RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il problema di PL dato applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima duale individuata sia unica, e se non lo è si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime duali, giustificando la risposta.

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 3, 5\ \} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 1/2, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i\ \} = 4$$

it. 2) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 5$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 1/3, \quad h = 1$$

it. 3) $B = \{3, 5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP.}$$

$B = \{3, 5\}$ è una base ottima: $\bar{x} = [2, 0]$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = [0, 0, 2/3, 0, 1/3]$ è una soluzione ottima duale. Osserviamo che $\bar{x}$ è degenere: $I(\bar{x}) = \{3, 4, 5\}$. Pertanto, $\bar{y}$ potrebbe non essere l'unica soluzione ottima duale. Le soluzioni ottime del problema duale sono tutte e sole le soluzioni ammissibili che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $\bar{x}$; quindi, affinché y, tale che $yA = c$, sia ottima deve soddisfare la condizione $y_1 = y_2 = 0$. Affinché y sia ammissibile per il problema duale essa deve inoltre soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 2y_3 + y_4 - y_5 = 1 \\ y_3 + y_5 = 1 \\ y_3\ ,\ y_4\ ,\ y_5 \geq 0 \end{cases}$$

Ponendo $y_4 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $[(2 - \alpha)/3, \alpha, (1 + \alpha)/3]$, per $0 \leq \alpha \leq 2$. Pertanto il problema duale ammette infinite soluzioni ottime della forma $y(\alpha) = [0, 0, (2 - \alpha)/3, \alpha, (1 + \alpha)/3]$, per $0 \leq \alpha \leq 2$.

2) Si consideri il problema di *PL* riportato a lato, parametrico in ε: *i*) si individui l'insieme di tutti i valori di ε per cui la base $B = \{3,4\}$ è ottima; *ii*) si risolva il problema dato, a partire dalla base $B = \{3,4\}$, per $\varepsilon > 2$, utilizzando l'algoritmo del Simplesso appropriato. Giustificare algebricamente le risposte date.

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & (2-\varepsilon)x_1 & + & \varepsilon x_2 & & \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & -x_1 & - & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \end{array}$$

SVOLGIMENTO

i) Considerando la base $B = \{3,4\}$, si ha

$$A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ \bar{y}_B(\varepsilon) = \begin{bmatrix} (2-\varepsilon) & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon & (2-\varepsilon) \end{bmatrix}$$

La soluzione di base primale è ammissibile a prescindere dal valore di ε. La soluzione di base duale è invece ammissibile per tutti i valori di ε per cui $\bar{y}_B(\varepsilon) \geq 0$, ossia

$$\varepsilon \geq 0 \quad , \quad 2 - \varepsilon \geq 0 \quad \equiv \quad \varepsilon \in [0,2] \ .$$

Segue che $B = \{3,4\}$ è una base ottima per $\varepsilon \in [0,2]$.

ii) Per $\varepsilon > 2$, la base $B = \{3,4\}$ è primale ammissibile ma non più duale ammissibile, come risulta dall'analisi in *i*): la seconda componente di $\bar{y}_B(\varepsilon) = [\varepsilon, 2-\varepsilon]$ è infatti negativa. Essendo $B = \{3,4\}$ primale ammissibile, è possibile risolvere il problema dato mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire da $B = \{3,4\}$:

it.1) $B = \{3,4\}$, $h = 4$, $B(h) = 2$

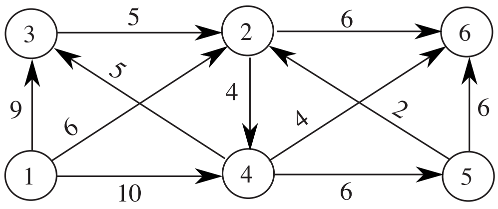
$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ ,\ A_N\xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \ ,\ J = \{2\} \ ,\ \bar{\lambda} = \lambda_2 \ ,\ k = 2$$

it.2) $B = \{2,3\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B(\varepsilon) = \begin{bmatrix} (2-\varepsilon) & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varepsilon-2) & (2\varepsilon-2) \end{bmatrix} \ , \qquad \text{STOP.}$$

Poiché $\bar{y}_B(\varepsilon) \geq 0$ per $\varepsilon > 2$, segue che, per $\varepsilon > 2$, $\bar{x} = (-2,2)$ è soluzione ottima del problema dato, mentre $\bar{y} = (0, \varepsilon-2, 2\varepsilon-2, 0)$ è soluzione ottima per il suo problema duale.

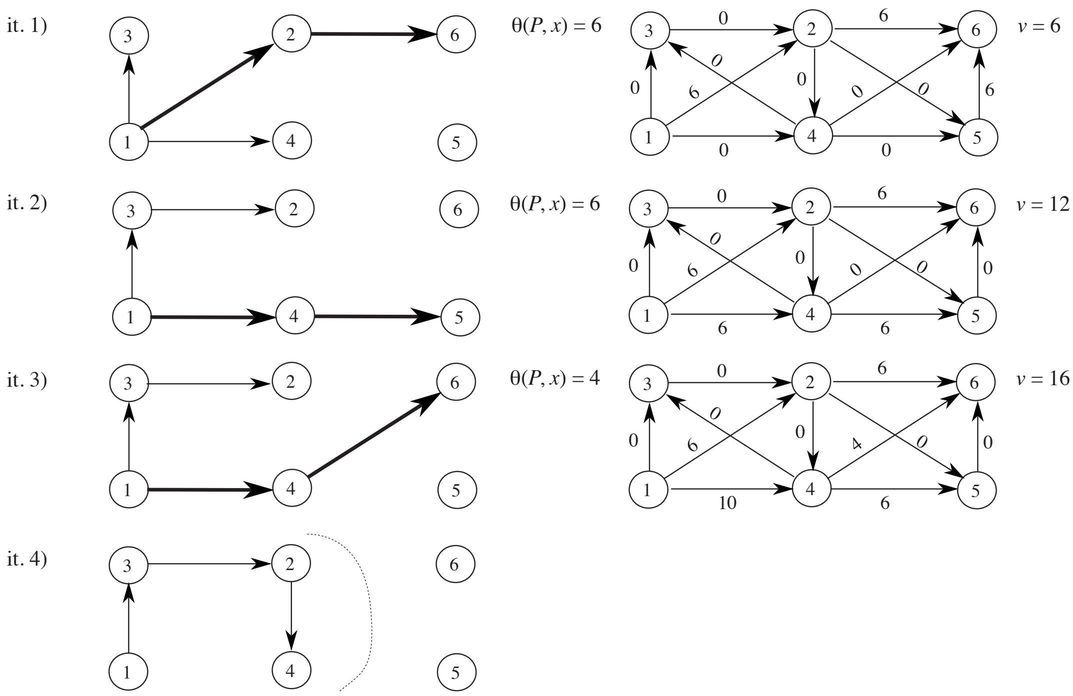
3) Si individui un flusso massimo dal nodo sorgente 1 ai due nodi destinazione 5 e 6, sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, discutendo se sia l'unica soluzione ottima del problema di taglio di capacità minima definito sulla stessa rete. Giustificare le risposte. (*Suggerimento*: risolvere un problema di flusso massimo da un nodo sorgente s ad un insieme T di nodi destinazione è equivalente a risolvere un problema di flusso massimo, da s a t, su un grafo aumentato; t è una super-destinazione, aggiunta al grafo, che viene collegata a tutti i nodi destinazione originari da archi di capacità infinita.)



SVOLGIMENTO

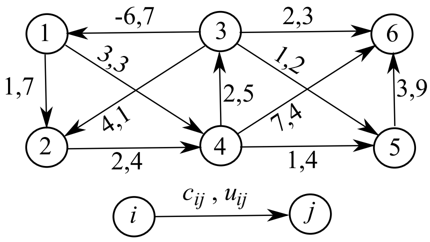
Nello svolgimento la super-destinazione t non verrà esplicitata. Non è infatti necessario, essendo sufficiente terminare ogni visita non appena si raggiunge uno qualsiasi dei nodi destinazione originari (il nodo 5 o il nodo 6 nel caso in esame).

Le iterazioni dell'algoritmo sono rappresentate nel seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Si noti che entrambe le destinazioni fanno parte di N_t in quanto gli archi entranti nella super-destinazione, avendo capacità infinita, non possono mai essere saturi. Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{26} + u_{46} + u_{45} = 6 + 4 + 6 = 16 = v$.



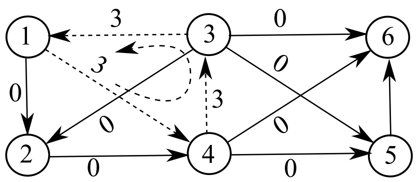
Il taglio determinato è unico. Infatti, gli unici altri archi saturi sono $(1, 2)$ che $(1, 4)$, non appartenenti al taglio. Ma né il nodo 2 né il nodo 4 possono far parte di N_t, in quanto sono entrambi raggiunti mediante cammini aumentanti.

4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura, in cui tutti i bilanci ai nodi sono nulli, utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire da un flusso ammissibile opportunamente determinato. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si discuta se la soluzione ottima ottenuta sia unica.

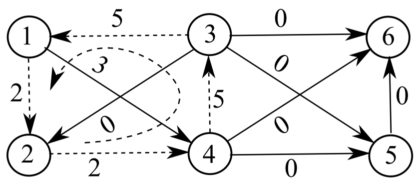


SVOLGIMENTO

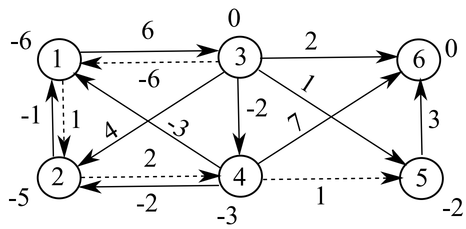
Poiché i bilanci ai nodi sono tutti nulli, è immediato determinare un flusso ammissibile per l'istanza in esame: basta porre $x_{ij} = 0$ per ogni $(i, j) \in A$. A partire dal flusso nullo, una possibile esecuzione dell'algoritmo prevede le due iterazioni illustrate nel seguito (le due figure in alto, da sinistra a destra): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La terza figura, in basso al centro, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione ed il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. Si noti che due nodi hanno etichetta 0, e quindi sono entrambi "radice"; in effetti l'albero è una foresta. L'esistenza di un albero (foresta) dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



$\theta = 3$, $c(C) = -1$, $cx = -3$

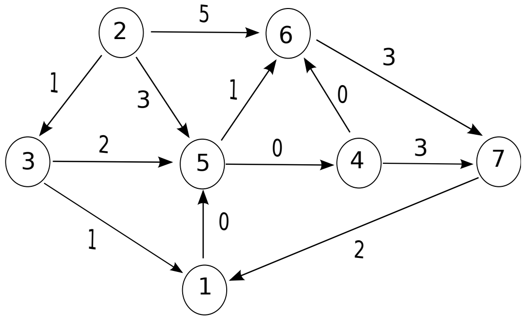


$\theta = 2$, $c(C) = -1$, $cx = -5$



La soluzione ottima non è unica, in quanto nel grafo residuo esistono cicli aumentanti di costo nullo. Infatti l'arco $(4, 1)$, non appartenente all'albero dei cammini minimi, rispetta le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza ($d_4 + c_{41} = -3 - 3 = -6 = d_1$). Tale arco, aggiunto all'albero dei cammini minimi, individua nel grafo residuo il ciclo orientato $(1, 2, 4)$, che corrisponde ad un ciclo aumentante di costo nullo. Inviando flusso lungo tale ciclo si possono quindi costruire soluzioni ottime diverse da quella determinata.

5) Si consideri il problema di cammino minimo vincolato, dal nodo 2 al nodo 7, sul grafo in figura, dove i pesi associati agli archi rappresentano i costi. Si assuma che ogni arco (i, j) abbia lunghezza $l_{ij} = 1$, e sia $L = 4$ la soglia massima sulla lunghezza dei cammini ammissibili da 2 a 7.



Si fornisca una valutazione inferiore del valore ottimo di tale problema mediante un opportuno rilassamento per eliminazione di vincoli, descrivendo l'algoritmo utilizzato per determinare la valutazione inferiore e giustificando la scelta effettuata.

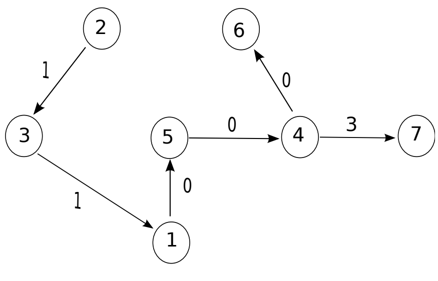
SVOLGIMENTO

Per determinare una valutazione inferiore del valore ottimo, il rilassamento per eliminazione di vincoli presentato durante il corso consiste nel trascurare il vincolo relativo alla lunghezza dei cammini, risolvendo quindi un problema di cammino minimo classico dal nodo 2 al nodo 7. Tale cammino può essere individuato risolvendo il problema dell'albero dei cammini minimi di radice 2. Nel caso in questione il grafo contiene il ciclo $(1, 5, 6, 7)$ e non presenta archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31.$

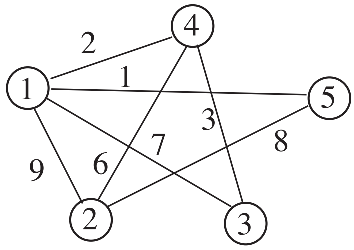
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		2	*nil*	2	2	2	2	2	31	0	31	31	31	31	31	(2)
1	2	2	*nil*	2	2	2	2	2	31	0	1	31	3	5	31	$(5, 3, 6)$
2	3	3	*nil*	2	2	2	2	2	2	0	1	31	3	5	31	$(1, 5, 6)$
3	1	3	*nil*	2	2	1	2	2	2	0	1	31	2	5	31	$(5, 6)$
4	5	3	*nil*	2	5	1	5	2	2	0	1	2	2	3	31	$(4, 6)$
5	4	3	*nil*	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	$(6, 7)$
6	6	3	*nil*	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	(7)
7	7	3	*nil*	2	5	1	4	4	2	0	1	2	2	2	5	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



Poiché il costo del cammino minimo dal nodo 2 al nodo 7 è 5, segue che 5 è una valutazione inferiore del valore ottimo del problema di cammino minimo vincolato. Si osservi che tale cammino non è ammissibile per il problema vincolato in quanto la sua lunghezza è $5 > L = 4$.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo di B&B che usa MS1T come rilassamento, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di lati dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r - 2$ di tali lati. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una coda. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore. Si indichi inoltre se, e come, viene effettuato il branching, o se il nodo viene chiuso e perché.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 19$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile; pertanto $\underline{z} = 19 < z = +\infty$ ed occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 1, che ha tre lati incidenti, e creare $3(3-1)/2 = 3$ figli, in cui si fissano a zero rispettivamente i lati $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$ e $\{1, 5\}$.

$\boxed{x_{13} = 0}$ Poiché il nodo 3 ha un solo lato incidente nel grafo ridotto è impossibile che esista un ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{14} = 0}$ L'MS1T, con $\underline{z} = 25$, è mostrato in (b). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $25 < z = +\infty$, si pone $z = 25$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{15} = 0}$ Poiché il nodo 5 ha un solo lato incidente nel grafo ridotto è impossibile che esista un ciclo Hamiltoniano: il nodo viene quindi chiuso per inammissibilità.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo termina, restituendo la soluzione ottima in (b), di valore $z = 25$.