RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL parametrico in ε

$$(P)\quad \begin{array}{rrcrcl} \max & 7x_1 & - & x_2 & & \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 0 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & 1 \\ & 3x_1 & + & x_2 & \leq & 4+\varepsilon \end{array}$$

e la soluzione $\bar{y} = [0, 0, 2, 1]$ per il suo duale; utilizzando il il teorema degli scarti complementari si determini per quali valori di ε la soluzione $\bar{y}$ è ottima per il duale, discutendone l'unicità al variare di ε. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Per la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P)\quad \max\{\, cx \;:\; Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D)\quad \min\{\, yb \;:\; yA = c \,,\; y \geq 0 \,\}$$

il teorema forte della dualità ed il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) complementare a $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verificano le condizioni degli scarti complementari $\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0$.

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m.$$

Il duale di (P) è

$$(D)\quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & y_1 & & & + & y_3 & + & (4+\varepsilon)y_4 & & \\ & -y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 & + & 3y_4 & = & 7 \\ & -y_1 & + & y_2 & - & y_3 & + & y_4 & = & -1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Per il teorema degli scarti complementari, $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione primale $\bar{x}$ che rispetta gli scarti complementari con essa. Ovvero i vincoli primali a cui corrispondono variabili duali che hanno valore positivo in $\bar{y}$, ossia i vincoli 3 e 4, devono essere attivi in $\bar{x}$. Quindi $\bar{x}$ deve necessariamente risolvere il sistema di equazioni lineari

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 4+\varepsilon \end{array} \right.$$

che ha come unica soluzione $\bar{x}(\varepsilon) = [1 + \varepsilon/5, 1 + 2\varepsilon/5]$. Affinché $\bar{y}$ sia ottima occorre quindi che tale soluzione rispetti gli altri due vincoli del problema; da ció si ricava

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -(1+\varepsilon/5) - (1+2\varepsilon/5) \leq 1 & \Longrightarrow & \varepsilon \geq -5 \\ -(1+\varepsilon/5) + (1+2\varepsilon/5) \leq 0 & \Longrightarrow & \varepsilon \leq 0 \end{array} \right.$$

Pertanto la soluzione $\bar{y}$ è ottima per tutti i valori $\varepsilon \in [-5, 0]$.

Per discuterne l'unicità dobbiamo studiare l'insieme dei vincoli attivi $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{\, i \in \{1, \ldots, m\} \;:\; A_i\bar{x}(\varepsilon) = b_i \,\}$. Tale insieme comprende sempre i vincoli 3 e 4. L'analisi precedente mostra che $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{1, 3, 4\}$ per $\varepsilon = -5$, $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{3, 4\}$ per $\varepsilon \in (-5, 0)$, e $I(\bar{x}(\varepsilon)) = \{2, 3, 4\}$ per $\varepsilon = 0$. Per tutti i valori $\varepsilon \in (-5, 0)$ la base $B = \{3, 4\}$ è primale e duale ammissibile, primale e duale non degenere: di conseguenza, $\bar{y}$ è l'unica soluzione ottima del duale (e $\bar{x}(\varepsilon)$ è l'unica soluzione ottima del primale). Restano quindi da studiare individualmente i due casi estremi.

Per $\varepsilon = -5$ $\bar{y}$ non è più l'unica soluzione ottima del duale: infatti, la soluzione di base duale $[5, 0, 0, 4]$ corrispondente alla base $\{1, 4\}$ è ancora ammissibile, e poiché rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}(-5) = [0, -1]$, segue che è anch'essa ottima.

Similmente, per $\varepsilon = 0$ $\bar{y}$ non è più l'unica soluzione ottima del duale: infatti, la soluzione di base duale $[0, 5, 6, 0]$, corrispondente alla base $\{2, 3\}$, è ammissibile e rispetta le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}(0) = [1, 1]$.

2) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & 3x_1 & + & 6x_2 & & \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 8 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 & & & \leq & -4 \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{2, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Se il problema duale risultasse inferiormente illimitato, quale sarebbe la direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo? Giustificare la risposta.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{2,3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 4, 5, 6\ \} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 3/2, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\ \} = 2$$

it. 2) $B = \{3,4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/2 & 3/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9/2 & 3/2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k = 5,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 9, \quad h = 3$$

it. 3) $B = \{4,5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$,

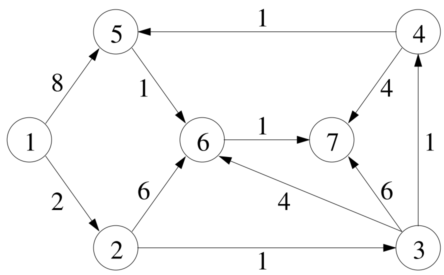
$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad k = \min\{\ 1, 2, 6\ \} = 1 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \end{bmatrix}, \qquad \textit{STOP.}$$

Poichè $\eta_B \leq 0$, il problema duale è inferiormente illimitato, e di conseguenza il problema primale è vuoto. La direzione di decrescita illimitata individuata dall'algoritmo è $d = [1\ 0\ 0\ -\eta_B\ 0]$; infatti, l'algoritmo sceglie un vettore d i cui elementi sono 0 in corrispondenza degli indici non in base salvo $k = 1$, per cui $d(k) = 1$, e i cui elementi corrispondenti agli indici in base sono gli elementi del vettore $-\eta_B$. Quindi $d = [1\ 0\ 0\ 2\ 5\ 0]$.

3) Si determini un albero dei cammini minimi di radice $r = 1$ per il grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più efficiente dal punto di vista della complessità computazionale e motivando la scelta effettuata. Per ciascuna iterazione si forniscano il nodo i selezionato, l'insieme Q (se utilizzato), i vettori delle etichette e dei predecessori. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Infine, si discuta ottimalità e unicità della soluzione ottenuta nel caso in cui nel grafo fosse presente anche l'arco $(7, 2)$, considerando sia lo scenario in cui $c_{72} = -5$ che lo scenario in cui $c_{72} = -6$. Giustificare le risposte.



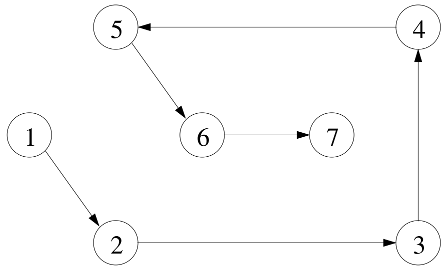
SVOLGIMENTO

Senza bisogno di rinumerazione dei nodi, per ogni arco (i, j) del grafo in figura risulta $i < j$; pertanto il grafo è aciclico. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$.

Sia $M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 8 + 1 = 49$.

Iter.	i	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$
0		0	49	49	49	49	49	49	nil	1	1	1	1	1	1
1	1	0	2	49	49	8	49	49	nil	1	1	1	1	1	1
2	2	0	2	3	49	8	8	49	nil	1	2	1	1	2	1
3	3	0	2	3	4	8	7	9	nil	1	2	3	1	3	3
4	4	0	2	3	4	5	7	8	nil	1	2	3	4	3	4
5	5	0	2	3	4	5	6	8	nil	1	2	3	4	5	4
6	6	0	2	3	4	5	6	7	nil	1	2	3	4	5	6

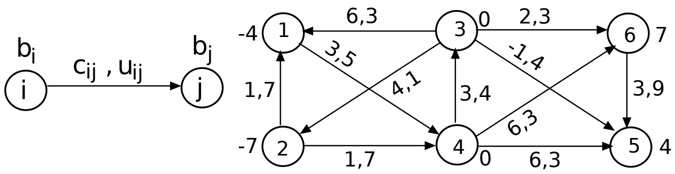
L'albero dei cammini minimi individuato è:



Se nel grafo fosse presente anche l'arco $(7, 2)$, di costo $c_{72} = -5$, l'albero determinato continuerebbe a restare ottimo, in quanto l'arco $(7, 2)$ soddisfa le condizioni di Bellman rispetto al vettore di etichette associato all'albero: infatti $d(7) - 5 = d(2)$. Nonostante tali condizioni valgano in forma di uguaglianza (si noti che per gli archi originali, non appartenenti all'albero, valgono invece in forma di disuguaglianza), l'albero in figura resterebbe l'unica soluzione ottima, in quanto l'inserimento di $(7, 2)$ al posto di $(1, 2)$ determinerebbe una struttura non connessa, che pertanto non è un albero.

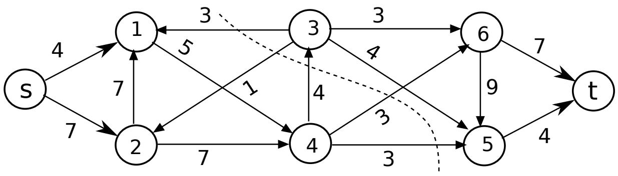
Infine, nel caso in cui fosse presente l'arco $(7, 2)$ di costo $c_{72} = -6$, si creerebbe il ciclo orientato $(2, 3, 4, 5, 6, 7, 2)$, di costo -1. Essendo presente un ciclo orientato di costo negativo, in tale scenario il problema di cammino minimo risulterebbe inferiormente illimitato.

4) Si determini se l'istanza del problema di Flusso di Costo Minimo in figura ammetta o no una soluzione ammissibile. Si descriva con precisione la metodologia utilizzata e si dimostri formalmente la risposta fornita, citando gli opportuni risultati teorici.



SVOLGIMENTO

Per determinare se un'istanza del problema di Flusso di Costo Minimo ammetta una soluzione ammissibile è sufficiente risolvere un'istanza del problema di Flusso Massimo costruita introducendo una "super-sorgente" s ed un "super-pozzo" t, collegando s ad ogni nodo con deficit negativo, mediante un arco la cui capacità è l'opposto del deficit del nodo, e collegando t ad ogni nodo con deficit positivo, mediante un arco la cui capacità è il deficit del nodo. Per l'istanza in oggetto si ottiene la seguente istanza del problema di Flusso Massimo:



Tale istanza ha la caratteristica che tutti i flussi ammissibili per il problema di Flusso di Costo Minimo (se ne esistono) corrispondono a flussi da s a t il cui valore è $\bar{v} = \sum_{i \in N \,:\, b_i > 0} b_i$, ossia a flussi che saturano tutti gli archi entranti in t (e, poiché $\sum_{i \in N} b_i = 0$, anche quelli uscenti da s). Pertanto è sufficiente esaminare l'insieme dei tagli di capacità minima della rete estesa: se tale insieme include il taglio $(\{s\}, N \cup \{t\})$, e quindi anche il taglio $(N \cup \{s\}, \{t\})$, aventi capacità $\bar{v}$, allora l'istanza è ammissibile. In tal caso, individuando un qualsiasi flusso massimo, è possibile determinare un flusso ammissibile per il problema di Flusso di Costo Minimo scartando gli archi aggiunti alla rete (ovvero quelli uscenti da s e quelli entranti in t) e mantenendo sugli altri il flusso individuato. Se invece esiste un taglio, che separa s da t, la cui capacità è inferiore a $\bar{v}$, allora non esiste alcun flusso ammissibile per il problema di Flusso di Costo Minimo. Ciò discende dal teorema che mostra che, per ogni flusso ammissibile x di valore v, e per ogni taglio (N_s, N_t) che separa s da t, si ha $v = x(N_s, N_t) \leq u(N_s, N_t)$, ossia il valore di qualsiasi flusso ammissibile è minore o uguale della capacità di un qualsiasi taglio che separi s da t.

Si può pertanto rispondere alla domanda, in positivo o in negativo, individuando un taglio di capacità minima, ma per dimostrare che non esiste alcun flusso ammissibile è sufficiente mostrare l'esistenza di un taglio di capacità inferiore a $\bar{v}$.

Nel caso in questione, $\bar{v} = b_5 + b_6 = 4 + 7 = 11$. Il taglio $(N_s, N_t) = (\{s, 1, 2, 4\}, \{3, 5, 6, t\})$ ha capacità $u(N_s, N_t) = u_{43} + u_{45} + u_{46} = 4 + 3 + 3 = 10 < 11 = \bar{v}$; pertanto, l'istanza del problema di Flusso di Costo Minimo in esame non ammette soluzioni ammissibili.

5) Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, si riformuli il seguente modello matematico

$$\begin{array}{ll} \max & \min\{\, x_1 - x_2 - x_3 \,,\, 2x_1 + 3x_2 + x_3 \,\} \\ & x_1 \in \{0,1\} \\ & 0 \leq x_2 \leq 50 \\ & x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 25 \\ & x_1 = 1 \Longrightarrow x_3 = x_2 \\ & x_1 = 0 \Longrightarrow x_3 = 26 \end{array}$$

come un problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*). Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il modello matematico proposto non è un modello di *PLI* in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare (è definita infatti come il minimo di due funzioni lineari);
- sono presenti tre implicazioni logiche che legano le variabili x_2 e x_3 al valore assunto dalla variabili binaria x_1.

Il modello può comunque essere (ri)formulato in termini di modello *PLI* nel modo seguente:

$$\max z \tag{1}$$

$$z \leq x_1 - x_2 - x_3 \tag{2}$$

$$z \leq 2x_1 + 3x_2 + x_3 \tag{3}$$

$$x_1 \in \{0,1\} \tag{4}$$

$$0 \leq x_2 \leq 50 \tag{5}$$

$$x_2 \geq 25(1 - x_1) \tag{6}$$

$$x_2 \leq 25(1 - x_1) + 50x_1 \tag{7}$$

$$x_3 - x_2 \leq (1 - x_1) \tag{8}$$

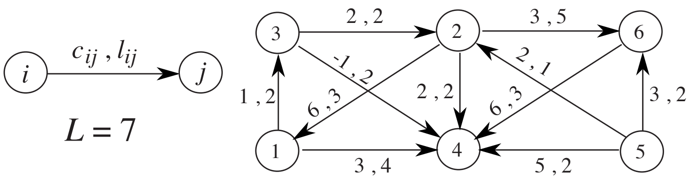
$$x_3 - x_2 \geq (1 - x_1) \tag{9}$$

Per via dei vincoli (2) e (3), la variabile di soglia z stima per difetto il minimo tra i valori restituiti dalle funzioni lineari $x_1 - x_2 - x_3$ e $2x_1 + 3x_2 + x_3$. Massimizzando z, il solutore attribuisce pertanto a x_1, x_2 e x_3 quei valori (ammissibili) che massimizzano il minimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

I vincoli (6) e (7) garantiscono che, se $x_1 = 0$, allora la variabile x_2 sia forzata ad assumere il valore 25. Si noti che, se invece $x_1 = 1$, tali vincoli risultano ridondanti, indicando che x_2 deve variare tra 0 e 50.

I vincoli (8) e (9), infine, garantiscono che, se $x_1 = 1$, allora $x_3 = x_2$. Se invece $x_1 = 0$, poiché in tal caso $x_2 = 25$, gli stessi vincoli garantiscono che x_3 assuma il valore 26.

6) Si risolva il problema del Cammino Minimo Vincolato, dal nodo 1 al nodo 6, sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo Branch&Bound che usa come rilassamento il problema del Cammino Minimo (non vincolato), nessuna euristica, visita l'albero delle decisioni a ventaglio, e come regola di branching utilizza la seguente: dato il cammino minimo ottenuto dal rilassamento, nel primo dei figli si elimina il primo arco del cammino, nel secondo figlio si fissa in soluzione il primo arco del cammino e si elimina il secondo, nel terzo figlio si fissano in soluzione i primi due archi del cammino e si elimina il terzo, e così via fino a considerare l'ultimo sottocammino (di origine 1) la cui lunghezza è minore della soglia massima data. Per ogni nodo si riporti la soluzione del rilassamento e si indichi se il nodo viene chiuso e perché, oppure se viene effettuato il branching e come. Si esaminino solamente i primi cinque nodi dell'albero delle decisioni, compreso il nodo radice. Al termine si specifichi il gap ottenuto, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate; inizialmente $z = +\infty$. La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'albero dei cammini minimi (SPT) ottenuto è mostrato in a) (è possibile verificare la sua ottimalità grazie alle etichette riportate, che rispettano le condizioni di Bellman). Il cammino $P = \{(1,3), (3,2), (2,6)\}$ ha costo $\underline{z} = 6$ ma lunghezza pari a 9, e quindi non è ammissibile. Non avendo ottenuto nessuna soluzione ammissibile, si ha $z = +\infty > \underline{z} = 6$ ed occorre quindi procedere con il branching. Ciò corrisponde a creare un nodo dell'albero delle decisioni in cui si elimina l'arco $(1,3)$, un altro in cui si fissa in soluzione l'arco $(1,3)$ mentre si elimina l'arco $(3,2)$, ed un terzo in cui si fissano in soluzione gli archi $(1,3)$ e $(3,2)$ mentre si elimina l'arco $(2,6)$. Si osservi che non si crea un figlio in cui si fissano in soluzione tutti e tre gli archi, perché corrisponderebbe ad un sottoproblema vuoto (la lunghezza di quel cammino è superiore alla soglia $L = 7$).

$\boxed{x_{13} = 0}$ L'SPT ottenuto è mostrato in b). Non esistendo alcun cammino ammissibile da 1 a 6 (l'etichetta di 6 è $+\infty$), il nodo viene chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{13} = 1, x_{32} = 0}$ L'SPT ottenuto, di radice 3, è mostrato in c). Non esistendo alcun cammino ammissibile da 1 a 6 (l'etichetta di 6 è $+\infty$), il nodo viene chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{13} = x_{32} = 1, x_{26} = 0}$ L'SPT ottenuto, di radice 2, è mostrato in d). Non esistendo alcun cammino ammissibile da 1 a 6 (l'etichetta di 6 è $+\infty$), il nodo viene chiuso per inammissibilità.

Poiché $Q = \emptyset$, l'algoritmo termina. La miglior valutazione superiore ottenuta è $z = +\infty$. L'analisi dell'algoritmo B&B assicura che la valutazione inferiore globale è pari a $\min\{\ z\ ,\ \min\ \{\ \underline{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso $Q = \emptyset$ e quindi $Q' = \emptyset$. Per convenzione il minimo su un insieme vuoto vale $+\infty$, e quindi anche la valutazione inferiore globale è pari a $+\infty$. Poiché la valutazione superiore e quella inferiore coincidono ($+\infty$ denota per convenzione un valore molto elevato), il gap è nullo: il problema è stato risolto dimostrando che esso non ha alcuna soluzione ammissibile, come è facile verificare per ispezione.