

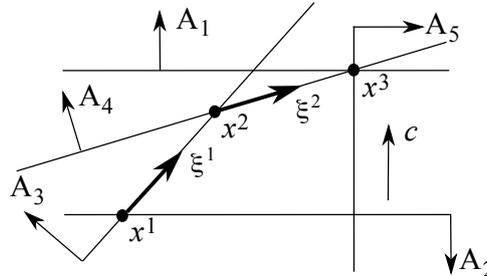
# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2015/16)

Nome:

Cognome:

Matricola:

1) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simpleso Primale, il problema di  $PL$  in figura a partire dalla base  $B = \{2, 3\}$ ; si noti che  $c$  è collineare ad  $A_1$  e ad  $A_2$  e perpendicolare ad  $A_5$ . Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base  $x$  e la direzione di spostamento  $\xi$  (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo. Al termine, se l'algoritmo ha determinato una soluzione ottima si discuta l'unicità delle soluzioni ottime primale e duale del problema.

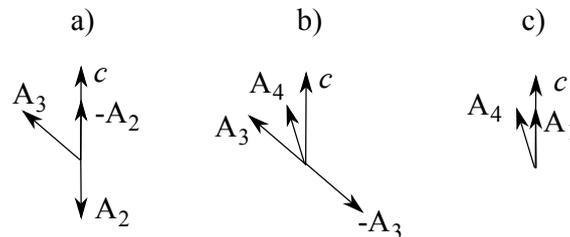


## SVOLGIMENTO

it. 1)  $B = \{2, 3\}$ ,  $y_2 < 0$  e  $y_3 = 0$  poiché  $c$  appartiene al cono generato dal solo  $-A_2$ , come mostrato in a); quindi,  $h = 2$ . La base è primale non degenera, in quanto  $I(x^1) = \{2, 3\} = B$ , ma duale degenera perché una delle variabili duali in base ha valore zero ( $c$  non è interno al cono generato da  $-A_2$  ed  $A_3$ , in quanto coincide con uno dei due generatori). Il massimo passo lungo la direzione  $\xi^1$  si ottiene in corrispondenza del solo vincolo 4, quindi  $k = 4$ .

it. 2)  $B = \{3, 4\}$ ,  $y_3 < 0$  e  $y_4 > 0$  poiché  $c$  appartiene (è interno) al cono generato da  $-A_3$  ed  $A_4$ , come mostrato in b); quindi,  $h = 3$ . La base è quindi duale non degenera, ed è primale non degenera in quanto  $I(x^2) = \{3, 4\} = B$ . Il massimo passo lungo la direzione  $\xi^2$  si ottiene in corrispondenza dei vincoli 1 e 5: quindi  $k = 1$  per la regola anticiclo di Bland.

it. 3)  $B = \{1, 4\}$ ,  $y_1 > 0$  e  $y_4 = 0$  poiché  $c$  appartiene al cono generato da  $A_1$  ed  $A_4$ , come mostrato in c); più precisamente,  $c$  è collineare ad  $A_1$ . La base è quindi duale ammissibile e degenera. È anche primale degenera in quanto  $I(x^3) = \{1, 4, 5\} \supset B$ . Poiché  $B$  è duale ammissibile, l'algoritmo termina avendo determinato una coppia di soluzioni ottime.



La soluzione ottima primale è unica. Infatti, poiché  $c$  è collineare ad  $A_1$ , tutte le soluzioni appartenenti alla frontiera del primo vincolo hanno lo stesso massimo valore della funzione obiettivo, ma l'unica ammissibile è  $x^3$ . La soluzione ottima duale, invece, non è unica. Infatti, le condizioni degli scarti complementari assicurano che nelle soluzioni ottime duali possono essere diverse da zero solo le variabili  $y_1$ ,  $y_4$  e  $y_5$ . Essendo  $c$  collineare ad  $A_1$ , ma interno al cono generato da  $A_4$  ed  $A_5$ , esiste una soluzione duale ammissibile, che rispetta le condizioni degli scarti complementari con  $x^3$ , con  $y_4 > 0$ ,  $y_5 > 0$  e con tutte le altre variabili (in particolare, quindi,  $y_1$ ) uguali a zero. Tale soluzione duale è quindi anch'essa ottima, e diversa da quella individuata dall'algoritmo.

2) Si risolva il seguente problema di *PL* applicando l'algoritmo del Simpleso Duale, per via algebrica, a partire dalla base  $B = \{1, 3\}$ . Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante  $k$ , il vettore  $\eta_B$ , il passo  $\bar{\theta}$  e l'indice uscente  $h$ , giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si individui l'insieme delle soluzioni ottime del problema dato.

$$\begin{array}{rcll} \max & 2x_1 & + & 2x_2 \\ & & & x_2 \leq 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 \leq 4 \\ & x_1 & & \leq 2 \\ -x_1 & + & x_2 & \leq -2 \\ -x_1 & - & x_2 & \leq -2 \end{array}$$

### SVOLGIMENTO

$$\text{it. 1) } B = \{1, 3\}: A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{x} = A_B^{-1}b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = [2 \ 2] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [2 \ 2], \bar{y}_N = 0, \bar{y} = [2 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$k = \min\{i \in N : A_i \bar{x} > b_i\} = \min\{2, 4\} = 2 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = [2 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \ 2]$$

$$\bar{\theta} = \min\{\bar{y}_i/\eta_i : i \in B, \eta_i > 0\} = 1, \quad h = \min\{i \in B : \eta_i > 0, \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\} = 3$$

$$\text{it. 2) } B = \{1, 2\}: A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = [2 \ 2] \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [1 \ 1], \bar{y} = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 4$$

$$\eta_B = [-1 \ 1] \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [3/2 \ -1/2], \quad \bar{\theta} = 2/3, \quad h = 1$$

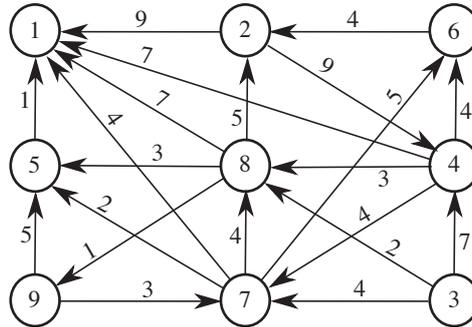
$$\text{it. 3) } B = \{2, 4\}: A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}_B = [2 \ 2] \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = [4/3 \ 2/3], \bar{y} = [0 \ 4/3 \ 0 \ 2/3 \ 0]$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{STOP.}$$

Poiché la soluzione di base primale è ammissibile, l'algoritmo termina individuando la soluzione ottima primale  $\bar{x} = [2, 0]$  e la soluzione ottima duale  $\bar{y} = [0, 4/3, 0, 2/3, 0]$ . Poiché  $\bar{y}$  è non degenera,  $\bar{x}$  è l'unica soluzione ottima primale. Si noti che  $\bar{x}$  è invece degenera, in quanto anche il terzo ed il quinto vincolo sono attivi.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato  $u$ , i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati  $Q$ . Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si consideri poi il caso in cui il costo dell'arco  $(9, 7)$  sia un parametro reale  $\epsilon$ , e si discuta per quali valori del parametro l'albero individuato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3, giustificando la risposta.



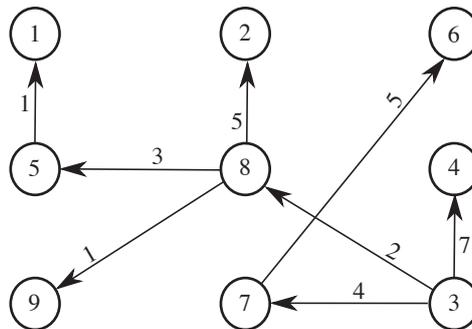
**SVOLGIMENTO**

Il grafo contiene cicli (ad esempio,  $(2, 4, 6)$ ) e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo  $O(n^2)$  nel caso in cui la coda di priorità  $Q$  sia implementata come una lista non ordinata.

$$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 8 \times 9 + 1 = 73.$$

it.	$u$	$p[\cdot]$									$d[\cdot]$									$Q$
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0		3	3	3	3	3	3	3	3	3	73	73	0	73	73	73	73	73	73	{3}
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	73	73	0	7	73	73	4	2	73	{4, 7, 8}
2	8	8	8	3	3	8	3	3	3	8	9	7	0	7	5	73	4	2	3	{1, 2, 4, 5, 7, 9}
3	9	8	8	3	3	8	3	3	3	8	9	7	0	7	5	73	4	2	3	{1, 2, 4, 5, 7}
4	7	7	8	3	3	8	7	3	3	8	8	7	0	7	5	9	4	2	3	{1, 2, 4, 5, 6}
5	5	5	8	3	3	8	7	3	3	8	6	7	0	7	5	9	4	2	3	{1, 2, 4, 6}
6	1	5	8	3	3	8	7	3	3	8	6	7	0	7	5	9	4	2	3	{2, 4, 6}
7	4	5	8	3	3	8	7	3	3	8	6	7	0	7	5	9	4	2	3	{2, 6}
8	2	5	8	3	3	8	7	3	3	8	6	7	0	7	5	9	4	2	3	{6}
9	6	5	8	3	3	8	7	3	3	8	6	7	0	7	5	9	4	2	3	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:

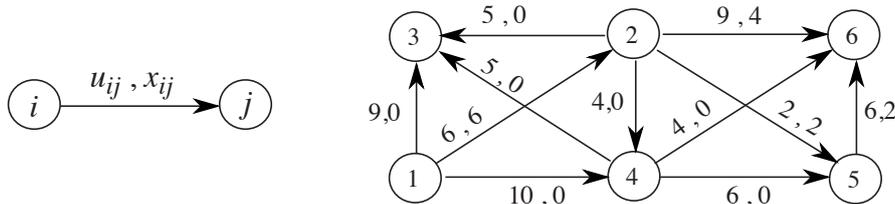


Se il costo dell'arco  $(9, 7)$  fosse pari a un parametro reale  $\epsilon$ , l'albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3 per tutti e soli i valori di  $\epsilon$  che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman. Ovvero:

$$d[9] + c_{9,7} \geq d[7] \iff \epsilon \geq 1 .$$

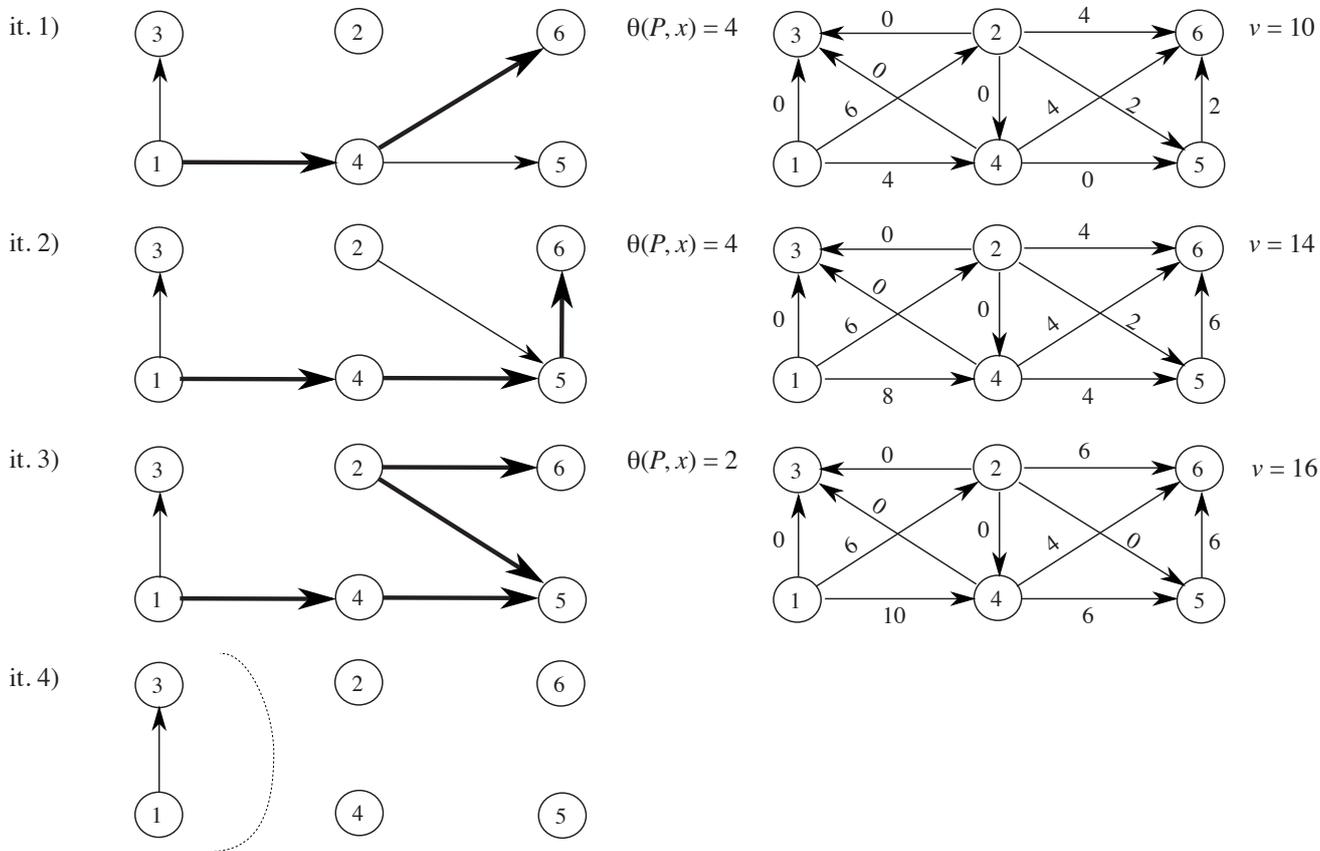
Infatti, per  $\epsilon < 1$  l'arco  $(9, 7)$  violerebbe le condizioni di Bellman, ed il predecessore di 7 diventerebbe 9. Naturalmente limitatamente ai valori di  $\epsilon$  per cui esiste un albero dei cammini minimi: poiché l'arco  $(9, 7)$  fa parte di cicli, ad esempio  $(7, 8, 9)$ , valori sufficientemente negativi di  $\epsilon$  creerebbero cicli di costo negativo, rendendo il problema dell'albero dei cammini minimi inferiormente illimitato. Ciò è comunque ininfluenza ai fini della risposta al quesito.

4) Si individui un flusso massimale dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l’algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato di valore  $v = 6$ . Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l’ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l’albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio  $(N_s, N_t)$  restituito dall’algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine l’unicità del taglio di capacità minima determinato.



**SVOLGIMENTO**

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall’alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l’albero della visita ed il cammino aumentante  $P$  individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all’invio, lungo  $P$ , di una quantità di flusso pari alla capacità  $\theta(P, x)$ , con il relativo valore  $v$ . Al termine è riportato il taglio  $(N_s, N_t) = (\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$  determinato dall’algoritmo. I nodi in  $N_s$  sono quelli esplorati durante l’ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell’ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti  $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{14} = 6 + 10 = 16 = v$ .



Il taglio determinato non è l’unico di capacità minima. Infatti, anche il taglio  $(N'_s, N'_t) = (\{1, 3, 4\}, \{2, 5, 6\})$  ha capacità  $u(N'_s, N'_t) = u_{12} + u_{45} + u_{46} = 6 + 6 + 4 = 16 = v$ .

5) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rcll} \max & x_1 & - & x_2 \\ & x_1 & + & x_2 \leq 2 \\ & -x_1 & + & x_2 \leq 5 \\ & -x_1 & + & 3x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 & + & x_2 \leq -1 \\ & -x_1 & & \leq 2 \end{array}$$

Utilizzando il Lemma di Farkas, si verifichi se la soluzione  $\bar{x} = (-2, 3)$  è ottima per tale problema. In caso negativo, si determini una direzione ammissibile di crescita per  $\bar{x}$  e si rappresenti graficamente il cono di tutte queste direzioni. Successivamente, si scelga un vettore  $c$  dei coefficienti della funzione obiettivo tale che  $\bar{x}$  sia una soluzione ottima del problema dato e che il problema duale ammetta un'unica soluzione ottima. Giustificare le risposte.

### SVOLGIMENTO

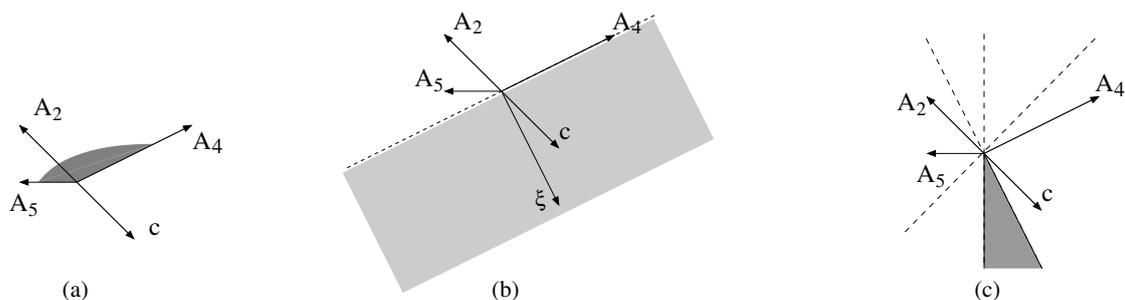
È immediato verificare che  $\bar{x} = (-2, 3)$  è una soluzione ammissibile. Poiché l'insieme degli indici dei vincoli attivi è  $I(\bar{x}) = \{2, 4, 5\}$ , i sistemi ridotti

$$(PR) \begin{cases} A_{I(\bar{x})}\xi \leq 0 \\ c\xi > 0 \end{cases} \quad (DR) \begin{cases} y_{I(\bar{x})}A_{I(\bar{x})} = c \\ y_{I(\bar{x})} \geq 0 \end{cases}$$

diventano:

$$(PR) \begin{cases} -\xi_1 + \xi_2 \leq 0 \\ 2\xi_1 + \xi_2 \leq 0 \\ -\xi_1 \leq 0 \\ \xi_1 - \xi_2 > 0 \end{cases} \quad (DR) \begin{cases} -y_2 + 2y_4 - y_5 = 1 \\ y_2 + y_4 = -1 \\ y_2, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Il sistema  $(DR)$  non ammette soluzione: la seconda equazione non è compatibile con i vincoli di non negatività. Ad ulteriore riprova, la figura (a) permette di verificare anche geometricamente l'impossibilità del sistema, ovvero  $c \notin \text{cono}(\{A_2, A_4, A_5\})$ . Di conseguenza, il Lemma di Farkas garantisce che il sistema  $(PR)$  ammette soluzione e pertanto esistono direzioni ammissibili di crescita per  $\bar{x}$ , che quindi non è una soluzione ottima del problema dato. La direzione  $\xi = (1, -2)$  separa  $c$  da  $A_2, A_4$  e  $A_5$ : infatti la retta, ad essa ortogonale, divide il piano in due semipiani in uno dei quali giace il vettore  $c$  e nell'altro i vettori  $A_i$ ,  $i = 2, 3, 5$ , come illustrato in figura (b). Pertanto,  $\xi$  risolve  $(PR)$  ed è quindi una direzione ammissibile di crescita per  $\bar{x}$ . In figura (c) è evidenziato il cono che rappresenta tutte le soluzioni di  $(PR)$ , ovvero tutte le direzioni ammissibili di crescita per  $\bar{x}$ , che è individuato dall'intersezione dei semipiani chiusi  $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : A_i\xi \leq 0\}$ ,  $i = 2, 3, 5$ , e del semipiano aperto  $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : c\xi > 0\}$ .



Affinché  $\bar{x}$  sia una soluzione ottima del problema dato è necessario e sufficiente che risulti  $c \in \text{cono}(\{A_2, A_4, A_5\})$ . In tal caso, il problema duale ammetta un'unica soluzione ottima se e solo se è possibile esprimere  $c$  come combinazione lineare a coefficienti non negativi di  $A_2, A_4$  e  $A_5$  in maniera unica, ovvero se e solo se il sistema  $(DR)$  ammette un'unica soluzione. Ciò accade quando  $c$  è un multiplo di uno tra i vettori  $A_2, A_4$  e  $A_5$ . Quindi, se si sceglie  $c = A_2$ ,  $\bar{x} = (-2, 3)$  è una soluzione ottima del problema dato e  $\bar{y} = (0, 1, 0, 0, 0)$  è l'unica soluzione ottima del suo problema duale.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rcccccc} \max & 5x_1 & +9x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +1x_5 & +2x_6 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perchè.

### SVOLGIMENTO

Indichiamo con  $x^*$  la soluzione ottenuta dal rilassamento e con  $\bar{x}$  quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con  $\bar{z}$  la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia  $\bar{z} = cx^*$ ), con  $\underline{z}$  la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia  $\underline{z} = c\bar{x}$ ) e con  $z$  la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili non sono ordinate per Costo Unitario Decrescente. L'ordinamento degli indici da considerare è: 2, 1, 3, 4, 6, 5.

**Inizializzazione** La coda  $Q$  viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone  $z = -\infty$ .

**Nodo radice**  $x^* = [1, 1, 1, 1/3, 0, 0]$ ,  $\bar{z} = 20$ ,  $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$ ,  $\underline{z} = 19$ . Poiché  $\underline{z} > z = -\infty$ , si aggiorna  $z = 19$ . Siccome  $\bar{z} = 20 > 19 = \underline{z}$ , si esegue il branching sulla variabile frazionaria  $x_4$ .

**$x_4 = 0$**   $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2, 0]$ ,  $\bar{z} = 20$ .  $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$ ,  $\underline{z} = 19$ . Poiché  $\underline{z} = 19 = z$ ,  $z$  non cambia. Poiché  $\bar{z} = 20 > 19 = z$ , si esegue il branching sulla variabile frazionaria  $x_6$ .

**$x_4 = 1$**   $x^* = [1, 1, 1/2, 1, 0, 0]$ ,  $\bar{z} = 19 + 1/2$ . Si noti che si può porre  $\bar{z} = 19$  in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché  $\bar{z} = 19 = z$ , il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

**$x_4 = x_6 = 0$**   $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2, 0]$ ,  $\bar{z} = 19 + 1/2$ . Analogamente a prima si può porre  $\bar{z} = 19$  in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché  $\bar{z} = 19 = z$ , il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

**$x_4 = 0, x_6 = 1$**   $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 0, 1]$ ,  $\bar{z} = 19 + 3/4$ . Analogamente a prima, si può porre  $\bar{z} = 19$ . Poiché  $\bar{z} = 19 = z$ , il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché  $Q$  è vuota, l'algoritmo Branch&Bound termina, restituendo la soluzione ottima  $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$ , di costo 19.