# RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

## Nome: Cognome: Matricola:

**1)** Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & 2x_1 & - & 4x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. Al termine si discuta quali informazioni si possono ricavare riguardo il problema duale del *PL* dato. Si consideri, inoltre, l'ultima direzione $\xi$ individuata dall'algoritmo: se il vettore dei costi $c$ fosse $[2, 0]$ invece che $[2, -4]$, $\xi$ sarebbe ancora di crescita? Giustificare tutte le risposte.

**SVOLGIMENTO**

it.1) $B = \{2,3\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , $x = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix} \;,\; y_N = 0 \;,\; y = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = \min\{2, 3\} = 2$ , $B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;,\; A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \;,\; J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1, 4\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i x)/A_i \xi \;,\; \lambda_1 = 4 \;,\; \lambda_4 = 0 \;,\; \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = 0$$

$$k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 4 \quad \text{[cambio di base degenere]}$$

it.2) $B = \{3,4\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \end{bmatrix} \;,\; y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = 3$ , $B(h) = 1$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \;,\; A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{1\} \;,\; \bar{\lambda} = \lambda_1 = 4 \;,\; k = 1$$

it.3) $B = \{1,4\}$ , $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ , $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ , $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix} \;,\; y = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

[base primale non degenere e duale non degenere] $h = 4$ , $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \;,\; A_N \xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \;,\; J = \emptyset$$

STOP. $\xi$ è una direzione di crescita illimitata, pertanto il problema primale è superiormente illimitato e di conseguenza la regione ammissibile del problema duale è vuota. Se il vettore dei costi $c$ fosse $[2, 0]$ invece che $[2, -4]$ si avrebbe $c\xi = -2$, e pertanto la direzione $\xi$ sarebbe di decrescita.

**2)** Si consideri il problema di *PL* riportato a lato, parametrico in $\varepsilon$: $i$) si individui l'insieme di tutti i valori di $\varepsilon$ per cui la base $B = \{3, 4\}$ è ottima; $ii$) si risolva il problema dato, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$, per $\varepsilon < -2$, utilizzando l'algoritmo del Simplesso appropriato. Giustificare algebricamente le risposte date.

$$
\begin{array}{rrcrcl}
\max & 2x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & \varepsilon
\end{array}
$$

**SVOLGIMENTO**

$i$) Considerando la base $B = \{3, 4\}$, si ha

$$
A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{x}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

La soluzione di base duale è ammissibile a prescindere dal valore di $\varepsilon$. La soluzione di base primale è invece ammissibile per tutti i valori di $\varepsilon$ per cui $\bar{x}(\varepsilon)$ soddisfa i due vincoli fuori base, ossia

$$
\varepsilon - 2 \leq 0 \quad , \quad -\varepsilon - 2 \leq 0 \quad \equiv \quad \varepsilon \in [-2, 2] \ .
$$

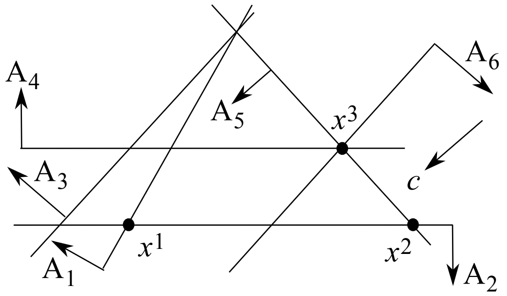
Segue che $B = \{3, 4\}$ è una base ottima per $\varepsilon \in [-2, 2]$.

$ii$) Per $\varepsilon < -2$, il problema di *PL* risulta vuoto. Per dimostrarlo osserviamo che, per $\varepsilon < -2$, la base $B = \{3, 4\}$ è duale ammissibile ma non più primale ammissibile, come risulta dall'analisi in $i$): la soluzione di base $\bar{x}(\varepsilon) = [\varepsilon, 2]$ viola infatti il vincolo 2. Essendo $B = \{3, 4\}$ duale ammissibile, è possibile risolvere il problema dato mediante l'algoritmo del Simplesso Duale, a partire da $B = \{3, 4\}$, calcolando:

$$
\eta_B = A_2 A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} .
$$

Poiché $\eta_B \leq 0$, il problema duale è inferiormente illimitato, e quindi il problema di *PL* dato risulta vuoto. In particolare, la direzione $d = [0, 1, 1, 1]$ ha la caratteristica che $dA = 0$, $db = 2 + \varepsilon < 0$, e $d \geq 0$, come è facile verificare: pertanto è una direzione ammissibile di decrescita illimitata per il problema duale, il che dimostra che il problema primale è vuoto.

**3)** Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Duale, il problema di $PL$ in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$; si noti che $c$ è collineare ad $A_5$ e perpendicolare ad $A_3$ e $A_6$, che sono collineari; anche $A_2$ e $A_4$ sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante $k$, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e $\eta_B$ e l'indice uscente $h$, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Al termine, in caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni primali e duali ottime, giustificando la risposta fornita.

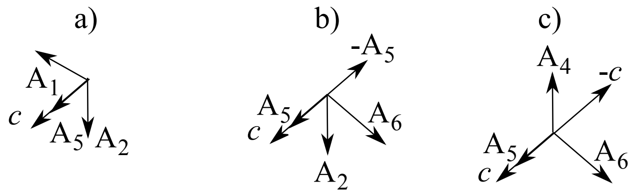



**SVOLGIMENTO**

it. 1): $B = \{\ 1\ ,\ 2\ \}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^1$ viola il solo vincolo 5, quindi $k = 5$. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 > 0$ in quanto $c$ è interno al cono generato da $A_1$ e $A_2$, quindi la base è duale non degenere; è anche primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^1)$. Poiché $A_5 \in \text{cono}(A_1, A_)$, come mostrato in figura $(a)$, risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$. Essendo $A_5$ collineare a $c$, risulta $\bar{y}_1/\eta_1 = \bar{y}_2/\eta_2$, e quindi $h = \min\{\ 1\ ,\ 2\ \} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 2): $B = \{\ 2\ ,\ 5\ \}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^2$ viola il solo vincolo 6, pertanto $k = 6$. $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto $c$ è collineare ad $A_5$. Quindi la base è duale degenere, e rimane primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^2)$. Poiché $A_6 \in \text{cono}(A_2, -A_5)$, come mostrato in figura $(b)$, risultano $\eta_2 > 0$ e $\eta_5 < 0$, pertanto $h = 2$.

it. 3): $B = \{\ 5\ ,\ 6\ \}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^3$ non viola alcun vincolo: l'algoritmo quindi termina avendo determinato una soluzione ottima sia per il primale che per il duale. Poiché $c$ è collineare ad $A_5$ si ha $\bar{y}_5 > 0$ e $\bar{y}_6 = 0$, ossia la base è ancora duale degenere, ed è anche primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^3) = \{4, 5, 6\}$.




Poiché la soluzione duale è degenere, la soluzione ottima del primale potrebbe non essere unica. È facile verificare tuttavia che questo non è il caso, ossia che la soluzione ottima del primale è unica; in effetti, è *l'unica soluzione ammissibile* del primale. Poiché la base è primale degenere, la soluzione ottima del duale potrebbe non essere unica, come effettivamente accade. Per verificarlo si osservi che $-c$ può essere espresso come combinazione lineare di $A_4$ ed $A_6$ con coefficienti positivi, ossia

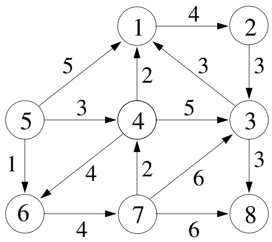
$$y_4 A_4 + y_6 A_6 = -c$$

per opportuni coefficienti $y_4 > 0$ e $y_6 > 0$. Inoltre, poiché $c$ è collineare ad $A_5$, si ha $c = \bar{y}_5 A_5$, dove $\bar{y}_5 > 0$ è componente della soluzione di base duale determinata dall'algoritmo. Segue che

$$y_4 A_4 + 2\bar{y}_5 A_5 + y_6 A_6 = 2c - c = c\ ,$$

ovvero esiste una diversa soluzione ammissibile del duale, $y = [\,0\ ,\ 0\ ,\ y_4\ ,\ 2\bar{y}_5\ ,\ y_6\,]$, che rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}^3$, e pertanto è anch'essa ottima.

**4)** Si consideri la rete di flusso in figura, in cui 5 è l'unico nodo sorgente, 8 l'unico nodo destinazione, e gli altri nodi sono pertanto di transito. Per tale rete di flusso si risolva il seguente problema decisionale: il nodo sorgente è in grado di inviare al nodo destinazione 10 unità di flusso? Giustificare la risposta.

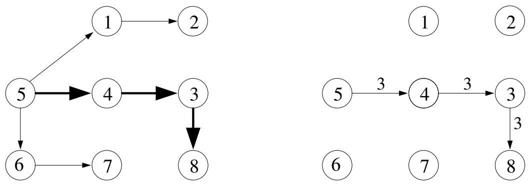


**SVOLGIMENTO**

Si tratta della versione decisionale del problema di flusso massimo. Il problema può quindi essere risolto individuando un flusso massimo dal nodo 5 al nodo 8, e confrontando il valore del flusso massimo con il dato di input 10. Applichiamo pertanto l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso nullo. Le iterazioni sono rappresentate di seguito.

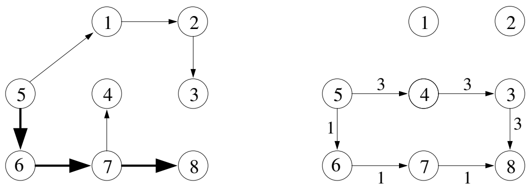
Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante $P$ individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo $P$, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

Iterazione 1:



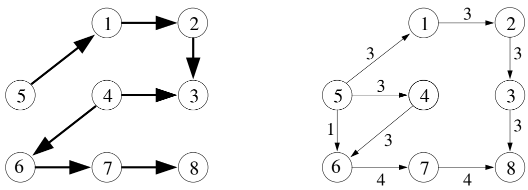
$\theta(P, x) = 3, \quad v = 3$

Iterazione 2:



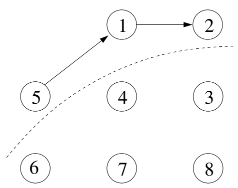
$\theta(P, x) = 1, \quad v = 4$

Iterazione 3:



$\theta(P, x) = 3, \quad v = 7$

Iterazione 4:



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo; inoltre, il taglio $N_s = \{5, 1, 2\}$, $N_t = \{3, 4, 6, 7, 8\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 1 + 3 + 3 = 7$.

Poiché il valore del flusso massimo è 7, la risposta è negativa, ovvero il nodo sorgente non è in grado di inviare 10 unità di flusso al nodo destinazione.

**5)** Si consideri la seguente variante del problema di cammino minimo vincolato. Dato un grafo orientato $G = (N, A)$, ai cui archi è associato sia un costo di utilizzo $c_{ij}$ che un tempo di percorrenza $t_{ij}$, per ogni $(i, j) \in A$, si vuole individuare un cammino di costo minimo, dal nodo $s \in N$ al nodo $t \in N$, tale che il tempo totale di viaggio non ecceda la soglia temporale $T$, e con l'ulteriore requisito che il cammino visiti almeno $k$ nodi appartenenti al sottoinsieme $V$ di $N$, in quanto nodi di particolare valore strategico. Si formuli il problema in termini di Programmazione Lineare Intera (*PLI*), giustificando le scelte modellistiche effettuate.

**SVOLGIMENTO**

Introduciamo una variabile binaria di flusso $x_{ij}$ per ogni $(i, j) \in A$, dove $x_{ij} = 1$ se l'arco $(i, j)$ fa parte del cammino dal nodo $s$ al nodo $t$, e 0 altrimenti. Introduciamo inoltre una variabile binaria $y_i$ per ogni $i \in V$, tale che $y_i = 1$ se il cammino visita il nodo $i$, e 0 altrimenti. Utilizzando tali variabili decisionali il problema può essere formulato nel modo seguente:

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \\
 & \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} - \sum_{(i,j)\in FS(i)} x_{ij} = b_i, i \in N \\
 & \sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \leq T \\
 & \sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} = y_i, i \in V \\
 & \sum_{i\in V} y_i \geq k \\
 & x_{ij} \in \{0,1\}, (i,j) \in A \\
 & y_i \in \{0,1\}, i \in V,
\end{array}
$$

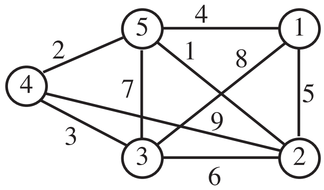
dove

$$
b_i = \begin{cases} -1 & \text{se } i = s \\ 1 & \text{se } i = t \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad i \in N \ .
$$

Le prime due famiglie di vincoli costituiscono infatti la classica formulazione del problema di cammino minimo vincolato, dal nodo $s$ al nodo $t$, in termini di PLI. Si tratta dei vincoli di conservazione di flusso e del vincolo, di tipo zaino, che impone che il tempo totale di viaggio lungo il cammino non ecceda la soglia temporale data $T$.

Per ogni nodo $i \in V$, il vincolo $\sum_{(j,i)\in BS(i)} x_{ji} = y_i$ garantisce invece che, se $i$ viene selezionato come nodo strategico facente parte del cammino, ovvero $y_i = 1$, allora esattamente un arco del cammino deve entrare in $i$. Si noti che, per i vincoli di conservazione di flusso, in tal caso si ha anche che esattamente un arco deve uscire da $i$. Infine il vincolo $\sum_{i\in V} y_i \geq k$ garantisce che almeno $k$ nodi appartenenti al sottoinsieme strategico di nodi $V$ venga selezionato.

**6)** Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching come segue: selezionato il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), crea $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi $Q$ come una coda, e si inseriscano in $Q$ i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente (ad esempio, se si seleziona il nodo 1, $(1,2)$ è inserito prima di $(1,3)$). Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visitino solamente i primi 6 nodi dell'albero delle decisioni (inclusa la radice). Se ciò non fosse sufficiente a risolvere il problema, si indichino la migliore valutazione inferiore e superiore disponibili al termine (e quindi il gap relativo ottenuto), giustificando la risposta.



**SVOLGIMENTO**

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con $z$ la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda $Q$ viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 15$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile; pertanto $\underline{z} = 15 < z = +\infty$ ed occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha tre lati incidenti e creare $3(3-1)/2 = 3$ figli fissando a zero rispettivamente i lati $(1,5)$, $(2,5)$ e $(4,5)$; i nodi sono inseriti in $Q$ in quest'ordine.

$\boxed{x_{15} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 17$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} = 17 < z = +\infty$ occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre lati incidenti, e creare tre figli fissando a zero rispettivamente i lati $(1,2)$, $(2,3)$ e $(2,5)$, inserendoli in $Q$ in quest'ordine.

$\boxed{x_{25} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (c). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $20 < z = +\infty$, si pone $z = 20$; inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{45} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 19$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 19 < z = 20$ occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 2, che ha tre lati incidenti, e creare tre figli fissando a zero rispettivamente i lati $(1,2)$, $(2,3)$ e $(2,5)$, inserendoli in $Q$ in quest'ordine.

$\boxed{x_{15} = x_{12} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 20$, è mostrato in (e). Poiché $\underline{z} = 20 \geq z = 20$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{15} = x_{23} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 18$, è mostrato in (f). Poiché $\underline{z} = 18 < z = 20$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5, che ha tre lati incidenti, e creare tre figli fissando a zero rispettivamente i lati $(2,5)$, $(3,5)$ e $(4,5)$, inserendoli in $Q$ in quest'ordine.

Poiché sono stati visitati 6 nodi, l'algoritmo viene interrotto anche se $Q$ non è vuota. L'analisi dell'algoritmo B&B assicura che la valutazione inferiore globale al termine dell'esecuzione è pari a $\min\{\, z \,,\, \min\{\, \underline{z}(P') \,:\, P' \in Q' \,\}\,\}$, dove $Q'$ è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in $Q$. In questo caso $Q'$ contiene i nodi $\boxed{x_{15} = 0}$, $\boxed{x_{45} = 0}$ e $\boxed{x_{15} = x_{23} = 0}$, pertanto la miglior valutazione inferiore disponibile quando l'algoritmo termina è $\min\{\, 20 \,,$ $\min\{\, 17 \,,\, 19 \,,\, 18 \,\}\,\} = 17$, ed il gap relativo a terminazione è $(20 - 17)/17 \approx 17.6\%$.