

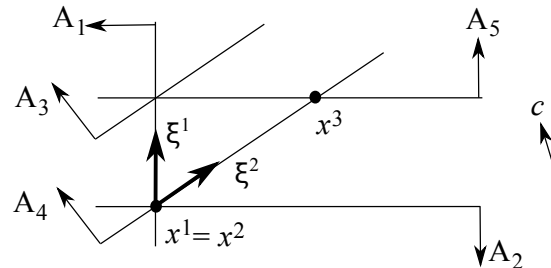
RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)

Nome:

Cognome:

Matricola:

1) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simpleso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, se l'algoritmo ha determinato una soluzione ottima si discuta l'unicità della soluzione ottima duale.

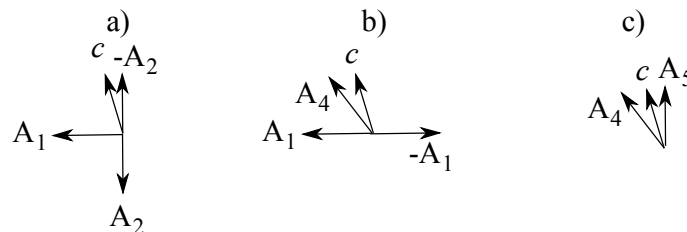


SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$, $y_1 > 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 ed $-A_2$, come mostrato in a); quindi, $h = 2$. La base è primale degenera, in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 4\} \supset B$, ma è duale non degenera perché nessuna delle variabili duali in base ha valore zero (c è interno al cono generato da A_1 ed $-A_2$, non coincidendo con nessuno dei due generatori). Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del vincolo 4, attivo ma non in base; quindi $k = 4$ e si esegue un cambio di base degenera.

it. 2) $B = \{1, 4\}$, $y_1 < 0$ e $y_4 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ ed A_4 , come mostrato in b); quindi, $h = 1$. La base continua (ovviamente) ad essere primale degenera e duale non degenera. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, quindi $k = 5$ e si esegue un cambio di base non degenera.

it. 3) $B = \{4, 5\}$, $y_4 > 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_4 ed A_5 , come mostrato in c); quindi l'algoritmo termina avendo individuato in x^3 una soluzione ottima del primale. La base è primale non degenera, in quanto $I(x^3) = \{4, 5\} = B$, ed anche duale non degenera. Il fatto che la base ottima sia primale non degenera assicura che la soluzione ottima del duale sia unica. Infatti, in una qualsiasi soluzione ottima duale le variabili corrispondenti agli indici non appartenenti a $I(x^3)$ devono necessariamente valere zero, e $I(x^3)$ costituisce una base.



2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcll} \max & -x_1 & + & x_2 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

Si verifichi se la soluzione $\bar{x} = [1, 2]$ sia ottima per il problema. Inoltre, si specifichi se \bar{x} sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Infine, nel caso \bar{x} sia ottima, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \max\{ cx : Ax \leq b \} \qquad (D) \quad \min\{ yb : yA = c, y \geq 0 \}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia \bar{x} una soluzione ammissibile per (P). Allora, \bar{x} è ottima se e solo se esiste una soluzione \bar{y} ammissibile per (D) complementare a \bar{x} , ovvero tale che \bar{x} e \bar{y} verifichino le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità delle soluzioni \bar{x} e \bar{y} , le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Per il problema in esame si ha:

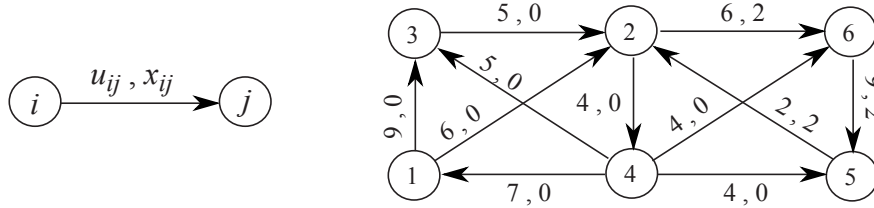
$$\begin{array}{rcll} \max & -x_1 & + & x_2 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ (P) & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \min & 5y_1 & + & y_2 \\ & y_1 & - & y_2 & - & y_4 & = & -1 \\ (D) & 2y_1 & + & y_2 & - & y_3 & = & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = [1, 2]$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in \bar{x} è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : A_i\bar{x} = b_i\} = \{1, 2\}$. Di conseguenza, una soluzione duale \bar{y} , tale che $\bar{y}A = c$, che formi con \bar{x} una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_3 = \bar{y}_4 = 0$. Affinché \bar{y} sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = -1 \\ 2y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

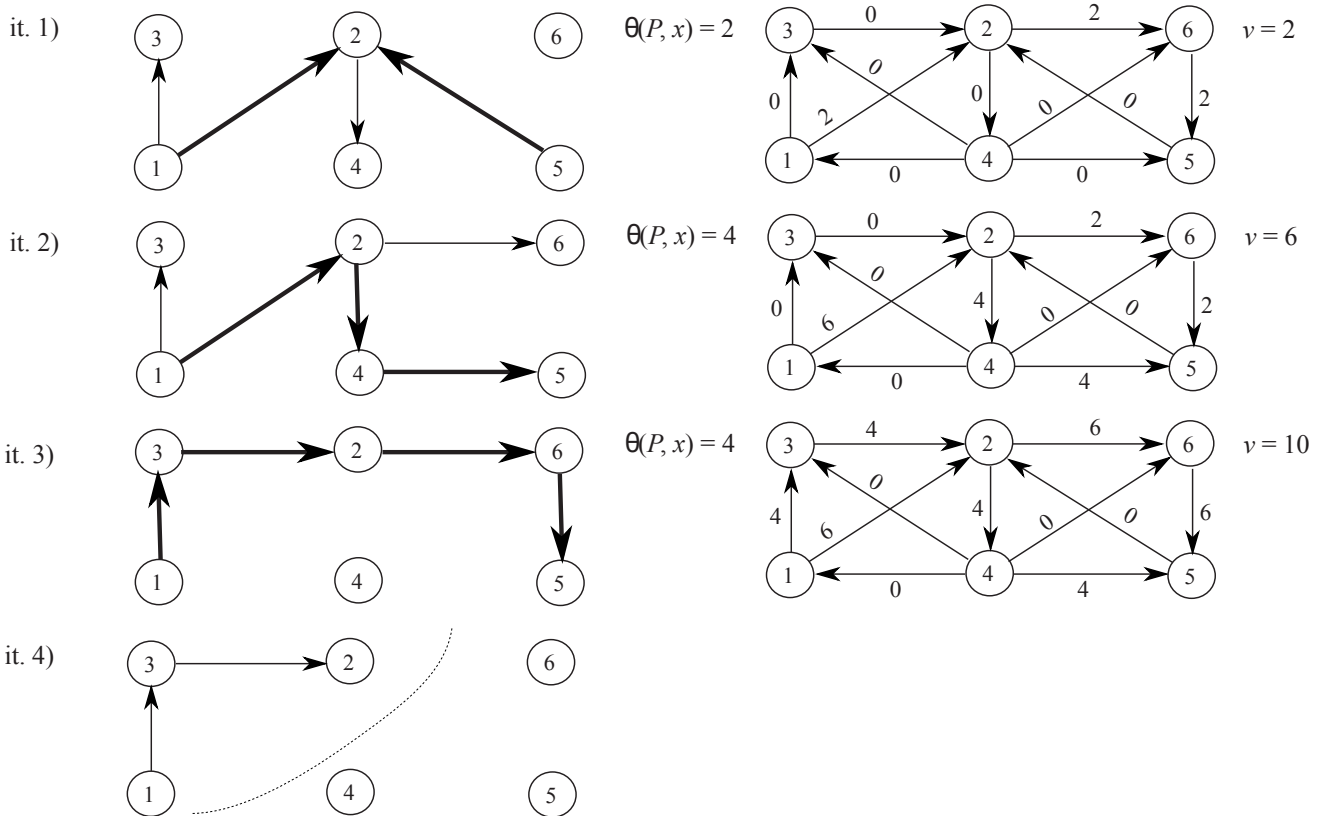
che ammette l'unica soluzione $[0, 1]$; $\bar{y} = [0, 1, 0, 0]$ ha componenti non negative, pertanto \bar{x} è soluzione ottima di (P) e \bar{y} è l'unica soluzione ottima di (D). Infine, poiché la sottomatrice dei vincoli attivi in \bar{x} è di rango massimo e di ordine 2, segue che \bar{x} è una soluzione di base (ammissibile) non degenera.

3) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 5 sulla rete in figura, utilizzando l’algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore $v = 0$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l’ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l’albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall’algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine se la soluzione determinata sarebbe ancora ottima se l’arco (5, 2) avesse capacità $u_{52} = 4$.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall’alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l’albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all’invio, lungo P , di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v . Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\})$ determinato dall’algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l’ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell’ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{24} + u_{26} = 4 + 6 = 10 = v$.



Se l’arco (5, 2) avesse capacità $u_{52} = 4$, la soluzione ottima rimarrebbe la stessa. Infatti l’arco (5, 2) appartiene al taglio, ma è in esso inverso; quindi la sua capacità superiore non è rilevante ai fini della capacità del taglio, che rimane $u(N_s, N_t) = 10$.

4) Si consideri il seguente modello matematico:

$$\begin{aligned} \max \quad & \min\{2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3\} \\ & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \\ & x_1 = 1 \implies x_2 \in \{2, 5, 8\} \\ & x_1 = 0 \implies x_2 = 0 \\ & x_1 = 1 \text{ and } x_3 = 1 \implies x_2 = 5 \end{aligned}$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*). Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il modello matematico proposto non è un modello di *PLI* in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare (bensì è definita come il minimo di due funzioni lineari);
- la variabile x_2 è una variabile a valori discreti;
- sono presenti implicazioni logiche che legano la variabile x_2 ai valori assunti dalle variabili binarie x_1 e x_3 .

Il modello può comunque essere (ri)formulato in termini di modello *PLI* nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \max \quad & z \\ & z \leq 2x_1 - x_2 + x_3 \\ & z \leq -x_1 + x_2 + 2x_3 \\ & x_2 = 2y_1 + 5y_2 + 8y_3 \\ & y_1 + y_2 + y_3 = x_1 \\ & y_1, y_2, y_3 \in \{0, 1\} \\ & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \\ & y_2 \geq x_1 + x_3 - 1. \end{aligned}$$

La variabile di soglia z , infatti, permette di stimare per difetto il minimo tra i valori restituiti dalle funzioni lineari $2x_1 - x_2 + x_3$ e $-x_1 + x_2 + 2x_3$. Massimizzando z , il solutore attribuisce pertanto a x_1 , x_2 e x_3 quei valori (ammissibili) che massimizzano il minimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

Le variabili binarie ausiliarie y_1, y_2 e y_3 permettono di formulare la variabile a valori discreti x_2 utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso. Si noti che, se $x_1 = 1$, una di tali variabili deve assumere il valore 1, e pertanto $x_2 \in \{2, 5, 8\}$, come richiesto. Se invece $x_1 = 0$, il vincolo $y_1 + y_2 + y_3 = x_1$ forza tutte le variabili ausiliarie a zero, e quindi $x_2 = 0$, come specificato. Infine, l'ultimo vincolo del modello *PLI* garantisce che, se $x_1 = x_3 = 1$, allora la variabile ausiliaria y_2 sia forzata ad assumere il valore 1, e quindi x_2 assuma il valore 5, come desiderato.

5) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rcccccl} \max & 8x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +x_5 & & & & & \\ & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & \leq & 13 & & & \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0, 1\} & & & \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con \bar{x} quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con \bar{z} la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con \underline{z} la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

Inizializzazione La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

Nodo radice $x^* = [1, 1, 1, 2/3, 0]$, $\bar{z} = 20$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 19$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 19$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4 .

$x_4 = 1$ $x^* = [1, 1, 3/4, 1, 0]$, $\bar{z} = 19 + 3/4$, $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 17$. Poiché $\underline{z} = 17 < z = 19$, z non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore \bar{z} può essere arrotondata per difetto al valore 19. Pertanto, poiché $\bar{z} = 19 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$x_4 = 0$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = \underline{z} = 19$. Il nodo viene pertanto chiuso per ottimalità (avrebbe potuto anche essere chiuso dalla valutazione superiore).

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 0, 1]$, di costo 19.

Si osservi che, nel caso in cui, nel corso dell'analisi del nodo **$x_4 = 1$** , la valutazione superiore \bar{z} non venisse arrotondata per difetto al valore 19, l'algoritmo Branch&Bound genererebbe un ulteriore livello dell'albero di enumerazione prima di dimostrare l'ottimalità della soluzione $[1, 1, 1, 0, 1]$.

6) Si enunci e si dimostri il Teorema Forte della Dualità.

SVOLGIMENTO L'enunciato del Teorema Forte della Dualità è il seguente. Sia data una coppia (P) e (D) di problemi duali in forma asimmetrica: se (P) e (D) ammettono entrambi soluzioni ammissibili, allora

$$z(P) = \max\{ cx : Ax \leq b \} = \min\{ yb : yA = c, y \geq 0 \} = z(D) .$$

La dimostrazione procede come segue.

Innanzitutto, per il Teorema debole della dualità, poiché (D) ammette soluzioni ammissibili, (P) non può essere (superiormente) illimitato. Essendo non vuoto, (P) ha pertanto ottimo finito e quindi almeno una soluzione ottima, che denotiamo con x^* . Segue che non possono esistere direzioni ξ ammissibili di crescita per x^* (vale in effetti anche l'implicazione inversa).

Se $c = 0$, allora $z(P) = 0$ e $y = 0$, ammissibile per (D) , è quindi ottima; in questo caso il Teorema è quindi dimostrato. Assumiamo perciò $c \neq 0$, e denotiamo con I l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x^* . È immediato notare che $I \neq \emptyset$. Infatti, se così non fosse, qualsiasi direzione sarebbe ammissibile per x^* , e quindi in particolare c ($\neq 0$) sarebbe una direzione ammissibile di crescita.

Consideriamo adesso i sistemi *Primale Ristretto* e *Duale Ristretto* (ovvero primale e duale ristretti ai soli vincoli attivi), che caratterizzano le direzioni ammissibili di crescita per x^* :

$$(P_R) \quad \begin{cases} A_I \xi & \leq 0 \\ c \xi & > 0 \end{cases} \quad (D_R) \quad \begin{cases} y_I A_I & = c \\ y_I & \geq 0. \end{cases}$$

Poiché x^* è ottima, il sistema (P_R) non può avere soluzioni. Per il Lemma di Farkas, quindi, il sistema (D_R) ammette almeno una soluzione \bar{y}_I . La soluzione $\bar{y} = [\bar{y}_I, 0]$ è pertanto ammissibile per (D) , poiché $\bar{y}A = \bar{y}_I A_I = c$ e $\bar{y}_I \geq 0$ implica $\bar{y} \geq 0$.

Infine, è immediato verificare che \bar{y} ed x^* rispettano le *condizioni degli scarti complementari*, in quanto hanno lo stesso valore della funzione obiettivo (rispettivamente duale e primale). Per questo è sufficiente notare che

$$\bar{y}b = \bar{y}_I b_I = \bar{y}_I A_I x^* = c x^*$$

dove la seconda uguaglianza deriva dalla definizione di I e la terza dal fatto che \bar{y}_I risolve (D_R) . Segue che \bar{y} è ottima per (D) , e la tesi segue.