RICERCA OPERATIVA (a.a. 2016/17)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr}
\max & x_1 & + & x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 10 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2
\end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 3\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica, giustificando la risposta.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1,3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \ \bar{y}_N = 0, \ \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 4, 5\ \} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 1/2, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\ \} = 3$$

it. 2) $B = \{1,4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \ \ \bar{y}_N = 0, \ \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 5,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 1/3, \quad h = 1$$

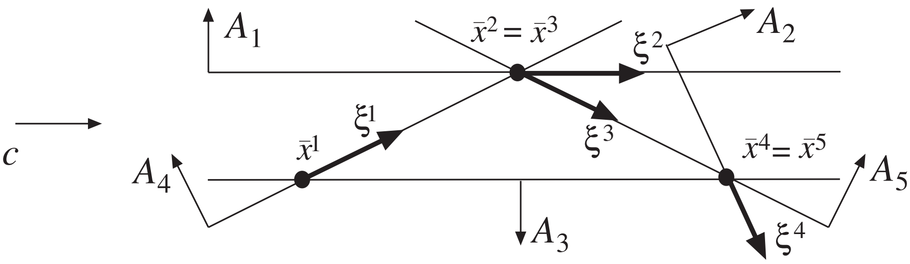
it. 3) $B = \{5,4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \ \ \bar{y}_N = 0, \ \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP.}$$

$B = \{5, 4\}$ è una base ottima: $\bar{x} = (2, 0)$ è una soluzione ottima per il problema primale, mentre $\bar{y} = (0, 0, 0, 2/3, 1/3)$ è una soluzione ottima per il problema duale. Osserviamo che la soluzione ottima duale individuata dall'algoritmo è non degenere. Segue che $\bar{x} = (2, 0)$ è l'unica soluzione ottima del problema primale.

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione primale di base $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Si discuta inoltre la degenerazione, sia primale che duale, delle basi visitate dall'algoritmo.



SVOLGIMENTO

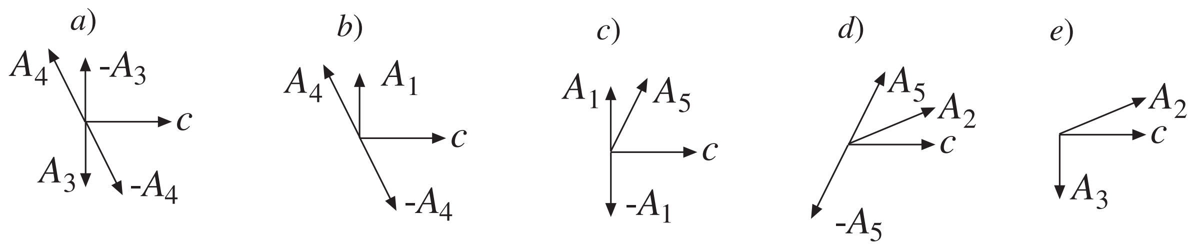
it. 1) $B = \{3, 4\}$, $y_3 < 0$ e $y_4 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_3$ e $-A_4$, come mostrato in figura *a*); quindi, $h = \min\{3, 4\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland. La base non è né primale degenere, in quanto $I(\bar{x}^1) = \{3, 5\} = B$, né duale degenere in quanto tutte le variabili duali in base sono non nulle. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 1 e 5, e quindi $k = \min\{1, 5\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 2) $B = \{1, 4\}$, $y_1 > 0$ e $y_4 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_4$, come mostrato in figura *b*); quindi, $h = 4$. La base è quindi duale non degenere, mentre è primale degenere in quanto $I(\bar{x}^2) = \{1, 4, 5\} \neq B$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^2 è zero, e si ottiene proprio in corrispondenza del vincolo 5, attivo ma non in base: si esegue quindi un cambio di base degenere selezionando $k = 5$.

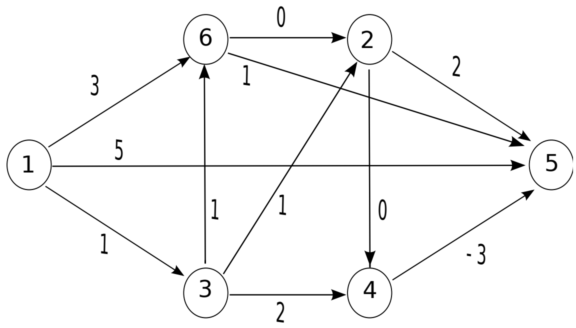
it. 3) $B = \{1, 5\}$, $y_1 < 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e A_5, come mostrato in figura *c*); quindi, $h = 1$. La base è quindi duale non degenere, mentre è ovviamente ancora primale degenere in quanto $\bar{x}^3 = \bar{x}^2$ implica $I(\bar{x}^3) = I(\bar{x}^2)$. Il massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 2 e 3, e quindi $k = \min\{2, 3\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 4) $B = \{2, 5\}$, $y_2 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 e $-A_5$, come mostrato in figura *d*); quindi, $h = 5$. La base è quindi duale non degenere, ma è primale degenere in quanto $I(\bar{x}^4) = \{2, 3, 5\}$. II massimo passo di spostamento lungo la direzione ξ^4 è zero, e si ottiene proprio in corrispondenza del vincolo 3, attivo ma non in base: si esegue quindi un altro cambio di base degenere selezionando $k = 3$.

it. 5) $B = \{2, 3\}$, $y_2 > 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 e A_3, come mostrato in figura *e*); quindi l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima per il primale (in corrispondenza ad una base primale degenere) ed una soluzione ottima per il duale (in corrispondenza ad una base duale non degenere). In effetti la soluzione ottima primale era stata determinata al passo precedente (infatti $\bar{x}^4 = \bar{x}^5$), ma solo nel corso della quinta iterazione viene dimostrata la sua ottimalità esibendo una soluzione duale ammissibile che rispetta con essa le condizioni degli scarti complementari.



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si discuta infine se l'albero individuato sia l'unico albero dei cammini minimi di radice 1.



SVOLGIMENTO
Rinumerando i nodi come segue

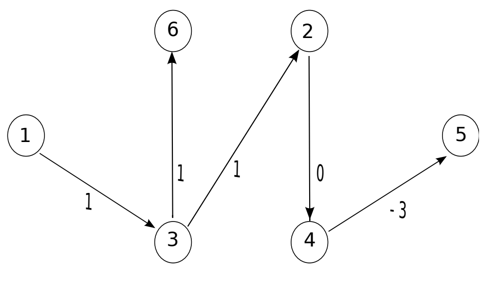
originale	1	2	3	4	5	6
rinumerato	1	4	2	5	6	3

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti, per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo). Nello svolgimento si fa riferimento alla nuova numerazione dei nodi. Inoltre, non viene riportato Q in quanto non utilizzato da SPT.Acyclic.

$$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 5 \times 5 + 1 = 26.$$

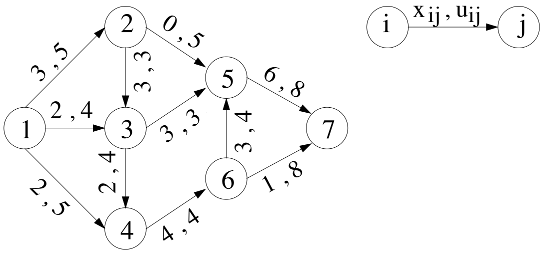
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$
0		*nil*	1	1	1	1	1	0	26	26	26	26	26
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	0	1	3	26	26	5
2	2	*nil*	1	2	2	2	1	0	1	2	2	3	5
3	3	*nil*	1	2	2	2	3	0	1	2	2	3	3
4	4	*nil*	1	2	2	4	3	0	1	2	2	2	3
5	5	*nil*	1	2	2	4	5	0	1	2	2	2	-1

Albero dei cammini minimi individuato (sul grafo originale):



L'albero individuato non è unico. Infatti, l'arco $(6, 2)$ (guardando al grafo originario) soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza, e può sostituire l'arco $(3, 2)$ nell'albero restituito dall'algoritmo.

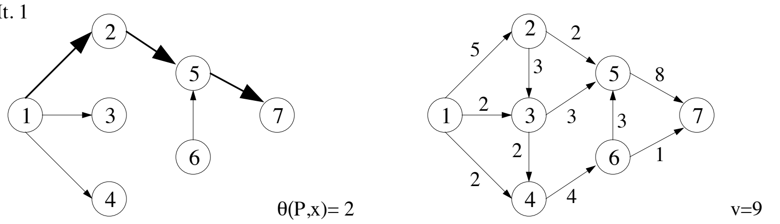
4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 7 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso riportato in figura, di valore $v = 7$. Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine si indichi il taglio di capacità minima restituito dall'algoritmo, specificando l'insieme dei nodi N_s, l'insieme dei nodi N_t e la capacità del taglio. Diminuendo la capacità dell'arco $(2, 5)$ di una unità, di quanto diminuisce il valore del flusso massimo? Giustificare la risposta.



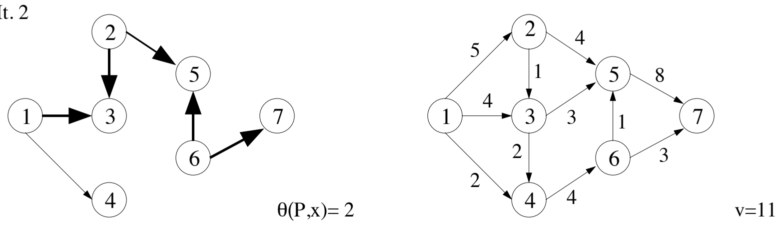
SVOLGIMENTO

Per ogni iterazione viene riportato l'albero della visita, in cui viene evidenziato il cammino aumentante P individuato; viene inoltre indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio di flusso lungo P, trascurando per semplicità gli archi a flusso nullo.

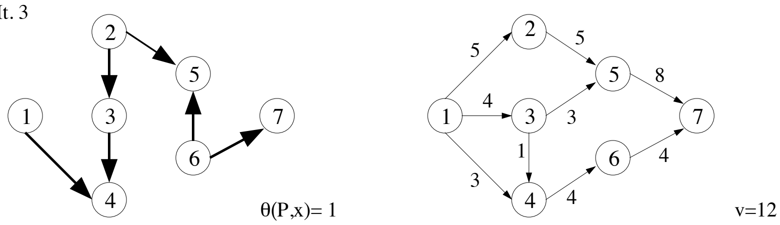
It. 1



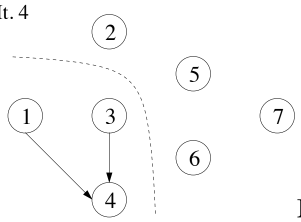
It. 2



It. 3



It. 4



Non esistendo cammini aumentanti, il flusso corrente è massimo ed inoltre il taglio $N_s = \{1, 3, 4\}$, $N_t = \{2, 5, 6, 7\}$ è di capacità minima: $u(N_s, N_t) = 5 + 3 + 4 = 12$.

Diminuendo la capacità dell'arco $(2, 5)$ di una unità, ovvero nel caso in cui $u_{25} = 4$, il valore del flusso massimo diminuisce anch'esso di una unità. Infatti, il flusso di valore 11 ottenuto al termine della seconda iterazione rimane ammissibile anche in questo caso, ma la procedura di visita associata a tale flusso termina senza raggiungere la destinazione ed individuando il taglio $(\{1, 2, 3, 4\}, \{5, 6, 7\})$ di capacità 11. Pertanto, se $u_{25} = 4$ il flusso massimo ha valore 11.

5) Si enunci e si dimostri il Teorema Forte della Dualità.

SVOLGIMENTO L'enunciato del Teorema Forte della Dualità è il seguente. Sia data una coppia (P) e (D) di problemi duali in forma asimmetrica: se (P) e (D) ammettono entrambi soluzioni ammissibili, allora

$$z(P) = \max\{\ cx\ :\ Ax \leq b\ \}\ =\ \min\{\ yb\ :\ yA = c\ ,\ y \geq 0\ \} = z(D)\ .$$

La dimostrazione procede come segue.

Innanzitutto, per il Teorema debole della dualità, poiché (D) ammette soluzioni ammissibili, (P) non può essere (superiormente) illimitato. Essendo non vuoto, (P) ha pertanto ottimo finito e quindi almeno una soluzione ottima, che denotiamo con x^*. Segue che non possono esistere direzioni ξ ammissibili di crescita per x^* (vale in effetti anche l'implicazione inversa).

Se $c = 0$, allora $z(P) = 0$ e $y = 0$, ammissibile per (D), è quindi ottima; in questo caso il Teorema è quindi dimostrato. Assumiamo perciò $c \neq 0$, e denotiamo con I l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x^*. È immediato notare che $I \neq \emptyset$. Infatti, se così non fosse, qualsiasi direzione sarebbe ammissibile per x^*, e quindi in particolare c $(\neq 0)$ sarebbe una direzione ammissibile di crescita.

Consideriamo adesso i sistemi *Primale Ristretto* e *Duale Ristretto* (ovvero primale e duale ristretti ai soli vincoli attivi), che caratterizzano le direzioni ammissibili di crescita per x^*:

$$(P_R)\quad \left\{\begin{array}{rl} A_I\xi & \leq 0 \\ c\xi & > 0 \end{array}\right. \qquad\qquad (D_R)\quad \left\{\begin{array}{ll} y_IA_I & = c \\ y_I & \geq 0. \end{array}\right.$$

Poiché x^* è ottima, il sistema (P_R) non può avere soluzioni. Per il Lemma di Farkas, quindi, il sistema (D_R) ammette almeno una soluzione $\bar{y}_I$. La soluzione $\bar{y} = [\,\bar{y}_I\ ,\ 0\,]$ è pertanto ammissibile per (D), poiché $\bar{y}A = \bar{y}_IA_I = c$ e $\bar{y}_I \geq 0$ implica $\bar{y} \geq 0$.

Infine, è immediato verificare che $\bar{y}$ ed x^* rispettano le *condizioni degli scarti complementari*, in quanto hanno lo stesso valore della funzione obiettivo (rispettivamente duale e primale). Per questo è sufficiente notare che

$$\bar{y}b = \bar{y}_Ib_I = \bar{y}_IA_Ix^* = cx^*$$

dove la seconda uguaglianza deriva dalla definizione di I e la terza dal fatto che $\bar{y}_I$ risolve (D_R). Segue che $\bar{y}$ è ottima per (D), e la tesi segue.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrrrrrrcl} \max & 3x_1 & +5x_2 & +10x_3 & +5x_4 & +10x_5 & +x_6 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +2x_4 & +3x_5 & +2x_6 & \leq & 7 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch&Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 1. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore ed inferiore. Si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si esaminino solamente i primi tre livelli dell'albero delle decisioni (la radice conta come un livello). Al termine si indichi se il problema è stato risolto, oppure quali sono la miglior valutazione superiore ed inferiore disponibili al momento in cui l'esplorazione viene interrotta.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordinamento CUD (Costo Unitario Decrescente) delle variabili è $x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_6$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [0, 0, 1/3, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 18 + 1/3$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 16$. Poiché $\underline{z} = 16 > z = -\infty$, $z = 16$. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_3 = 1}$ $x^* = [0, 0, 1, 0, 1/3, 0]$, $\bar{z} = 13 + 1/3$. Siccome $\bar{z} < z = 16$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_3 = 0}$ $x^* = [0, 1/2, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 17 + 1/2$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 16$. Poiché $\underline{z} = 16 = z = 16$, z non cambia. Siccome $\bar{z} > z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_2.

$\boxed{x_3 = 0,\, x_2 = 1}$ $x^* = [0, 1, 0, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 15$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è a componenti intere, il nodo viene chiuso per ottimalità. Sarebbe comunque stato chiuso dalla valutazione superiore, in quanto $\bar{z} = 15 < z = 16$.

$\boxed{x_3 = x_2 = 0}$ $x^* = [2/3, 0, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = 17$, $\bar{x} = [0, 0, 0, 1, 1, 1]$, $\underline{z} = 16$. Siccome $\bar{z} = 17 > z = 16$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_1.

Poiché il massimo numero di livelli dell'albero è stato raggiunto, l'algoritmo viene interrotto anche se Q non è vuota. L'analisi dell'algoritmo B&B assicura che la valutazione superiore globale è pari a $\max\{\, z \,,\, \max\,\{\, \bar{z}(P') \,:\, P' \in Q' \,\}\,\}$, dove Q' è l'insieme dei predecessori immediati dei nodi in Q. In questo caso Q' contiene il solo nodo $x_3 = x_2 = 0$: pertanto $\bar{z} = 17$, e siccome $z = 16$ il gap relativo a terminazione è $(17 - 16)/16 = 1/16 = 6.25\%$. In effetti con semplici argomentazioni è facile dimostrare che il valore $z = 16$ è ottimo per il problema, e che quindi l'algoritmo ha determinato una soluzione ottima.