RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrrrrl} \max & x_1 & - & 4x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & & & x_2 & \leq & 6 \\ & -2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

per via algebrica, mediante l'algoritmo del Simplesso Primale a partire dalla base $B = \{2, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'eventuale degenerazione primale e duale della base, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento, e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: *i*) si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica; *ii*) si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{2, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{1\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_1 = 0 \ , \ k = 1$$

[cambio di base degenere]

it.2) $B = \{1, 2\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[base primale degenere e duale non degenere] $h = 2$, $B(h) = 2$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \ , \ A_N\xi = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \ , \ J = \{5\} \ , \ \bar{\lambda} = \lambda_5 = 1 \ , \ k = 5$$

it.3) $B = \{1, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$y_B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \ , \ y = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{STOP.}$$

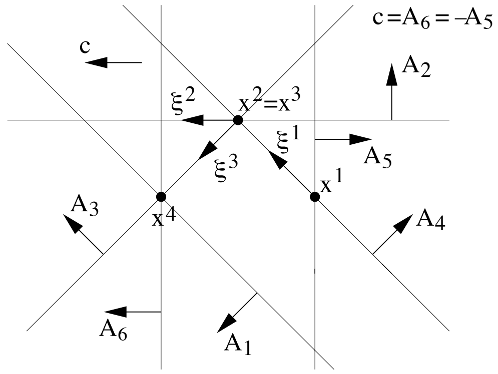
[base primale degenere e duale non degenere]

Poiché $y_B \geq 0$ segue che $x = (3, 5)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $y = (7, 0, 0, 0, 3)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito. *i*) Essendo la soluzione ottima duale individuata non degenere, segue che $x = (3, 5)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale. *ii*) Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il duale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $x = (3, 5)$. È immediato verificare che l'insieme degli indici dei vincoli attivi per $x = (3, 5)$ è $I(x) = \{1, 3, 5\}$. Di conseguenza una soluzione duale y, tale che $yA = c$, che formi con x una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare la condizione $y_2 = y_4 = 0$. Affinché y sia ammissibile per (D), essa deve inoltre soddisfare il sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} y_1 & -y_3 & -2y_5 & = 1 \\ -y_1 & +y_3 & +y_5 & = -4 \\ y_1, & y_3, & y_5 \geq 0 & \end{array} \right.$$

Tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(7 + \alpha, \alpha, 3)$, per $\alpha \geq 0$. Pertanto, le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni aventi forma $y(\alpha) = (7 + \alpha, 0, \alpha, 0, 3)$, per $\alpha \geq 0$.

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale e la direzione di spostamento (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si consideri quindi il caso in cui $c = A_1$: la soluzione ottima trovata in precedenza resta tale? Qual è, in questo caso, l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema primale? Giustificare le risposte.



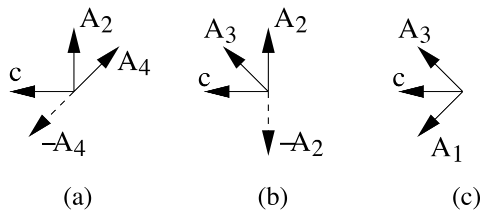
SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{4, 5\}$, $y_4 = 0$ e $y_5 = -1 < 0$ poiché $c = -A_5$; quindi, risulta $h = 5$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza ai vincoli 2 e 3: quindi $k = \min\{2, 3\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

it.2) $B = \{2, 4\}$, $y_2 > 0$ e $y_4 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 e $-A_4$, come mostrato in figura (a); quindi, risulta $h = 4$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza al vincolo 3, attivo ma non in base: si esegue quindi un cambio di base degenere selezionando $k = 3$.

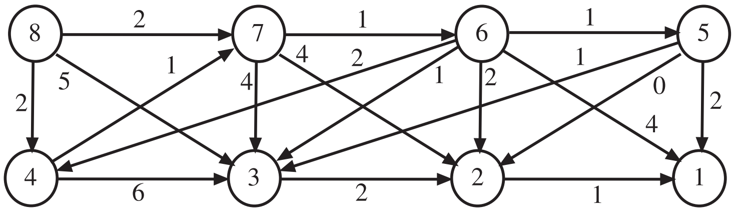
it.3) $B = \{2, 3\}$, $y_2 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_2$ e A_3, come mostrato in figura (b); quindi, risulta $h = 2$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza ai vincoli 1 e 6: quindi $k = \min\{1, 6\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it.4) $B = \{1, 3\}$, $y_1 > 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e A_3, come mostrato in figura (c); quindi, la base è duale ammissibile e l'algoritmo termina, avendo determinato la soluzione ottima primale x^4.



Nel caso in cui si abbia $c = A_1$, la base $B = \{1, 3\}$ resta duale ammissibile poiché c continua ad appartenere al cono generato da A_1 e A_3 (si avrà $y_3 = 0$ e $y_1 = 1$). Quindi, x^4 è una soluzione ottima del problema primale anche in questo caso. Essendo $c = A_1$, l'insieme delle soluzioni ottime del problema primale è costituito dal lato del poliedro che unisce x^4 e il vertice individuato dalla base $\{1, 5\}$.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 4 sul grafo in figura



utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.

i) La soluzione ottima trovata è unica? *ii*) Quale sarebbe l'esito di risoluzione del problema di cammino minimo se l'arco $(6, 4)$ costasse -3 (invece che 2)? Giustificare le risposte.

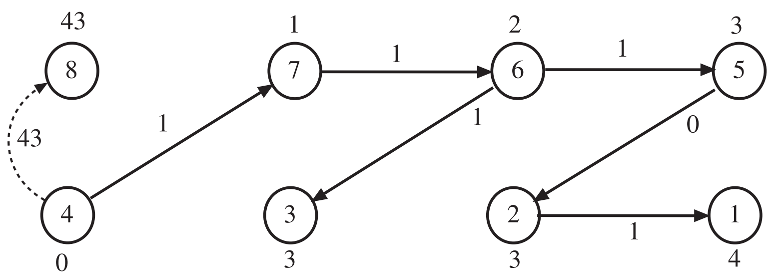
SVOLGIMENTO

Non essendo presenti archi di costo negativo, e non essendo il grafo aciclico (si consideri ad esempio il ciclo $(4, 7, 6)$), l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$.

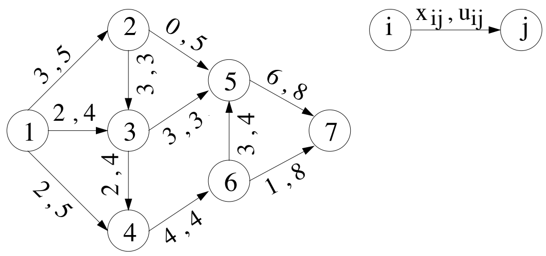
$M = (n-1)c_{max} + 1 = 7 \times 6 + 1 = 43.$

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$p[8]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$d[8]$	Q
0		4	4	4	*nil*	4	4	4	4	43	43	43	0	43	43	43	43	$\{4\}$
1	4	4	4	4	*nil*	4	4	4	4	43	43	6	0	43	43	1	43	$\{3, 7\}$
2	7	4	7	7	*nil*	4	7	4	4	43	5	5	0	43	2	1	43	$\{2, 3, 6\}$
3	6	6	6	6	*nil*	6	7	4	4	6	4	3	0	3	2	1	43	$\{1, 2, 3, 5\}$
4	5	5	5	6	*nil*	6	7	4	4	5	3	3	0	3	2	1	43	$\{1, 2, 3\}$
5	3	5	5	6	*nil*	6	7	4	4	5	3	3	0	3	2	1	43	$\{1, 2\}$
6	2	2	5	6	*nil*	6	7	4	4	4	3	3	0	3	2	1	43	$\{1\}$
7	1	2	5	6	*nil*	6	7	4	4	4	3	3	0	3	2	1	43	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura. Si noti che il nodo 8 non è raggiungibile da 4. *i*) Poiché le condizioni di Bellman per gli archi non appartenenti all'albero sono verificate come disuguaglianza, la soluzione ottima è unica. *ii*) Se l'arco $(6, 4)$ costasse -3, si avrebbe un ciclo orientato di costo negativo: il ciclo $(4, 7, 6)$ avrebbe infatti costo -1. Il problema di cammino minimo sull'istanza data risulterebbe quindi inferiormente illimitato.



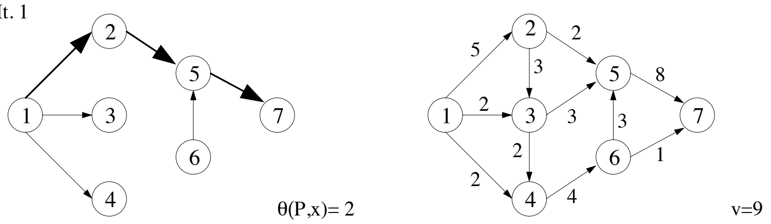
4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso dato, di valore $v = 7$. Per ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Se si diminuisse la capacità dell'arco $(2, 5)$ di una unità, di quanto diminuirebbe il valore del flusso massimo? Giustificare la risposta.



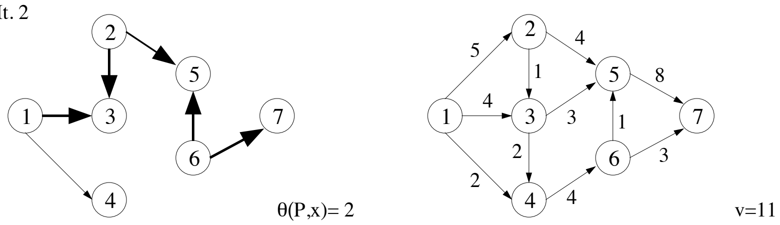
SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

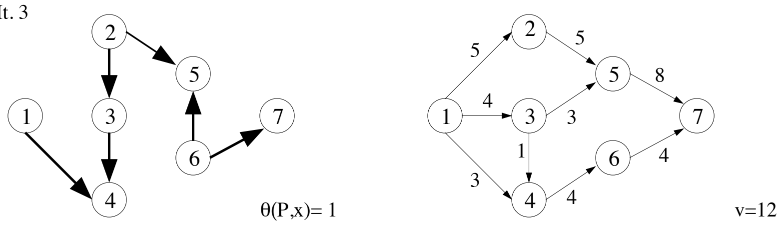
It. 1



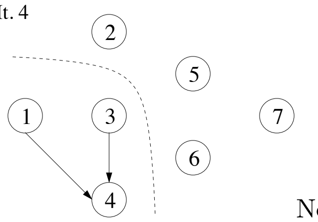
It. 2



It. 3



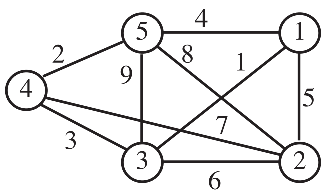
It. 4



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed inoltre il taglio $N_s = \{1, 3, 4\}$, $N_t = \{2, 5, 6, 7\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 5 + 3 + 4 = 12$.

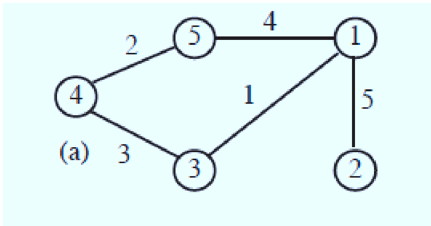
Diminuendo la capacità dell'arco $(2, 5)$ di una unità, ovvero nel caso in cui risulta $u_{25} = 4$, il valore del flusso massimo diminuisce anch'esso di una unità. Infatti, il flusso di valore 11 ottenuto al termine della seconda iterazione rimane ammissibile anche in questo caso, ma la procedura di visita associata a tale flusso termina senza raggiungere la destinazione ed individuando il taglio $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\})$ di capacità 11. Pertanto, se $u_{25} = 4$ il flusso massimo ha valore 11.

5) Si consideri l'istanza del problema TSP in figura. Si fornisca sia una valutazione inferiore del suo valore ottimo, mediante il rilassamento MS1T, che una valutazione superiore, mediante l'algoritmo euristico *nearest neighborhood*, eseguendo tale algoritmo a partire dal nodo 1. Alla fine si specifichi l'intervallo di appartenenza del valore ottimo individuato mediante le due valutazioni.

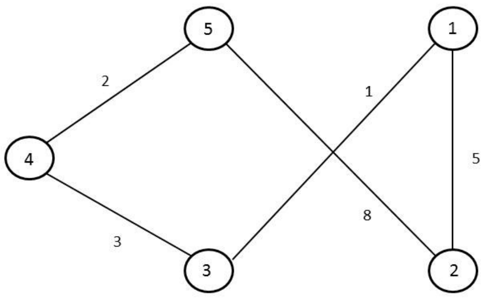


SVOLGIMENTO

Il rilassamento MS1T restituisce l'1-albero mostrato in figura (a). Viene determinata quindi la seguente valutazione inferiore del valore ottimo: $\underline{z} = 15$.



L'algoritmo euristico *nearest neighborhood*, a partire dal nodo 1, individua il ciclo Hamiltoniano sotto riportato. Viene determinata pertanto la seguente valutazione superiore del valore ottimo: $\bar{z} = 19$.



L'intervallo di appartenenza del valore ottimo è quindi: $[15, 19]$.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} \max & 3x_1 & +5x_2 & +9x_3 & +5x_4 & +9x_5 & +x_6 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & +2x_6 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore ed inferiore disponibili al momento in cui l'esplorazione viene interrotta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_6$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1/3, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 17$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\underline{z} = 15 > z = -\infty$, $z = 15$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [0, 0, 1, 0, 1/3, 0]$, $\bar{z} = 12$. Siccome $\bar{z} < z = 15$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 16 + 1/2$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 15$. Poiché $\underline{z} = 15 = z = 15$, z non cambia. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$\boxed{x_3 = 0,\ x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 14$. Poichè la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = 14 < z = 15$.

$\boxed{x_3 = x_2 = 0}$ $x^* = [2/3, 0, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 16$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 15$. Siccome $\bar{z} = 16 > z = 15$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_1.

Poiché il massimo numero di livelli dell'albero è stato raggiunto, l'algoritmo viene interrotto anche se Q non è vuota. L'analisi dell'algoritmo B&B assicura che la valutazione superiore globale è pari a $\max\{\ z\ ,\ \max\ \{\ \bar{z}(P')\ :\ P' \in Q'\ \}\ \}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso Q' contiene il solo nodo $x_3 = x_2 = 0$: pertanto $\bar{z} = 16$, e siccome $z = 15$ il gap relativo a terminazione è $(16 - 15)/15 = 1/15 = 6.\bar{6}\%$. In effetti con semplici argomentazioni è facile dimostrare che il valore $z = 15$ è ottimo per il problema, e che quindi l'algoritmo ha determinato una soluzione ottima.