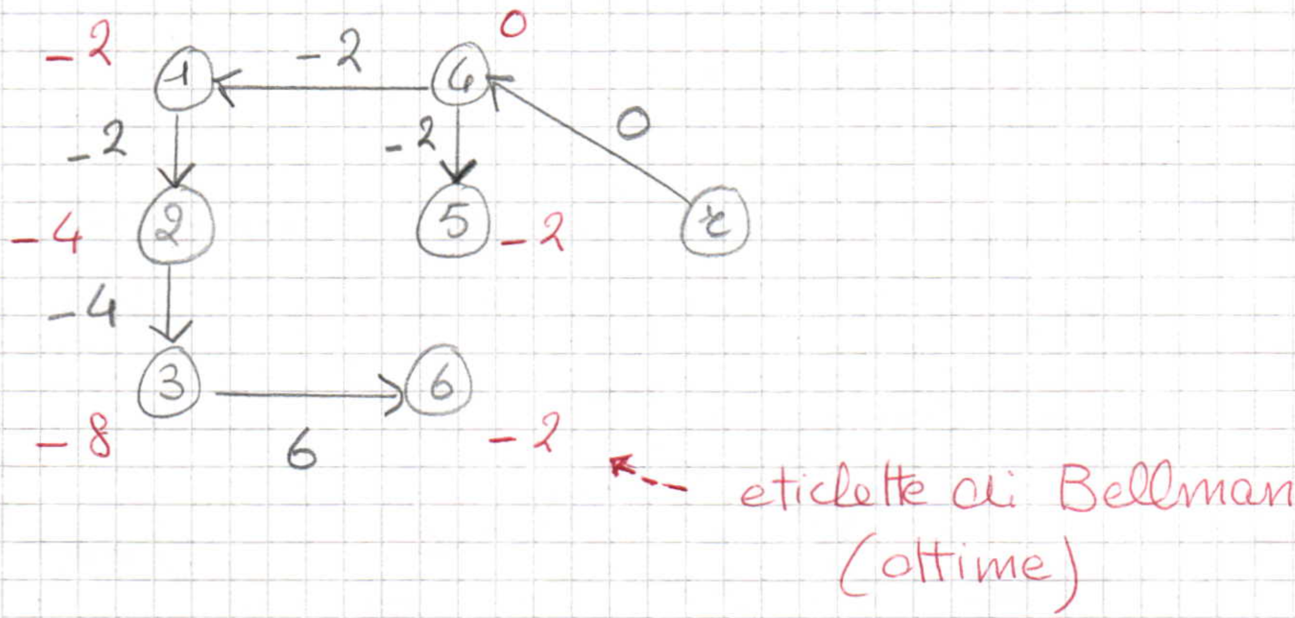
Esistono altri cicli negativi in $G_x$? Come determinarli? algoritmo di Bellman per cammini minimi avente come radice r l'insieme dei nodi di G:



Cerchiamo un albero dei cammini minimi di radice $r$ in $G_x$ : esiste <u>sse</u> non esistono cicli negativi in $G_x$ <u>sse</u> l'algoritmo di Bellman aggiorna l'etichetta di ogni nodo al più $(n-1)$ volte :

$Q = (4\ 1\ 2\ 5\ 3\ 6)$ coda

$T_r$ :




Poiché le etichette associate ai nodi soddisfano le condizioni di Bellman, $T_r$ è un albero dei cammini minimi di radice $r$, e quindi <u>non</u> esistono cicli aumentanti di costo negativo : <u>STOP</u> il flusso $x$ di costo $cx = 34$ è un flusso di costo minimo

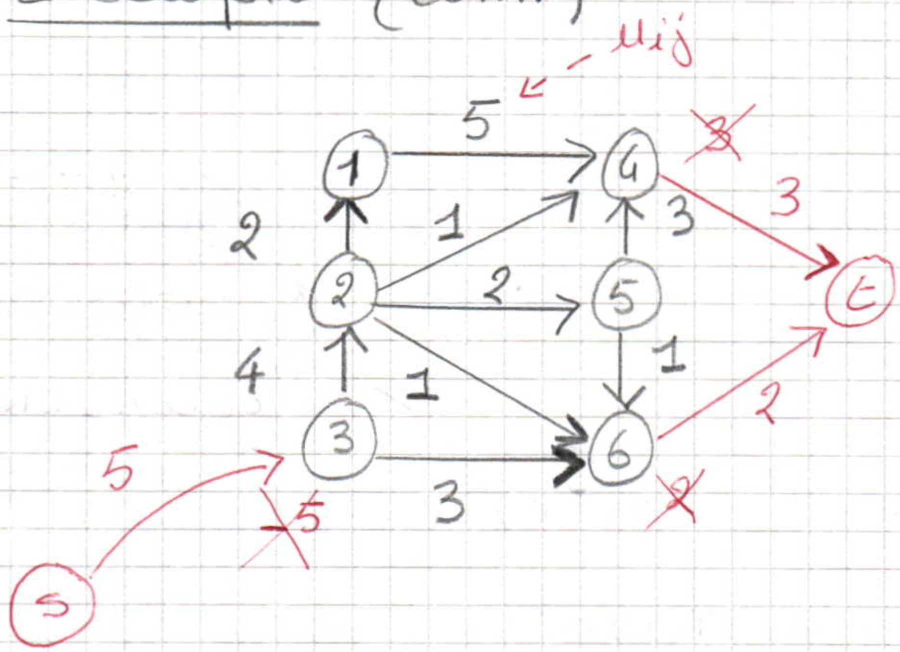
## Dettagli implementativi:

1) a livello di svolgimento degli esercizi, i cicli negativi possono essere cercati per ispezione, salvo che all'ultima iterazione

2) i cicli negativi possono essere cercati direttamente in G (come per il problema di flusso massimo)

3) come determinare, se esiste, un flusso ammissibile iniziale? mediante un algoritmo di flusso massimo:

Esempio (cont.)




In G esiste un flusso ammissibile sse il flusso massimo da s a t, nel grafo esteso, ha valore $v = 5 = \sum_{i \in O} (-b_i) = \sum_{i \in D} b_i$

nodi offerta — nodi domanda

< Esercizio: determinare un flusso massimo da $s$ a $t$, e verificare che $v = 5$ >

Proprietà (integralità dei flussi): se $u_{ij}$ è intero $\forall (i,j) \in A$, allora ogni flusso $x$ determinato dall'algoritmo è intero ($\theta = \theta(\mathcal{C}, x) \geq 1$ intero ad ogni iterazione)

Complessità computazionale in tempo ($u_{ij} \in \mathbb{Z}^+$)

Sia $\bar{U} = \max \{ u_{ij} : (i,j) \in A \}$

sia $\bar{C} = \max \{ |c_{ij}| : (i,j) \in A \}$

$\forall$ flusso ammissibile $x$:

$$-m\bar{U}\bar{C} \leq cx \leq m\bar{U}\bar{C}$$

$O(nm^2\bar{U}\bar{C})$ complessità di CANCELLA_CICLI

Se $c_{ij} \in \mathbb{Z}$ $\forall (i,j)$: $c(\mathcal{C}) \leq -1$ intero $\forall \mathcal{C}$ ciclo negativo

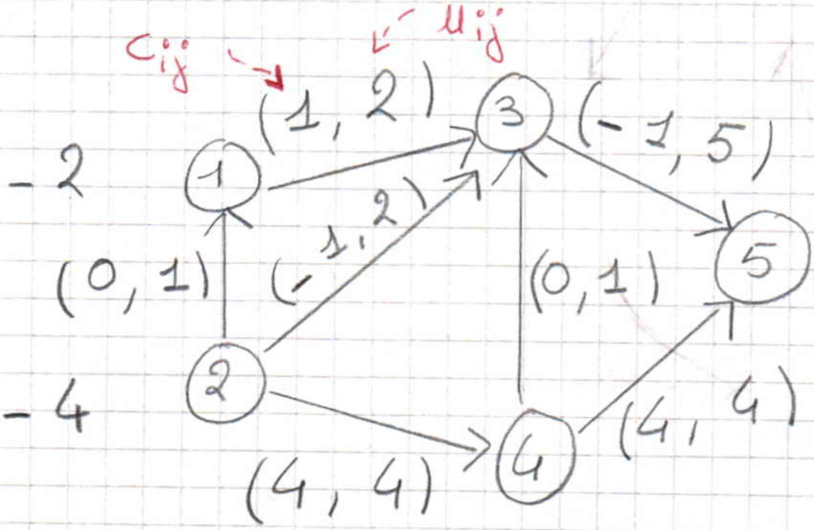
Poiché $\theta \geq 1$ ad ogni iterazione, il costo

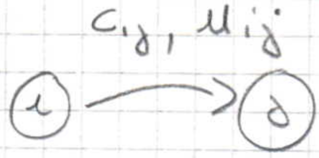
$cx := cx + \theta c(\mathcal{C})$

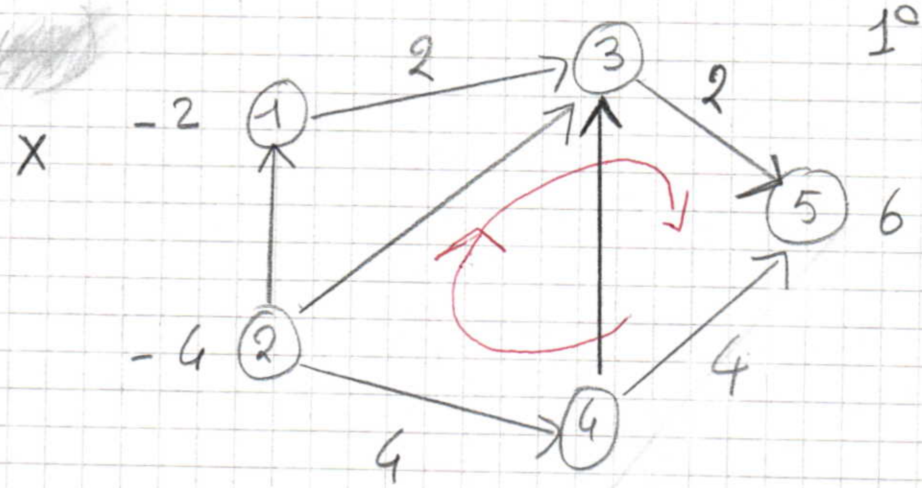
della funzione ob. diminuisce di almeno 1 $(\theta c(\mathcal{C}))$ ad ogni iterazione: $\boxed{O(m\bar{U}\bar{C})}$ # iterazioni

costo per iterazione: $\boxed{O(mn)}$ alg. Bellman

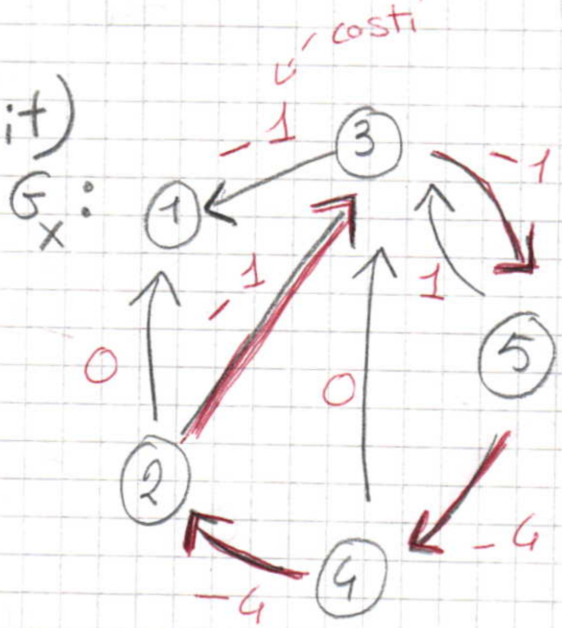
# Esercitazione Cancella - Cicli



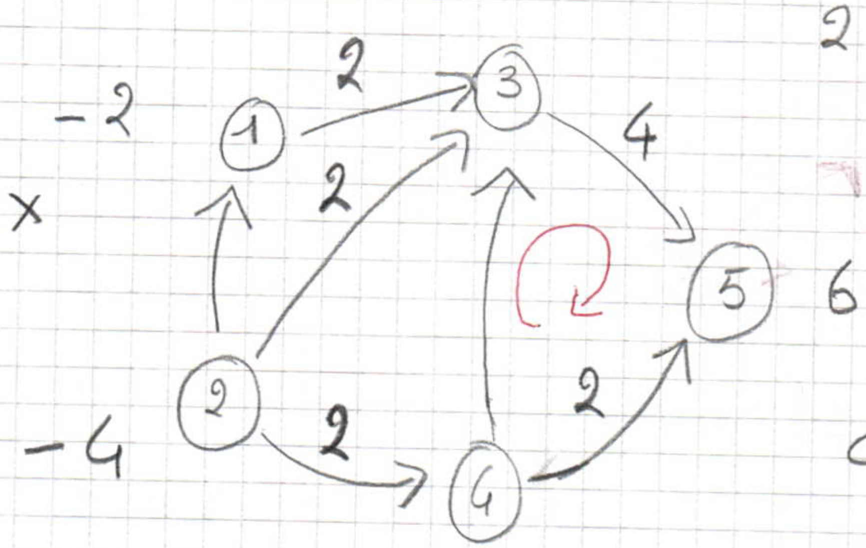

1° it)




$cx = 32$

$c(C) = -1 -1 -4 -4$
$= -10$

$\theta(C, x) = \min\{2,\ 5-2,\ 4,\ 4\} = 2$



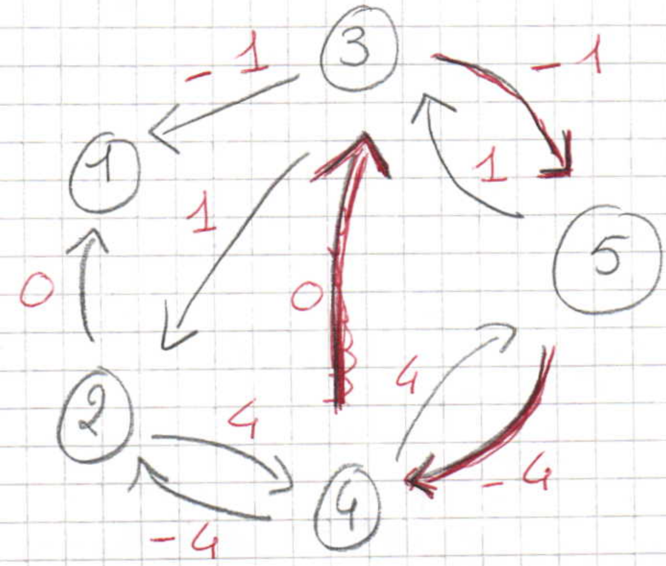

**OSS su integralità flussi**
e $\theta(C, x) \geq 1$
e $c(C) \leq -1$

$cx = 32 + \underbrace{2(-10)}_{\theta(C,x)\cdot c(C)}$
$= 32 - 20 = 12$

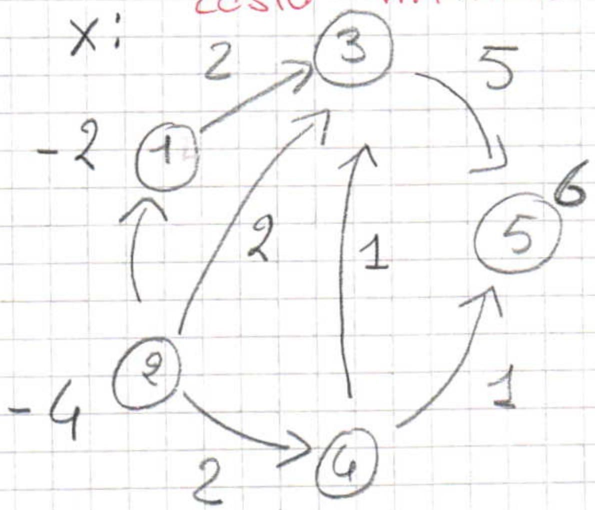
Flusso di costo minimo

2° it)

$G_x$:



x:

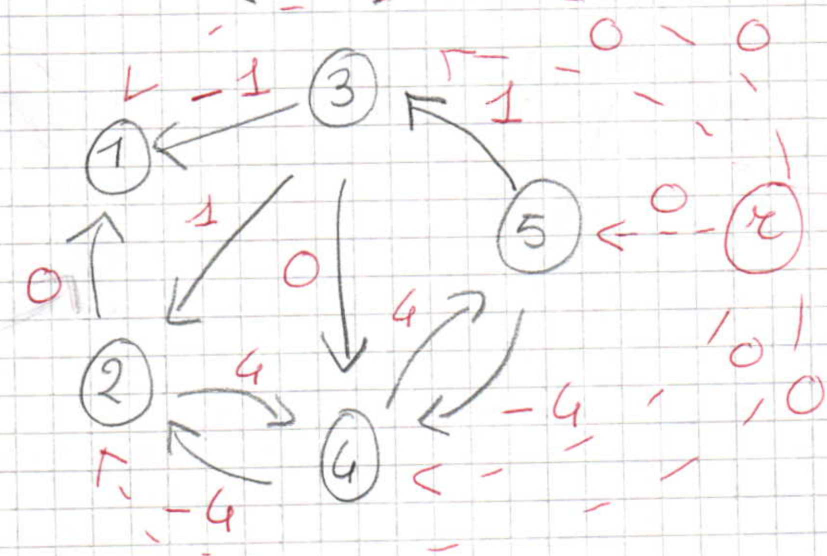


$c(C) = -5 \quad \theta(C,x) = \min\{1, 1, 2\} = 1$

$cx = 12 + 1(-5) = 7$

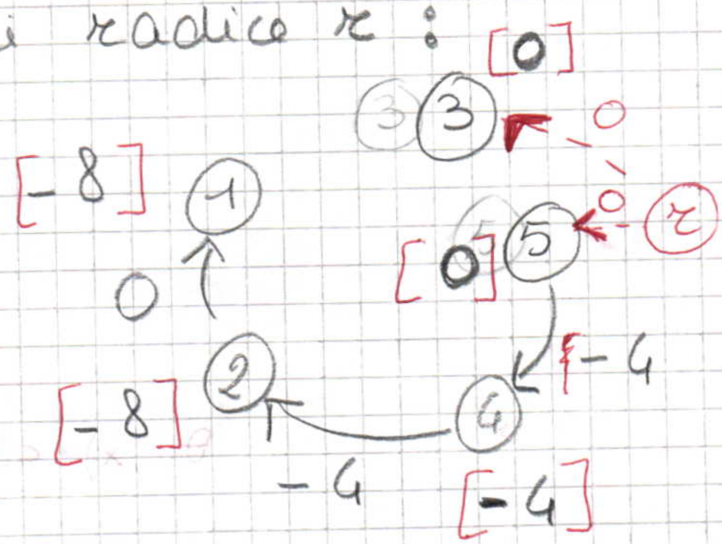
3° it)

$G_x$:



∃no altri cicli aumentanti negativi ?
Applico l'algoritmo di Bellman per verificare se esiste un albero dei cammini minimi di radice r :

$T_r$



Esiste, ovvero ∄no cicli negativi in $G_x$

STOP

Il flusso di costo minimo costo 7