RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{lrrrl}
\max & 3x_1 & +6x_2 & & \\
 & x_1 & +2x_2 & & \leq 5 \\
 & x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\
 & -x_1 & & & \leq 0 \\
 & & & -x_3 & \leq 0
\end{array}$$

Utilizzando il Teorema degli scarti complementari, si dimostri che la soluzione $\bar{x} = (1, 2, 1)$ è ottima per il problema, e si individui l'insieme delle soluzioni duali ottime. $\bar{x}$ è l'unica soluzione ottima primale? Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P)\quad \begin{array}{c} \max\ cx \\ Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{l} \min\ yb \\ yA = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Teorema. Date due soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$ ammissibili rispettivamente per (P) e (D), esse sono ottime se e solo se verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni $\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0, \quad i = 1, ..., m$.

Per il problema in esame si ha:

$$(P)\quad \begin{array}{lrrrl}
\max & 3x_1 & +6x_2 & & \\
 & x_1 & +2x_2 & & \leq 5 \\
 & x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq 7 \\
 & -x_1 & & & \leq 0 \\
 & & & -x_3 & \leq 0
\end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{lrrrrl}
\min & 5y_1 & +7y_2 & & & \\
 & y_1 & +y_2 & -y_3 & & = 3 \\
 & 2y_1 & +y_2 & & & = 6 \\
 & & 2y_2 & & -y_4 & = 0 \\
 & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 & \geq 0
\end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = (1, 2, 1)$ è ammissibile per (P); inoltre, l'insieme degli indici dei vincoli attivi è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : b_i - A_i\bar{x} = 0\} = \{1\}$. Di conseguenza una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $\bar{y}_2 = \bar{y}_3 = \bar{y}_4 = 0$; affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il sistema di equazioni

$$\begin{cases} y_1 = 3 \\ 2y_1 = 6 \\ y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette come unica soluzione $\bar{y}_1 = 3$. Pertanto, $\bar{y} = [3, 0, 0, 0]$ è l'unica soluzione che soddisfa le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$. Segue che $\bar{x}$ è ottima per (P). Inoltre, $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima duale. Il valore ottimo della funzione obiettivo è $c\bar{x} = 15$.

Sempre per il Teorema degli scarti complementari, una qualsiasi soluzione ottima primale deve soddisfare le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y}$. $\bar{y}_1 > 0$ implica che il primo vincolo di (P) deve essere attivo in una qualsiasi soluzione ottima primale. Qualsiasi soluzione x^* ammissibile per (P) tale che $x_1^* + 2x_2^* = 5$ è pertanto ottima. Esempi sono dati dalle soluzioni $(1, 2, 0)$ e $(2, 3/2, 0)$.

2) Si consideri il seguente problema di P.L.:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -x_1 & + & x_2 & & \\ & & & 2x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si indichi poi come cambierebbe la risposta finale qualora i lati destri del terzo e del quarto vincolo diventassero 1 e -2, rispettivamente, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = 4,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i / \eta_i : i \in B, \ \eta_i > 0\} = 1/2,$$

$$h = \min\{i \in B : \eta_i > 0, \ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\} = 1.$$

it. 2) $B = \{2, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 3/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \not\leq \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 3,$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 3, \quad h = 2.$$

it. 3) $B = \{3, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Poiché $A_N \bar{x} \leq b_N$, la base $B = \{3, 4\}$ è ottima. La soluzione $\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$ è primale ottima, mentre la soulzione $\bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ è duale ottima.

Se i lati destri del terzo e del quarto vincolo diventassero 1 e -2, rispettivamente, la soluzione di base duale non cambierebbe, e la base $B = \{3, 4\}$ resterebbe quindi duale ammissibile. La soluzione di base primale invece cambierebbe, diventando

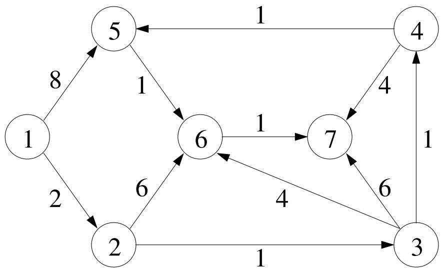
$$\bar{x} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Tale soluzione è primale ammissibile in quanto

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, la base $B = \{3, 4\}$ restebbe ottima per il problema modificato, ma la soluzione primale di base cambierebbe.

3) Si determini un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$ per il grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più efficiente dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si forniscano il nodo i selezionato, l'insieme Q (se utilizzato), i vettori delle etichette e dei predecessori. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Infine, si discuta ottimalità e unicità della soluzione ottenuta nel caso in cui nel grafo fosse presente anche l'arco $(7, 5)$, considerando sia lo scenario in cui $c_{75} = -2$ che lo scenario in cui $c_{75} = -3$. Giustificare le risposte.



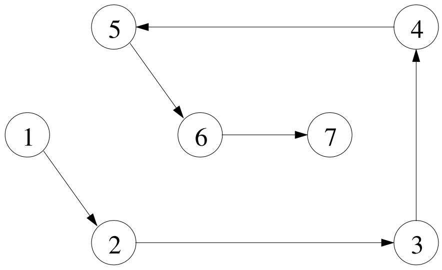
SVOLGIMENTO

Senza bisogno di rinumerazione dei nodi, per ogni arco (i, j) del grafo in figura risulta $i < j$; pertanto il grafo è aciclico. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$.

Sia $M = (n - 1)c_{max} + 1 = 6 \times 8 + 1 = 49$.

Iter.	i	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[7]$
0		0	49	49	49	49	49	49	nil	1	1	1	1	1	1
1	1	0	2	49	49	8	49	49	nil	1	1	1	1	1	1
2	2	0	2	3	49	8	8	49	nil	1	2	1	1	2	1
3	3	0	2	3	4	8	7	9	nil	1	2	3	1	3	3
4	4	0	2	3	4	5	7	8	nil	1	2	3	4	3	4
5	5	0	2	3	4	5	6	8	nil	1	2	3	4	5	4
6	6	0	2	3	4	5	6	7	nil	1	2	3	4	5	6

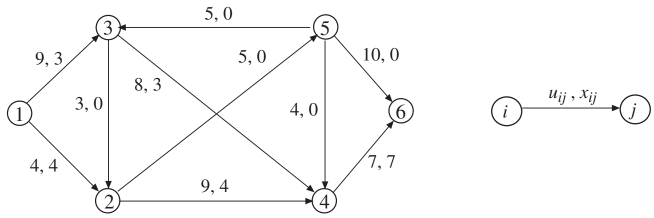
L'albero dei cammini minimi individuato è:



Se nel grafo fosse presente anche l'arco $(7, 5)$, di costo $c_{75} = -2$, l'albero determinato continuerebbe a restare ottimo, in quanto l'arco $(7, 5)$ soddisfa le condizioni di Bellman rispetto al vettore di etichette associato all'albero: infatti $d(7) - 2 = d(5)$. Nonostante tali condizioni valgano in forma di uguaglianza (si noti che per gli archi originali, non appartenenti all'albero, valgono invece in forma di disuguaglianza), l'albero in figura resterebbe l'unica soluzione ottima, in quanto l'inserimento di $(7, 5)$ al posto di $(4, 5)$ determinerebbe una struttura non connessa, che pertanto non è un albero.

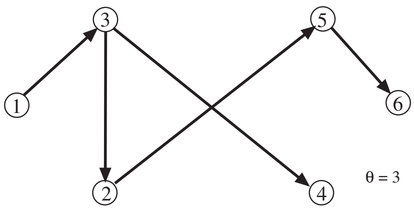
Infine, nel caso in cui fosse presente l'arco $(7, 5)$ di costo $c_{75} = -3$, si determinerebbe un ciclo orientato di costo negativo. In tale scenario il problema di cammino minimo risulterebbe pertanto inferiormente illimitato.

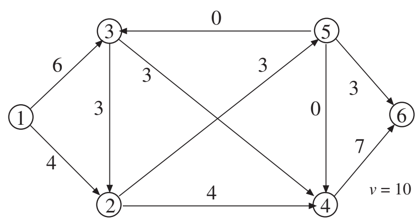
4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore $v = 7$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si riporti il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si indichi infine quale sarebbe il valore del flusso massimo se il nodo destinazione fosse il nodo 5 anzichè il nodo 6, giustificando la risposta.

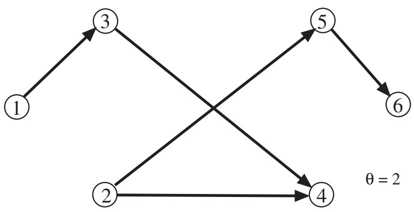


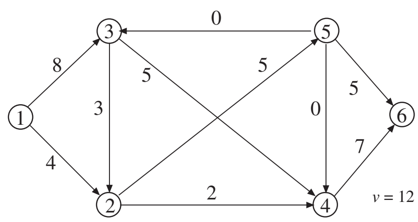
SVOLGIMENTO

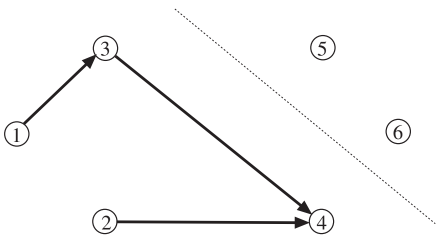
Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (uno cammino dal nodo 1 al nodo 6); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{25} + u_{46} = 5 + 7 = 12 = v$.









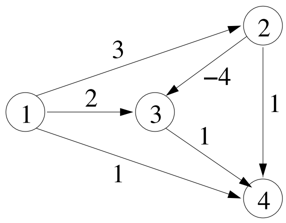


Nel caso in cui il nodo destinazione fosse il nodo 5 anzichè il nodo 6, il valore del flusso massimo sarebbe pari a 5. Per dimostrare tale affermazione, si osservi che il flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6, sopra rappresentato, può essere convertito in un flusso ammissibile da 1 a 5, di valore 5, eliminando 7 unità di flusso lungo cammini da 1 a 6 che non includano il nodo 5. Precisamente, ponendo $x_{13} = x_{32} = 1$, $x_{34} = x_{24} = x_{46} = x_{56} = 0$. Considerando il taglio $(N'_s, N'_t) = (\{1, 2, 3, 4, 6\}, \{5\})$, è facile verificare che tale taglio è saturo, e che $u(N'_s, N'_t) = u_{25} = 5$, dimostrando pertanto che il valore del flusso massimo, in tale scenario, è pari a 5.

5) Si fornisca un'istanza del problema SPT per la quale, applicando l'algoritmo di Dijkstra a partire da un nodo radice r, almeno un nodo venga inserito in Q più di una volta.

SVOLGIMENTO

Affinché *SPT.S*, e quindi anche l'algoritmo di Dijkstra, che ne rappresenta una particolare implementazione, inserisca un nodo in Q più di una volta, è necessario che il grafo includa archi di costo negativo. Si consideri il seguente grafo, in cui l'arco (2,3) ha costo negativo:



L'esecuzione dell'algoritmo di Dijkstra (e, più in generale, di *SPT.S*) sul grafo in figura, a partire dal nodo radice $r = 1$, comporta le seguenti iterazioni:

$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10.$

It.	i	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	Q
0		0	10	10	10	1	1	1	1	{1}
1	1	0	3	2	1	1	1	1	1	{2,3,4}
2	4	0	3	2	1	1	1	1	1	{2,3}
3	3	0	3	-1	1	1	1	2	1	{3}
4	2	0	3	-1	0	1	1	2	3	{4}
5	3	0	3	-1	0	1	1	2	3	$\emptyset$

Osserviamo che i nodi 3 e 4 sono inseriti in Q due volte ciascuno.

6) Lo studente Mario Telecronica deve partire per un soggiorno Erasmus. Individua sei oggetti, a lui cari, che vorrebbe portare con sé: a ciascuno assegna un valore affettivo, riportato nella seguente tabella

oggetto	1	2	3	4	5	6
valore affettivo	9	6	3	5	3	1
peso	4	3	2	4	3	2

Il peso degli oggetti è pure riportato in tabella. Sapendo che il trolley destinato a trasportare questi oggetti ha capacità 15, si formuli in termini di PLI il problema di scegliere quali oggetti portare, rispettando la capacità del trolley e massimizzando il valore affettivo totale degli oggetti prescelti.

Si risolva quindi il problema di Mario Telecronica mediante l'algoritmo Branch&Bound. Si utilizzi un rilassamento, un'euristica ed una regola di branching adeguate al problema formulato. Inoltre, si visiti l'albero di enumerazione in modo breadth-first. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching e come, o se il nodo viene chiuso e perchè.

SVOLGIMENTO

Il problema in questione è formulabile mediante la seguente istanza del problema dello zaino binario:

$$\begin{array}{lcccccccc} \max & 9x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +5x_4 & +3x_5 & +x_6 & & \\ & 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +3x_5 & +2x_6 & \leq & 15 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

Il problema può essere pertanto risolto mediante un algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, ed esegue il branching sulla variabile frazionaria visitando, come richiesto, l'albero di enumerazione in modo breadth-first. Nel seguito, tra i figli di uno stesso nodo verrà visitato per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1.

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 1, 2/3, 0]$, $\bar{z} = 25$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 1, 0, 1]$, $\underline{z} = 24$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 24$. Siccome $\bar{z} > \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_5.

$\boxed{x_5 = 1}$ $x^* = [1, 1, 1, 3/4, 1, 0]$, $\bar{z} = 24 + 3/4$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 1, 1]$, $\underline{z} = 22$. Poiché $\underline{z} = 22 < z = 24$, z non cambia. Si osservi inoltre che, essendo tutti i parametri interi, la valutazione superiore $\bar{z}$ può essere arrotondata per difetto al valore 24. Pertanto, poiché $\bar{z} = 24 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_5 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 1, 0, 1]$, $\bar{z} = \underline{z} = 24$. Il nodo viene pertanto chiuso per ottimalità (avrebbe potuto anche essere chiuso dalla valutazione superiore).

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 1, 0, 1]$, di valore 24. Lo studente può quindi portare con sé tutti gli oggetti cari tranne il quinto, con utilità massima pari a 24.

Si osservi che, nel caso in cui, nel corso dell'analisi del nodo $\boxed{x_5 = 1}$, la valutazione superiore $\bar{z}$ non venisse arrotondata per difetto al valore 24, l'algoritmo Branch&Bound genererebbe un ulteriore livello dell'albero di enumerazione prima di dimostrare l'ottimalità della soluzione $[1, 1, 1, 1, 0, 1]$.