

**RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)****Nome:****Cognome:****Matricola:**

1) Si risolva il seguente problema di *PL* applicando l'algoritmo del Simpleso Duale, per via algebrica, a partire dalla base  $B = \{1, 3\}$ . Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante  $k$ , il vettore  $\eta_B$ , il passo  $\bar{\theta}$  e l'indice uscente  $h$ , giustificando le risposte. Al termine si dimostri formalmente la correttezza della risposta fornita dall'algoritmo.

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & + & x_2 \\ & & & x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 \leq 4 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ & -x_1 & + & x_2 \leq -2 \\ & -x_1 & - & x_2 \leq -7 \end{array}$$

**SVOLGIMENTO**

it. 1)  $B = \{1, 3\}$ :  $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 1], \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = [1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{2, 4, 5\} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = [2 \quad 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \quad 2]$$

$$\bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B, \eta_i > 0\} = 1/2, \quad h = \min\{i \in B : \eta_i > 0, \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\} = 3$$

it. 2)  $B = \{1, 2\}$ :  $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1/2 \quad 1/2], \quad \bar{y} = [1/2 \quad 1/2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{4, 5\} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

$$\eta_B = [-1 \quad 1] \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [3/2 \quad -1/2], \quad \bar{\theta} = 1/3, \quad h = 1$$

it. 3)  $B = \{2, 4\}$ :  $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$ ,  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = [1 \quad 1] \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = [2/3 \quad 1/3], \quad \bar{y} = [0 \quad 2/3 \quad 0 \quad 1/3 \quad 0]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad k = 5$$

$$\eta_B = [-1 \quad -1] \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = [-2/3 \quad -1/3] : \text{STOP.}$$

Poiché  $\eta_B \leq 0$ , l'algoritmo termina dichiarando che il duale è inferiormente illimitato e di conseguenza il primale è vuoto. Per mostrare che questo è vero basta esibire la direzione  $d = [0, 2/3, 0, 1/3, 1]$ . È facile verificare algebricamente che  $db < 0$ , ovvero  $d$  è una direzione di decrescita. Inoltre  $dA = 0$  e  $y(\theta) = \bar{y} + \theta d \geq 0$  per ogni  $\theta \geq 0$ . Pertanto,  $y(\theta)$  è una soluzione ammissibile per ciascun  $\theta \geq 0$ , e quando  $\theta \rightarrow +\infty$  si ha  $y(\theta)b \rightarrow -\infty$ ; ciò dimostra la correttezza della risposta dell'algoritmo.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcll} \max & -x_1 & + & x_2 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \\ -3x_1 & & & & \leq & 0 \end{array}$$

Si verifichi se la soluzione  $\bar{x} = [1, 2]$  sia ottima per il problema. Inoltre, si specifichi se  $\bar{x}$  sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Infine, nel caso  $\bar{x}$  sia ottima, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

### SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \max\{ cx : Ax \leq b \} \qquad (D) \quad \min\{ yb : yA = c, y \geq 0 \}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

**Proposizione.** Sia  $\bar{x}$  una soluzione ammissibile per (P). Allora,  $\bar{x}$  è ottima se e solo se esiste una soluzione  $\bar{y}$  ammissibile per (D) complementare a  $\bar{x}$ , ovvero tale che  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  verifichino le condizioni degli scarti complementari

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0 .$$

Per l'ammissibilità delle soluzioni  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ , le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Per il problema in esame si ha:

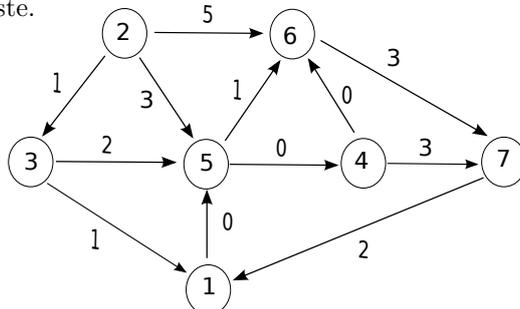
$$\begin{array}{rcll} \max & -x_1 & + & x_2 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 \\ (P) & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & 0 \\ -3x_1 & & & & \leq & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcll} \min & 10y_1 & + & y_2 \\ & 2y_1 & - & y_2 & - & 3y_4 & = & -1 \\ (D) & 4y_1 & + & y_2 & - & y_3 & = & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione  $\bar{x} = [1, 2]$  è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in  $\bar{x}$  è  $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \dots, m\} : A_i\bar{x} = b_i\} = \{1, 2\}$ . Di conseguenza, una soluzione duale  $\bar{y}$ , tale che  $\bar{y}A = c$ , che formi con  $\bar{x}$  una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni  $\bar{y}_3 = \bar{y}_4 = 0$ . Affinché  $\bar{y}$  sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 = -1 \\ 4y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

che ammette l'unica soluzione  $[0, 1]$ ;  $\bar{y} = [0, 1, 0, 0]$  ha componenti non negative, pertanto  $\bar{x}$  è soluzione ottima di (P) e  $\bar{y}$  è l'unica soluzione ottima di (D). Infine, poichè la sottomatrice dei vincoli attivi in  $\bar{x}$  è di rango massimo e di ordine 2, segue che  $\bar{x}$  è una soluzione di base (ammissibile) non degenera.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2 sul grafo in figura utilizzando l’algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato  $u$ , i vettori dei predecessori e delle etichette, e l’insieme dei nodi candidati  $Q$ . Al termine si disegni l’albero dei cammini minimi individuato. Nel caso in cui il costo dell’arco  $(5, 6)$  fosse un parametro reale  $\epsilon$  (anzichè valere 1, come in figura), per quali valori di tale parametro l’albero individuato al passo precedente continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2? E per quali valori di  $\epsilon$  l’albero ottimo determinato sarebbe unico? Giustificare le risposte.



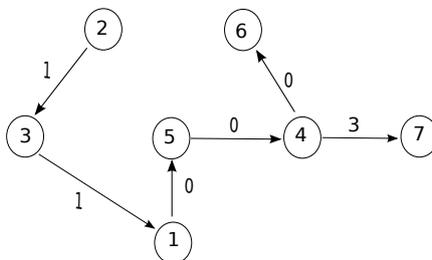
**SVOLGIMENTO**

Il grafo contiene il ciclo  $(1, 5, 6, 7)$  e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l’algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l’algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo  $O(n^2)$  nel caso in cui la coda di priorità  $Q$  sia implementata come una lista.

$$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$$

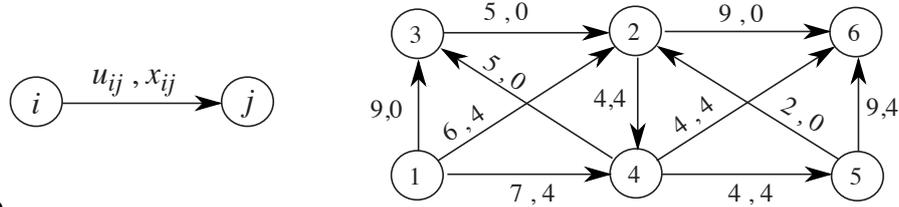
it.	$u$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$Q$
0		2	2	2	2	2	2	2	31	0	31	31	31	31	31	{2}
1	2	2	2	2	2	2	2	2	31	0	1	31	3	5	31	{5, 3, 6}
2	3	3	2	2	2	2	2	2	2	0	1	31	3	5	31	{1, 5, 6}
3	1	3	2	2	2	1	2	2	2	0	1	31	2	5	31	{5, 6}
4	5	3	2	2	5	1	5	2	2	0	1	2	2	3	31	{4, 6}
5	4	3	2	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	{6, 7}
6	6	3	2	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	{7}
7	7	3	2	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	$\emptyset$

L’albero trovato è mostrato in figura:



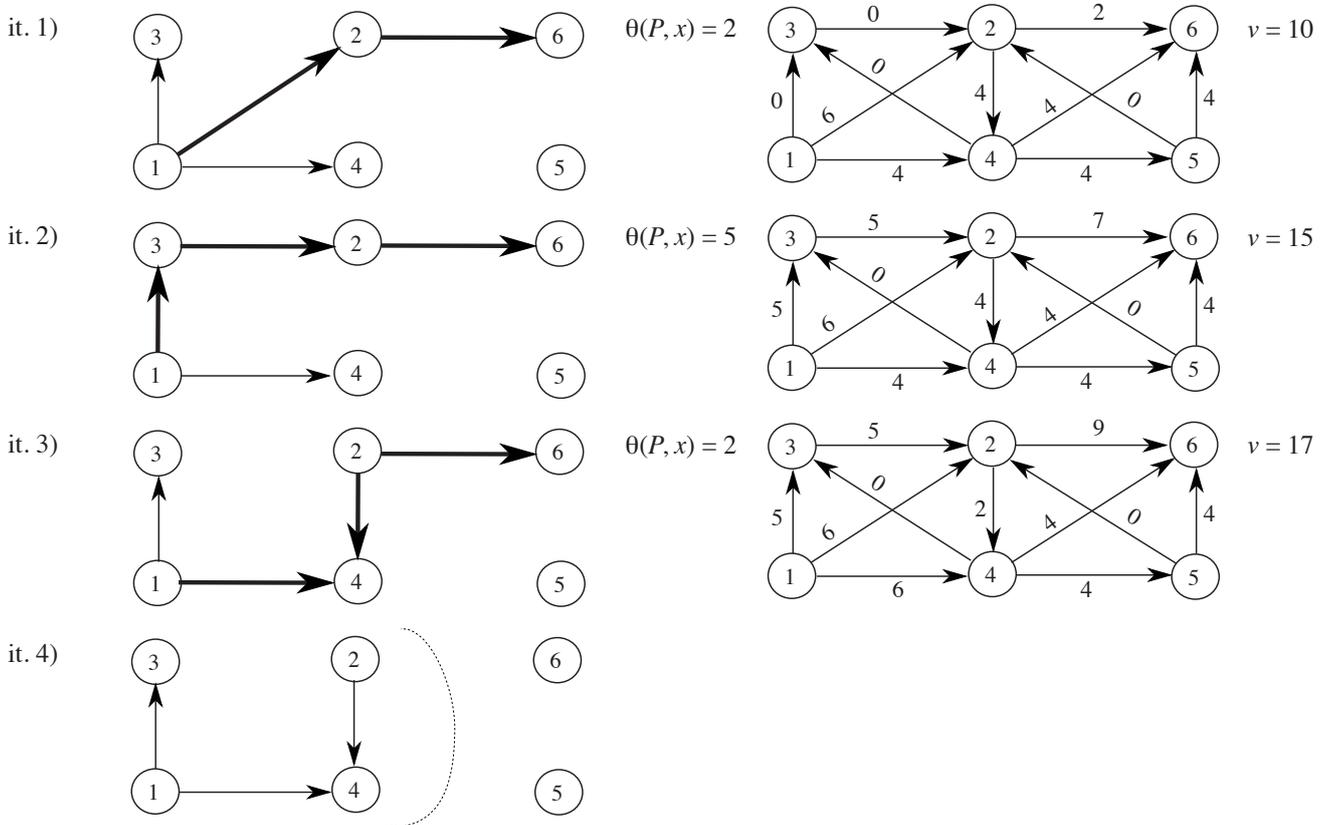
Se il costo dell’arco  $(5, 6)$  fosse pari a un parametro reale  $\epsilon$ , l’albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di  $\epsilon$  che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman, ovvero per tutti e soli i valori di  $\epsilon$  tali che  $d(5) + \epsilon \geq d(6)$ . Segue che l’albero determinato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 2 se e solo se  $\epsilon \geq 0$ . Poichè le condizioni di Bellman relative all’arco  $(6, 7)$  sono soddisfatte in forma di uguaglianza, e tale arco può sostituire  $(4, 7)$  mantenendo una struttura ad albero, segue che l’albero determinato non è l’unico albero dei cammini minimi di radice 2 a prescindere dal valore di  $\epsilon \geq 0$ .

4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l’algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore  $v = 8$ . Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l’ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l’albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio  $(N_s, N_t)$  restituito dall’algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine come cambierebbero le risposte se l’arco (4, 6) avesse capacità  $u_{46} = 5$ .



**SVOLGIMENTO**

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall’alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l’albero della visita ed il cammino aumentante  $P$  individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all’invio, lungo  $P$ , di una quantità di flusso pari alla capacità  $\theta(P, x)$ , con il relativo valore  $v$ . Al termine è riportato il taglio  $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$  determinato dall’algoritmo. I nodi in  $N_s$  sono quelli esplorati durante l’ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell’ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti  $u(N_s, N_t) = u_{26} + u_{46} + u_{45} = 9 + 4 + 4 = 17 = v$ .



Se l’arco (4, 6) avesse capacità  $u_{46} = 5$ , il flusso non sarebbe più ottimo. Infatti, poiché l’arco (4, 6) appartiene al taglio, la capacità del taglio aumenterebbe al valore  $u(N_s, N_t) = 18$ , e sarebbe possibile inviare un’ulteriore unità di flusso da 1 a 6 lungo il cammino  $\{(1, 4), (4, 6)\}$ , ottenendo un nuovo flusso di valore  $v = 18$  (e quindi massimo). Il taglio  $(N_s, N_t)$  precedentemente individuato rimarrebbe quindi un taglio di capacità minima, ma non sarebbe quello individuato dall’algoritmo, che invece troverebbe il taglio  $(\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$ , anch’esso di capacità 18.

5) Si consideri il seguente modello matematico:

$$\begin{aligned} \min \quad & \max\{2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 2x_3\} \\ & x_1, x_3 \in \{0, 1\} \\ & x_1 = 1 \implies x_2 \in \{4, 7, 8\} \\ & x_1 = 0 \implies x_2 = 0 \\ & x_1 = 1 \text{ and } x_3 = 1 \implies x_2 = 7 \end{aligned}$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (PLI). Giustificare le risposte.

### SVOLGIMENTO

Il modello matematico proposto non è un modello di PLI in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare (bensì è definita come il massimo di due funzioni lineari);
- la variabile  $x_2$  è una variabile a valori discreti;
- sono presenti implicazioni logiche che legano la variabile  $x_2$  ai valori assunti dalle variabili binarie  $x_1$  e  $x_3$ .

Il modello può comunque essere (ri)formulato come PLI nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \min z & & (1) \\ z & \geq 2x_1 - x_2 + x_3 & (2) \\ z & \geq -x_1 + x_2 + 2x_3 & (3) \\ x_2 & = 4y_1 + 7y_2 + 8y_3 & (4) \\ y_1 + y_2 + y_3 & = x_1 & (5) \\ y_2 & \geq x_1 + x_3 - 1 & (6) \\ y_1, y_2, y_3 & \in \{0, 1\} & (7) \\ x_1, x_3 & \in \{0, 1\} & (8) \end{aligned}$$

La variabile di soglia  $z$ , infatti, attraverso i vincoli (2) e (3) permette di stimare per eccesso il massimo tra i valori restituiti dalle due funzioni lineari. Minimizzando  $z$ , il solutore attribuisce pertanto a  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  quei valori (ammissibili) che minimizzano il massimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

Le variabili binarie ausiliarie  $y_1, y_2$  e  $y_3$  permettono di formulare la variabile a valori discreti  $x_2$  utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso. Si noti che, se  $x_1 = 1$ , una di tali variabili deve assumere il valore 1, e pertanto  $x_2 \in \{4, 7, 8\}$ , come richiesto. Se invece  $x_1 = 0$ , il vincolo (5) forza tutte le variabili ausiliarie a zero, e quindi  $x_2 = 0$ , come specificato. Infine, il vincolo (6) garantisce che, se  $x_1 = x_3 = 1$ , allora la variabile ausiliaria  $y_2$  sia forzata ad assumere il valore 1, e quindi  $x_2$  assuma il valore 7, come desiderato.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rcccccc} \max & 8x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +x_6 \\ & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo depth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

### SVOLGIMENTO

Indichiamo con  $x^*$  la soluzione ottenuta dal rilassamento e con  $\bar{x}$  quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con  $\bar{z}$  la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia  $\bar{z} = cx^*$ ), con  $\underline{z}$  la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia  $\underline{z} = c\bar{x}$ ) e con  $z$  la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

**Inizializzazione** La coda  $Q$  viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone  $z = -\infty$ .

**Nodo radice**  $x^* = [1, 1, 1, 1/3, 0, 0]$ ,  $\bar{z} = 19$ ,  $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$ ,  $\underline{z} = 18$ . Poiché  $\underline{z} > z = -\infty$ , si aggiorna  $z = 18$ . Siccome  $\bar{z} = 19 > 18 = \underline{z}$ , si esegue il branching sulla variabile frazionaria  $x_4$ .

**$x_4 = 0$**   $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2, 0]$ ,  $\bar{z} = 19$ .  $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$ ,  $\underline{z} = 18$ . Poiché  $\underline{z} = 18 = z$ ,  $z$  non cambia. Poiché  $\bar{z} = 19 > 18 = z$ , si esegue il branching sulla variabile frazionaria  $x_5$ .

**$x_4 = x_5 = 0$**   $x^* = [1, 1, 1, 0, 0, 1/2]$ ,  $\bar{z} = 18 + 1/2$ . Si noti che si può porre  $\bar{z} = 18$  in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché  $\bar{z} = 18 = z$ , il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

**$x_4 = 0, x_5 = 1$**   $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 1, 0]$ ,  $\bar{z} = 18 + 3/4$ . Analogamente a prima, si può porre  $\bar{z} = 18$ . Poiché  $\bar{z} = 18 = z$ , il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

**$x_4 = 1$**   $x^* = [1, 1, 1/2, 1, 0, 0]$ ,  $\bar{z} = 18 + 1/2$ . Analogamente a prima, si può porre  $\bar{z} = 18$ . Poiché  $\bar{z} = 18 = z$ , il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché  $Q$  è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima  $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$ , di costo 18.