RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 10y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & & & & \\ & 2y_1 & - & y_2 & & & - & 3y_4 & = & -1 \\ & 4y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Si verifichi se la soluzione $\bar{y} = [1, 3, 6, 0]$ sia ottima per il problema. Inoltre, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del duale del problema dato, ovvero del problema primale, e l'insieme di tutti i vertici ottimi del poliedro primale. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \max\{\ cx\ :\ Ax \leq b\ \} \qquad\qquad (D) \quad \min\{\ yb\ :\ yA = c\ , y \geq 0\ \}$$

il teorema forte della dualità e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia $\bar{y}$ una soluzione ammissibile per (D). $\bar{y}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{x}$ ammissibile per (P) che sia complementare a $\bar{y}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino le condizioni degli scarti complementari

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0\ .$$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \qquad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcr} \max & -x_1 & + & x_2 & & \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & -2 \\ & -3x_1 & & & \leq & 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 10y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & & & & \\ & 2y_1 & - & y_2 & & & - & 3y_4 & = & -1 \\ & 4y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{y} = [1, 3, 6, 0]$ è ammissibile per (D). L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $\{1, 2, 3\}$. Di conseguenza, una soluzione primale $\bar{x}$ che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve avere $\{1, 2, 3\}$ come indici dei vincoli attivi. Affinché $\bar{x}$ sia ammissibile per (P), essa deve quindi soddisfare il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & = & 10 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 1 \\ & & -x_2 & = & -2 \\ -3x_1 & & & \leq & 0 \end{array} \right.$$

Tale sistema ammette come unica soluzione $\bar{x} = [1, 2]$. $\bar{y} = [1, 3, 6, 0]$ è quindi soluzione ottima per (D), mentre $\bar{x} = [1, 2]$ è soluzione ottima per (P). Essa è inoltre l'unica soluzione ottima di (P) essendo l'unica soluzione ammissibile primale in scarti complementari con $\bar{y}$. Si noti che $\bar{x}$ è soluzione ottima di base, ovvero un vertice del poliedro primale, in quanto la sottomatrice dei vincoli attivi è di rango 2. $\bar{x}$ è quindi l'unico vertice ottimo del poliedro primale.

2) Si risolva il seguente problema di PL applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante, il vettore η_B, il passo di spostamento e l'indice uscente. Si discuta infine come cambierebbe l'esito di risoluzione se il termine noto del secondo vincolo valesse 4 invece di 1. Giustificare tutte le risposte.

$$\begin{array}{lrcrcr} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2 \end{array}$$

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \ \bar{y}_N = 0, \ \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$k = \min\{ \ i \in N : A_i \bar{x} > b_i \ \} = \min\{ \ 3, 5 \ \} = 3 \ \text{[regola anticiclo di Bland]}$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta} = \min\{ \ \bar{y}_i / \eta_i : i \in B, \ \eta_i > 0 \ \} = 1/2, \quad h = \min\{ \ i \in B : \eta_i > 0, \ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i \ \} = 4$$

it. 2) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \ \ \bar{y}_N = 0, \ \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \ k = 5$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \ \ \bar{\theta} = 1, \ \ h = 1$$

it. 3) $B = \{3, 5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \ \bar{y}_N = 0, \ \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

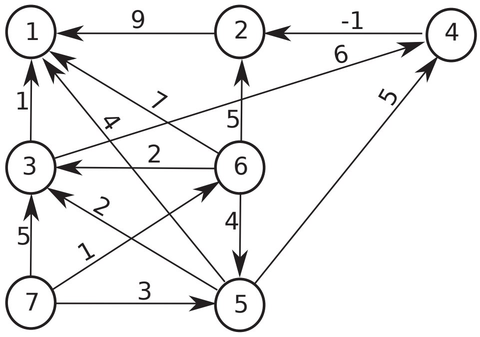
$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \ k = 2$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 & -5/3 \end{bmatrix} \leq 0, \ \ \mathit{STOP}.$$

Poiché $\eta_B \leq 0$ si ha che il problema duale è inferiormente illimitato, e di conseguenza il problema primale è vuoto.

Se il termine noto del secondo vincolo valesse 4 invece di 1 lo svolgimento sarebbe invariato fino alla terza iterazione, in cui si avrebbe $A_2 \bar{x} = [1, -2][2, 0] = 2 \leq 4$, e quindi $A_N \bar{x} \leq b_N$. La base $B = \{3, 5\}$ sarebbe pertanto una base ottima: $\bar{x} = [2, 0]$ sarebbe una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = [0, 0, 1, 0, 1]$ sarebbe una soluzione ottima duale.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 7 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Durante l'algoritmo si esplorino gli archi della stella uscente del nodo selezionato in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si consideri poi il caso in cui il costo dell'arco $(3, 4)$ sia un parametro reale α, e si discuta per quali valori del parametro la soluzione determinata resta un albero dei cammini minimi, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

Rinumerando i nodi come segue

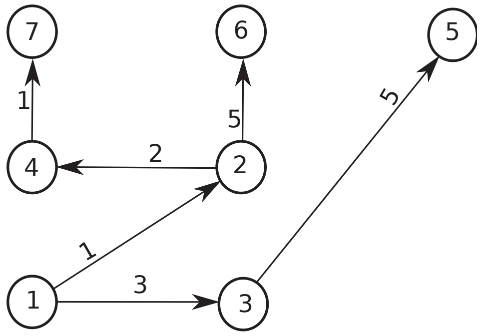
originale	1	2	3	4	5	6	7
rinumerato	7	6	4	5	3	2	1

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo, come in questo caso. Nello svolgimento si utilizzano i nomi dei nodi dopo la rinumerazione, e si riporta solamente il numero dell'iterazione, in quanto all'iterazione i-esima viene selezionato il nodo i; inoltre, non viene usata alcuna struttura dati Q.

$M = (n - 1) \max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 6 \times 9 + 1 = 55.$

it.	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$
0	*nil*	1	1	1	1	1	1	0	55	55	55	55	55	55
1	*nil*	1	1	1	1	1	1	0	1	3	5	55	55	55
2	*nil*	1	1	2	1	2	2	0	1	3	3	55	6	8
3	*nil*	1	1	2	3	2	3	0	1	3	3	8	6	7
4	*nil*	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4
5	*nil*	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4
6	*nil*	1	1	2	3	2	4	0	1	3	3	8	6	4

Albero dei cammini minimi individuato (sul grafo rinumerato):

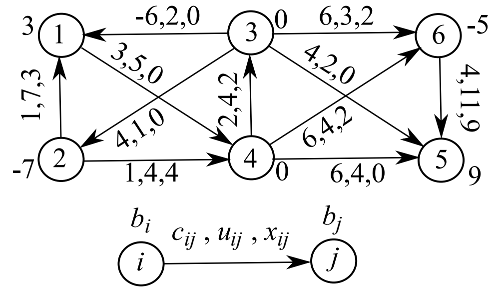


Dopo la rinumerazione, l'arco $(3, 4)$ diviene l'arco $(4, 5)$, che non fa parte dell'albero dei cammini minimi individuato. Se il suo costo fosse un parametro reale α, l'albero rimarrebbe ottimo fintanto che l'arco continua a soddisfare le condizioni di Bellman, ossia

$$d[4] + c_{45} = 3 + \alpha \geq 8 = d[5] \quad \Longrightarrow \quad \alpha \geq 5 \ .$$

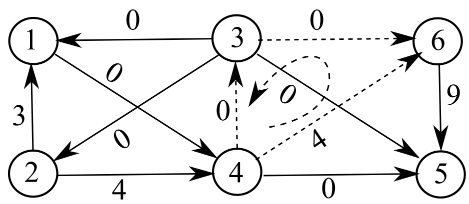
Per $\alpha = 5$, l'arco $(4, 5)$ potrebbe sostituire $(3, 5)$ ottenendo un diverso albero dei cammini minimi, mentre per $\alpha < 5$ l'albero originario non sarebbe più un albero dei cammini minimi.

4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo per l'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 71$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

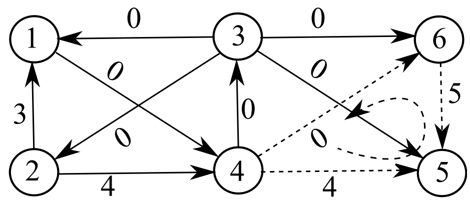


SVOLGIMENTO

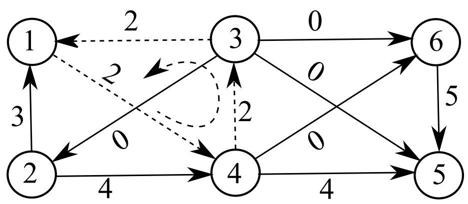
L'algoritmo esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (da sinistra a destra, dall'alto in basso): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La quarta figura, in basso a destra, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione e il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



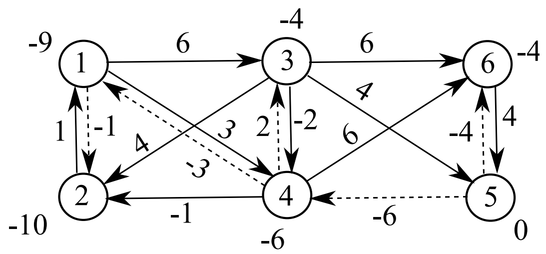
θ= 2, $c(C)$ = -2, cx = 67



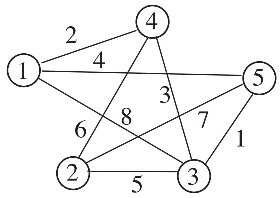
θ = 4, $c(C)$ = -4, cx = 51



θ= 2, $c(C)$= -1, cx = 49



5) Si formuli il problema del Commesso Viaggiatore (TSP), relativamente all'istanza in figura, in termini di Programmazione Lineare Intera. Giustificare la correttezza della formulazione proposta.



SVOLGIMENTO
Introduciamo una variabile binaria per ogni arco presente nel grafo: x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34} e x_{35}.

Nel modello di Programmazione Lineare Intera, ognuna di tali variabili assume il valore 1 se l'arco corrispondente viene selezionato, e 0 altrimenti. Utilizzando tali variabili decisionali, il problema del Commesso Viaggiatore (TSP) per l'istanza in questione, che consiste nel determinare un ciclo Hamiltoniano di costo minimo sul grafo dato, può allora essere formulato nel modo seguente:

$$
(\text{TSP}) \quad
\begin{array}{ll}
\min & 8x_{13} + 2x_{14} + 4x_{15} + 5x_{23} + 6x_{24} + 7x_{25} + 3x_{34} + x_{35} \\
& x_{13} + x_{14} + x_{15} = 2 \\
& x_{23} + x_{24} + x_{25} = 2 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} = 2 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2 \\
& x_{15} + x_{25} + x_{35} = 2 \\
& \sum_{i \in S, j \notin S} x_{ij} \geq 1, \forall \emptyset \neq S \subset \{1,2,3,4,5\} \\
& x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{23}, x_{24}, x_{25}, x_{34}, x_{35} \in \{0,1\}
\end{array}
$$

Il primo blocco di vincoli, uno per nodo, impone che, considerando gli archi (i, j) selezionati, ovvero tali che $x_{ij} = 1$, in ogni nodo del grafo incidano esattamente due archi. Tali vincoli (detti di copertura per cicli) assicurano la copertura dei nodi del grafo mediante una collezione di cicli, ma non garantiscono che la copertura avvenga mediante un ciclo unico.

Il successivo blocco di vincoli (vincoli di connessione) impone che il sottoinsieme di archi selezionati formi una struttura connessa, e di conseguenza garantisce che la copertura dei nodi del grafo avvenga mediante un unico ciclo, ovvero mediante un ciclo Hamiltoniano. Poiché la funzione obiettivo, da minimizzare, rappresenta il costo totale degli archi selezionati, il modello presentato correttamente formula il problema di determinare un ciclo Hamiltoniano di costo minimo (TSP) per l'istanza in figura.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} \max & 6x_1 & +9x_2 & +6x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +x_6 & & \\ & 3x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. L'ordine delle variabili per Costo Unitario Decrescente è $x_2, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 1/3, 0, 0]$, $\bar{z} = 22 + 1/3$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 21$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 21$. Siccome $\bar{z} = 22 + 1/3 > 21 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2, 0]$, $\bar{z} = 22$. $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 21$. Poiché $\underline{z} = 21 = z$, z non cambia. Poiché $\bar{z} = 22 > 21 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_5.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [1, 1, 1/2, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 22$. $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 21$. Poiché $\bar{z} = 22 > 21 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_4 = x_5 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 21 + 1/2$. Si noti che si può porre $\bar{z} = 21$ in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché $\bar{z} = 21 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 0, x_5 = 1}$ $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 21 + 1/2$. Analogamente a prima, si può porre $\bar{z} = 21$. Poiché $\bar{z} = 21 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1, x_3 = 0}$ $x^* = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = \underline{z} = 21$. Il nodo viene chiuso per ottimalità. Poiché $\underline{z} = 21 = z$, potrebbe essere chiuso anche dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1, x_3 = 1}$ $x^* = [1/3, 1, 1, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 21$. Poiché $\underline{z} = 21 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch and Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$, di costo 21.