RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & & & \leq & 1 \end{array}$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{1, 2\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$h = \min\{i \in B : \bar{y}_i < 0\} = 2, \quad B(h) = 2,$$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{3, 4, 5\},$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i \bar{x}) / A_i \xi, \quad \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = 2, \quad \lambda_5 = 0, \quad \bar{\lambda} = \min\{\lambda_i \ : \ i \in J\} = 0,$$

$$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = 5 \ \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{1, 5\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad h = 1, \quad B(h) = 1,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{3, 4\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_3 = \lambda_4 = 2, \quad k = \min\{3, 4\} = 3 \ \text{[regola anticiclo di Bland]}$$

it.3) $B = \{3, 5\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad h = 5, \quad B(h) = 2,$$

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$J = \{4\}, \quad \bar{\lambda} = \lambda_4 = 0, \quad k = 4 \ \text{[cambio di base degenere]}$$

it.4) $B = \{3, 4\}, \quad A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

Poiché $\bar{y}_B \geq 0$, la soluzione $\bar{x} = [-1, 0]$ è ottima per il problema dato, mentre $\bar{y} = [0, 0, 1, 1, 0]$ è una soluzione ottima per il suo problema duale.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrr}
\min & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & & \\
& 2y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & = & 4 \\
& y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & - & 3y_4 & = & -2 \\
& -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 2 \\
& y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Utilizzando gli scarti complementari, si verifichi se la soluzione $\bar{y} = [1, 0, 0, 1]$ sia ottima per il problema. In questo caso si individuino tutte le soluzioni ottime del problema. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \max\{\, cx \;:\; Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D) \min\{\, yb \;:\; yA = c\,,\; y \geq 0 \,\}$$

il teorema della dualità forte ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità duale:

Proposizione. Sia $\bar{y}$ una soluzione ammissibile per (D). Allora, $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) complementare ad $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino la condizione degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m \;\; .$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcrcr}
\max & 4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & & \\
& 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 3 \\
& -x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 2 \\
& 2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & -1
\end{array}
\qquad
(D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcrr}
\min & 3y_1 & + & 3y_2 & + & 2y_3 & - & y_4 & & \\
& 2y_1 & + & 2y_2 & - & y_3 & + & 2y_4 & = & 4 \\
& y_1 & + & y_2 & + & 3y_3 & - & 3y_4 & = & -2 \\
& -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 2 \\
& y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0
\end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{y} = [1, 0, 0, 1]$ è ammissibile per (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $J(\bar{y}) = \{j \in \{1, \ldots, m\} : \bar{y}_j > 0\} = \{1, 4\}$. Di conseguenza, una soluzione primale $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $b_i - A_i\bar{x} = 0$ per $i = 1, 4$, ovvero il primo ed il quarto vincolo devono essere attivi. Pertanto, $\bar{x}$ deve risolvere il sistema

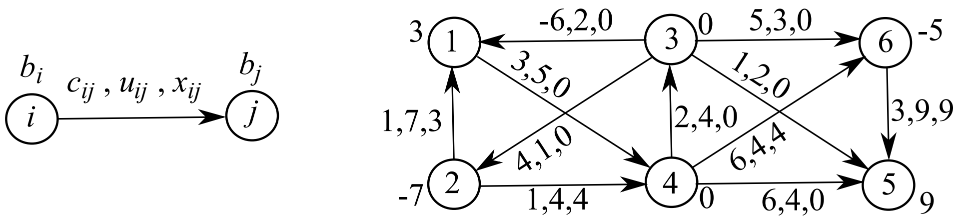
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr}
2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\
2x_1 & - & 3x_2 & + & 3x_3 & = & -1
\end{array} \right. \; .$$

Posto $x_3 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $x(\alpha) = (1, 1 + \alpha, \alpha)$. Tali soluzioni sono ammissibili per (P) per ogni $\alpha \leq 0$. Infatti, sia il secondo che il terzo vincolo sono rispettati per $\alpha \leq 0$. Poiché $x(\alpha)$ soddisfa la condizione degli scarti complementari con $\bar{y}$ ed è ammissibile per $\alpha \leq 0$, $\bar{y}$ è una soluzione ottima per (D).
Si osservi che ogni soluzione $x(\alpha)$ con $\alpha \leq 0$ è soluzione ottima di (P), e che pertanto ogni soluzione ottima di (D) deve soddisfare la condizione degli scarti complementari con ogni $x(\alpha)$ per $\alpha \leq 0$. Per $\alpha < 0$, l'insieme degli indici dei vincoli attivi in $x(\alpha)$ è $I(x(\alpha)) = \{1, 4\}$. Di conseguenza una soluzione duale $\hat{y}$ che formi con $x(\alpha)$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\hat{y}_2 = \hat{y}_3 = 0$. Affinché $\hat{y}$ sia ammissibile per (D), deve soddisfare il seguente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr}
2y_1 & + & 2y_4 & = & 4 \\
y_1 & - & 3y_4 & = & -2 \\
-y_1 & + & 3y_4 & = & 2 \\
y_1 & , & y_4 & \geq & 0
\end{array} \right. \; ,$$

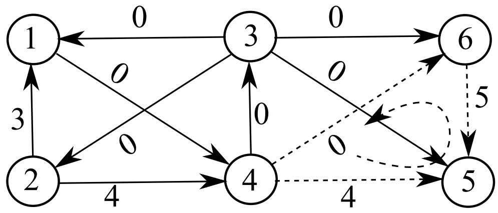
la cui unica soluzione è $(\hat{y}_1, \hat{y}_4) = (1, 1)$. Quindi, $\hat{y} = \bar{y} = [1, 0, 0, 1]$ è l'unica soluzione ottima di (D).

3) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 58$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

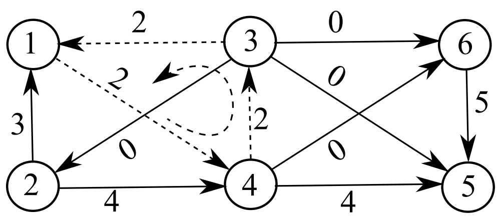


SVOLGIMENTO

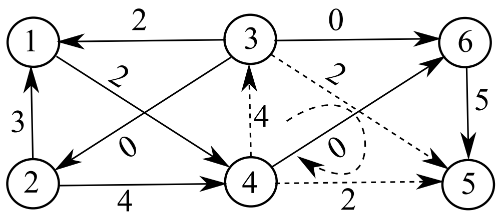
L'algoritmo esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (da sinistra a destra, dall'alto in basso): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La quarta figura, in basso a destra, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



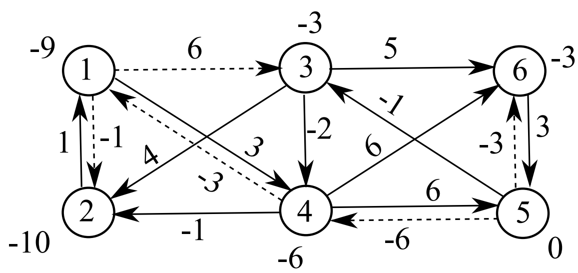
$\theta = 4$, $c(C) = -3$, $cx = 46$



$\theta = 2$, $c(C) = -1$, $cx = 44$



$\theta = 2$, $c(C) = -3$, $cx = 38$



4) Si consideri il seguente problema di Programmazione Matematica:

$$\begin{aligned} \min \quad & \|x-y\|_\infty \\ & x_1+x_2+y_1+y_2 = w \\ & w \in \{3,7,11\} \\ & x, y \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

dove $\|\cdot\|_\infty$ denota la norma infinito in $\mathbb{R}^2$, ovvero $\|z\|_\infty = \max\{|z_1|, |z_2|\}$. Si formuli il problema in termini di *Programmazione Lineare Intera*, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Il problema di Programmazione Matematica proposto presenta vincoli lineari. Tuttavia la funzione obiettivo è non lineare. Inoltre, la variabile w è a valori discreti. Il problema può comunque essere formulato in termini di *Programmazione Lineare Intera* nel modo seguente:

$$\min v \tag{1}$$
$$x_1 - y_1 \le v \tag{2}$$
$$y_1 - x_1 \le v \tag{3}$$
$$x_2 - y_2 \le v \tag{4}$$
$$y_2 - x_2 \le v \tag{5}$$
$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = w \tag{6}$$
$$w = 3q_1 + 7q_2 + 11q_3 \tag{7}$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1 \tag{8}$$
$$q_1, q_2, q_3 \in \{0,1\} \tag{9}$$

Infatti, poiché $\|x-y\|_\infty = \max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\}$ e $|a| = \max\{a, -a\}$, la funzione obiettivo può essere espressa come

$$\max\{\, x_1-y_1, y_1-x_1, x_2-y_2, y_2-x_2 \,\}.$$

È quindi possibile linearizzarla introducendo la variabile ausiliaria v ed vincoli di soglia (2)–(5). In questo modo la variabile ausiliaria v stima per eccesso il massimo delle 4 differenze che definiscono la norma infinito del vettore $x-y$; di conseguenza, minimizzare v (cf. (1)) equivale a minimizzare la norma infinito di $x-y$ nella regione ammissibile data. Per rappresentare invece la variabile w a valori discreti, sono state introdotte le tre variabili binarie, q_1, q_2 e q_3, relative ai tre valori che w può assumere, a somma 1 (cf. (8)), e si è espressa w mediante $3q_1 + 7q_2 + 11q_3$ (cf. (7)). Si osservi che la variabile w è di fatto ridondante, e pertanto può essere eliminata dal modello combinando il lato sinistro di (6) con il lato destro di (7).

5) Si dimostri che l'algoritmo basato su cammini aumentanti per il problema di Flusso Massimo su un grafo G, da un nodo sorgente s ad un nodo pozzo t, risolve anche il problema di individuare un taglio di capacità minima che separa s da t. Si possono usare, senza dimostrarle, proprietà studiate durante il corso, purché vengano enunciate in maniera rigorosa.

SVOLGIMENTO

Richiamiamo alcune definizioni ed un teorema presentati durante il corso. Indichiamo con (N_s, N_t) un taglio di G che separa s da t, cioè un taglio per cui sia $s \in N_s$ e $t \in N_t$, ed indichiamo con $A^+(N_s, N_t)$ ed $A^-(N_s, N_t)$, rispettivamente, l'insieme degli archi diretti e quello degli archi inversi del taglio. Dato un flusso x, per ogni taglio (N_s, N_t) definiamo il *flusso del taglio* $x(N_s, N_t)$ e la *capacità del taglio* $u(N_s, N_t)$ come segue:

$$x(N_s, N_t) = \sum_{(i,j)\in A^+(N_s,N_t)} x_{ij} - \sum_{(i,j)\in A^-(N_s,N_t)} x_{ij} \ , \tag{10}$$

$$u(N_s, N_t) = \sum_{(i,j)\in A^+(N_s,N_t)} u_{ij} \ . \tag{11}$$

Il seguente teorema fornisce la relazione esistente tra il valore v del flusso x, ed il flusso e la capacità di un qualsiasi taglio di G che separa s da t:

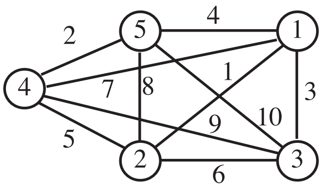
Teorema: Per ogni flusso ammissibile x di valore v e per ogni taglio (N_s, N_t) vale

$$v = x(N_s, N_t) \leq u(N_s, N_t).$$

Il teorema mostra che, comunque si prenda un taglio che separa t da s, il valore di un qualsiasi flusso ammissibile da s a t non può eccedere la capacità di tale taglio. Di conseguenza, se si individua un flusso x il cui valore v sia uguale a $u(N_s, N_t)$, per un dato taglio (N_s, N_t), allora è possibile dimostrare che (N_s, N_t) è un taglio di capacità minima.

Tale è il caso del flusso individuato durante l'ultima iterazione dell'algoritmo basato su cammini aumentanti, quella in cui t non viene raggiunto. Sia infatti N_s l'insieme dei nodi visitati a partire da s durante tale ultima iterazione, e $N_t = N \setminus N_s$. È facile mostrare che il taglio (N_s, N_t) così determinato è *saturo*, ossia tutti gli archi di $A^+(N_s, N_t)$ sono saturi e tutti gli archi di $A^-(N_s, N_t)$ sono vuoti. Infatti, se un arco (i, j) con $i \in N_s$ e $j \in N_t$ non fosse saturo, durante l'iterazione della procedura di visita in cui i viene estratto dall'insieme Q l'algoritmo avrebbe visitato anche j; il ragionamento è analogo per gli archi in $A^-(N_s, N_t)$. Dal teorema segue allora che $v = x(N_s, N_t) = u(N_s, N_t)$, ossia il flusso e la capacità del taglio coincidono. Di conseguenza, (N_s, N_t) è un taglio di capacità minima tra tutti i tagli del grafo che separano s da t. Un'ulteriore importante conseguenza di questa relazione è che x è un flusso massimo.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo depth-first, ossia si implementi Q come una pila, e si inseriscano in Q i figli di ogni nodo in ordine lessicografico decrescente rispetto all'insieme di lati fissati a zero (ad esempio, se si fissano a zero le variabili corrispondenti a $(1,3)$ e $(1,2)$, $(1,3)$ è inserito prima di $(1,2)$; si ricordi che, essendo Q una pila, il figlio inserito per ultimo viene estratto per primo). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni (contando la radice). Se ciò non fosse sufficiente a risolvere il problema, si specifichi la migliore valutazione inferiore e superiore disponibile (e quindi il gap relativo ottenuto), giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 15$, è mostrato in (a). Poichè non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile; pertanto $\underline{z} = 15 < z = +\infty$ ed occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre lati incidenti e creare $3(3-1)/2 = 3$ figli in cui si fissano a zero, rispettivamente, i lati $\{1,5\}$, $\{1,3\}$ e $\{1,2\}$ (i figli sono inseriti in Q in quest'ordine).

$\boxed{x_{12} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (b). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $20 < z = +\infty$, si pone $z = 20$; inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{13} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 18$, è mostrato in (c). Poichè $\underline{z} = 18 < z = 20$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre lati incidenti, e creare tre figli in cui si fissano a zero rispettivamente i lati $\{2,4\}$, $\{2,3\}$ e $\{1,2\}$, inserendoli in Q in quest'ordine.

$\boxed{x_{13} = x_{12} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 24$, è mostrato in (d). Poichè $\underline{z} = 24 > z = 20$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{13} = x_{23} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 21$, è mostrato in (e). Poichè $\underline{z} = 21 > z = 20$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{13} = x_{24} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (f). Poichè $\underline{z} = 20 \geq z = 20$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

Poiché sono stati visitati 6 nodi, l'algoritmo viene interrotto anche se Q non è vuota. L'analisi dell'algoritmo B&B assicura che la valutazione inferiore globale disponibile al momento dell'interruzione è pari a $\min\{\ z\ ,\ \min\ \{\ \underline{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso Q' contiene il solo nodo radice, padre dell'unico nodo $x_{15} = 0$ ancora in Q, che ha la più piccola valutazione inferiore generata, pari a $\underline{z} = 15$. Pertanto $\underline{z} = 15$, generata alla prima iterazione, è la miglior valutazione inferiore disponibile anche quando l'algoritmo termina. Poiché la miglior valutazione superiore è $z = 20$, il gap relativo a terminazione è $(20-15)/15 = 33.\bar{3}\%$.