RICERCA OPERATIVA (a.a. 2014/15)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -4 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

e la corrispondente soluzione $\bar{x} = [3, 3]$. Utilizzando il teorema degli scarti complementari si verifichi se $\bar{x}$ sia una soluzione ottima, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

Il problema duale è

$$\begin{array}{rrrrrcr} \min & -4y_1 & +4y_2 & +6y_3 & +4y_4 & & \\ & -y_1 & +y_2 & +y_3 & & = & 1 \\ & -y_1 & & +y_3 & +y_4 & = & -1 \\ & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \geq & 0 \end{array} .$$

$\bar{x}$ è ammissibile in quanto

$$A\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = b .$$

Dal Teorema degli Scarti complementari si ha che $\bar{x}$ è ottima per il primale se e solo se rispetta le condizioni degli scarti complementari

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$$

con qualsiasi soluzione ottima $\bar{y}$ del duale. Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, la condizione degli scarti complementari è equivalente al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m \ .$$

L'insieme degli indici dei vincoli attivi è $I = I(\bar{x}) = \{\, i \, : \, A_i\bar{x} = b_i \,\} = \{3\}$ (si noti che, di conseguenza, $\bar{x}$ non è una soluzione di base). Dalle condizioni degli scarti complementari segue pertanto che, affinché $\bar{x}$ sia ottima, deve valere $\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = \bar{y}_4 = 0$ in qualsiasi soluzione ottima del duale. Ma imponendo tali condizioni seguirebbe che, in qualsiasi soluzione ottima $\bar{y}$ duale, dovrebbe valere

$$\begin{array}{ll} \bar{y}_3 & = 1 \\ \bar{y}_3 & = -1 \\ \bar{y}_3 & \geq 0 \end{array}$$

che è impossibile. Non esiste quindi nessuna soluzione duale ammissibile che rispetti le condizioni degli scarti complemantari con $\bar{x}$, che pertanto non può essere ottima per il primale.

2) Si risolva il seguente problema di PL

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & & & x_2 & & \\
 & 3x_1 & - & 2x_2 & \leq & 2 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 1
\end{array}
$$

utilizzando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2,4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{2,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$, $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$, $y_N = 0$, $y = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$

$h = \min\{i \in B : y_i < 0\} = \min\{2,4\} = 2$ [regola anticiclo di Bland], $B(h) = 1$

$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, $A_N \xi = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

$J = \{i \in N : A_i \xi > 0\} = \{1,3\}$, $\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_3 = 0$, $\bar{\lambda} = \min\{\lambda_1, \lambda_3\} = 0$ [cambio di base degenere]

$k = \min\{i \in J : \lambda_i = \bar{\lambda}\} = \min\{1,3\} = 1$ [regola anticiclo di Bland]

it.2) $B = \{1,4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$y_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \end{bmatrix}$, $y_N = 0$, $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $h = 4$, $B(h) = 2$

$\xi = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $J = \{3\}$, $\overline{\lambda} = \lambda_3 = 0$ [cambio di base degenere], $k = 3$

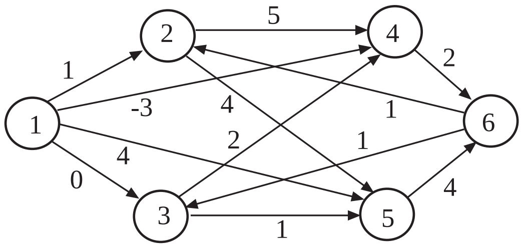
it.3) $B = \{1,3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$y_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix}$, $y_N = 0$, $y = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $h = 1$, $B(h) = 1$

$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $J = \emptyset$

Poiché $A_N \xi \leq 0$, il problema primale è superiormente illimitato, e di conseguenza il suo duale è vuoto.

3) Si risolva il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 1, per l'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo SPT.S. Per ogni iterazione si indichino l'insieme Q all'inizio dell'iterazione, il nodo u estratto da Q e i valori delle etichette e dei predecessori dei nodi. Alla fine si riporti l'albero individuato.



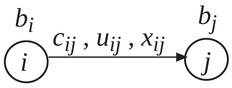
SVOLGIMENTO

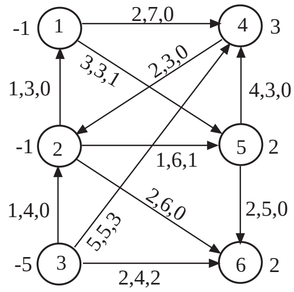
$M = (n-1)C_{max} + 1 = 26.$

Iter.	Q	u	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$
0			0	26	26	26	26	26	1	1	1	1	1	1
1	$\{1\}$	1	0	1	0	-3	4	26	1	1	1	1	1	1
2	$\{2,3,4,5\}$	4	0	1	0	-3	4	-1	1	1	1	1	1	4
3	$\{2,3,5,6\}$	6	0	0	0	-3	4	-1	1	6	1	1	1	4
4	$\{2,3,5\}$	2	0	0	0	-3	4	-1	1	6	1	1	1	4
5	$\{3,5\}$	3	0	0	0	-3	1	-1	1	6	1	1	3	4
6	$\{5\}$	5	0	0	0	-3	1	-1	1	6	1	1	3	4

L'albero trovato è composto dagli archi $(1,3)$, $(1,4)$, $(3,5)$, $(4,6)$ e $(6,2)$.

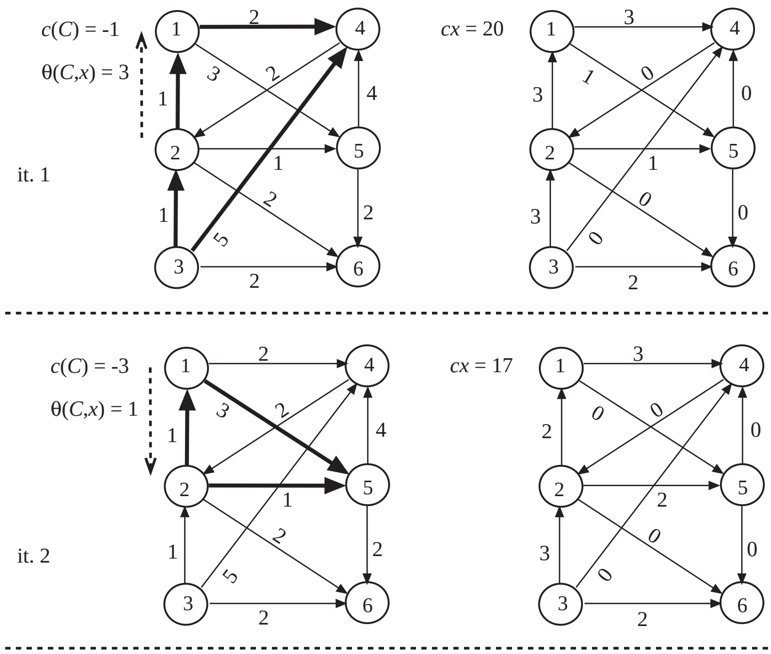
4) Si risolva il problema di Flusso di Costo Minimo, relativamente all'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo basato su cancellazione di cicli a partire dalla soluzione ammissibile indicata di costo $cx = 23$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo determinato con il relativo verso, costo e capacità, e si indichi il flusso individuato con il corrispondente costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

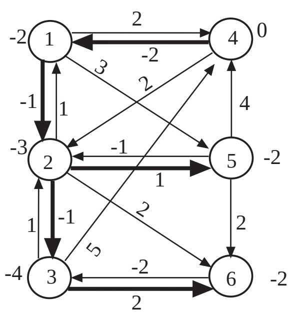




SVOLGIMENTO

L'algoritmo compie le due iterazioni illustrate nel seguito. A sinistra è mostrato il ciclo C individuato (archi in grassetto, sul grafo originale) con il suo verso (freccia tratteggiata), il suo costo $c(C)$ e la sua capacità $\theta(C, x)$. A destra è mostrato il flusso x determinato dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il relativo costo cx. Nell'ultima figura è mostrato il grafo residuo relativo all'ultima soluzione ammissibile, dove è evidenziato un albero dei cammini minimi (archi in grassetto) avente come radice un nodo fittizio (non mostrato in figura) collegato a costo zero a tutti i nodi del grafo originale. Tale albero è ottimo, come si può verificare grazie alle etichette riportate, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto al flusso individuato, che quindi è ottimo.





5) Casciana Jones, famoso avventuriero/archeologo, si trova davanti alla porta della camera del tesoro in una piramide Tolteca. Sulla porta ci sono quattro leve: la prima è contrassegnata dal sole, la seconda dalla luna, la terza da una montagna e la quarta da un fiume. Sulla porta sono presenti le seguenti oscure iscrizioni:

- il sole e la luna non possono risplendere insieme;
- il fiume può scorrere solamente se almeno uno tra il sole e la luna risplendono;
- quando la montagna trema ed il fiume scorre, il sole non può risplendere;
- solo quando la montagna trema ed il fiume scorre potrai rimirare "l'occhio di Quezalcotl".

Casciana intuisce che spostare la leva del sole e della luna verso l'alto li fa "risplendere", spostare la leva del fiume verso l'alto lo fa "scorrere" e spostare la leva della montagna verso l'alto la fa "tremare". Deve quindi determinare la giusta posizione delle quattro leve per poter vedere "l'occhio di Quezalcotl" (uno smeraldo di circa 4Kg). Casciana non è mai stato bravo con la logica, ma ha studiato Ricerca Operativa ed ha sul suo cellulare un solutore di problemi di *PLI*. Si descriva il problema di *PLI* che Casciana deve risolvere per determinare la posizione giusta delle quattro leve.

SVOLGIMENTO

Introduciamo le variabili binarie x_s per il sole, x_l per la luna, x_f per il fiume ed x_m per la montagna, intendendo che tali variabili assumono valore 1 se la leva corrispondente deve essere spostata verso l'alto (ossia, rispettivamente, se il sole risplende, la luna risplende, il fiume scorre e la montagna trema).
La prima iscrizione può essere espressa mediante il vincolo

$$x_s + x_l \leq 1 \ .$$

La seconda iscrizione mediante il vincolo

$$x_f \leq x_s + x_l$$

in quanto x_f può assumere valore 1 solo se assume valore 1 almeno una tra x_s e x_l. La terza iscrizione può essere espressa mediante

$$x_s \leq 2 - x_f - x_m$$

in quanto se x_f ed x_m assumono entrambe valore 1, allora x_s deve assumere valore 0. Infine, la quarta iscrizione richiede che

$$x_f + x_m \geq 2$$

o, alternativamente

$$x_f = 1 \qquad\qquad x_m = 1 \ .$$

Inoltre, bisogna indicare esplicitamente i vincoli di integralità relativi alle variabili, ossia

$$x_s \in \{0,1\} \qquad x_l \in \{0,1\} \qquad x_f \in \{0,1\} \qquad x_m \in \{0,1\} \ .$$

I coefficienti della funzione obiettivo possono essere posti tutti a zero, in quanto ciò che interessa è una qualsiasi soluzione ammissibile, se esiste. In alternativa, è possibile eliminare l'ultimo vincolo ed ottimizzare rispetto a

$$\max x_f + x_m$$

In tal caso, esiste una configurazione delle leve che permette di vedere "l'occhio di Quezalcotl" se e solo se il valore ottimo della funzione obiettivo è 2.

6) Si risolva la seguente istanza del problema dello zaino binario

$$\begin{array}{lrrrrrcl} \max & 8x_1 & +9x_2 & +4x_3 & +2x_4 & +2x_5 & & \\ & 7x_1 & +9x_2 & +5x_3 & +4x_4 & +7x_5 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

mediante l'algoritmo Branch&Bound che usa il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo depth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello corrispondente a fissare la variabile frazionaria a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, oppure se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli (compresa la radice) dell'albero di enumerazione, ossia si fissino al più due variabili. Al termine si discuta se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore ed inferiore disponibili al momento in cui l'esplorazione è stata interrotta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Si noti che le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Da Q viene estratto il nodo radice. Risolvendo il rilassamento continuo si ottiene $x^* = [1, 5/9, 0, 0, 0]$, $\bar{z} = 13$, mentre l'euristica Greedy CUD determina $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 0]$, $\underline{z} = 12$. Poiché $\underline{z} = 12 > z = -\infty$, $z = 12$. Siccome $\bar{z} = 13 > z = 12$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$\boxed{x_2 = 0}$ Risolvendo il rilassamento continuo si ottiene $x^* = [1, 0, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 12$. La soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, e quindi il nodo viene chiuso per ottimalità; il nodo sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore perchè $\bar{z} = 12 \leq z = 12$.

$\boxed{x_2 = 1}$ Risolvendo il rilassamento continuo si ottiene $x^* = [3/7, 1, 0, 0, 0]$, $\bar{z} = 12 + 3/7$, mentre l'euristica Greedy CUD determina $\bar{x} = [0, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 9$ (e quindi z non viene aggiornata). Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_1.

$\boxed{x_2 = 1,\ x_1 = 0}$ Il rilassamento continuo fornisce $x^* = [0, 1, 3/5, 0, 0]$, $\bar{z} = 11 + 2/5$. Siccome $\bar{z} \leq z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_2 = x_1 = 1}$ Il rilassamento continuo del problema corrispondente non ha soluzioni ammissibili: la capacità residua dello zaino è -2. Il nodo viene pertanto chiuso per inammissibilità (in altri termini, $\bar{z} = -\infty \leq z = 12$).

Poiché $Q = \emptyset$, la visita dell'albero di enumerazione è conclusa, e l'algoritmo termina avendo risolto all'ottimo il problema. La soluzione ottima è $\bar{x} = [1, 0, 1, 0, 0]$.