RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
\min & 4y_1 & + & 4y_2 & + & 4y_3 & + & 2y_4 & - & 2y_5 & & \\
 & & & y_2 & + & 2y_3 & + & y_4 & - & y_5 & = & 1 \\
 & y_1 & - & 2y_2 & + & y_3 & & & + & y_5 & = & 2 \\
 & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & , & y_5 & \geq & 0
\end{array}$$

Si formuli il suo duale, ovvero il problema primale, e lo si risolva applicando l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante, il vettore η_B, il passo di spostamento e l'indice uscente, giustificando le risposte. Al termine, in caso di ottimo finito, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime primali. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il duale del problema dato, a cui va applicato l'algoritmo del Simplesso Duale, è:

$$\begin{array}{rrrrrr}
\max & x_1 & + & 2x_2 & & \\
 & & & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 4 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\
 & x_1 & & & \leq & 2 \\
 & -x_1 & + & x_2 & \leq & -2
\end{array}$$

it. 1) $B = \{1, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$k = \min\{\, i \in N : A_i \bar{x} > b_i \,\} = \min\{\, 3, 5 \,\} = 3 \text{ [regola anticiclo di Bland]}$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i / \eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0 \,\} = 1/2, \quad h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i / \eta_i \,\} = 4$$

it. 2) $B = \{1, 3\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad k = 5$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 1, \quad h = 1$$

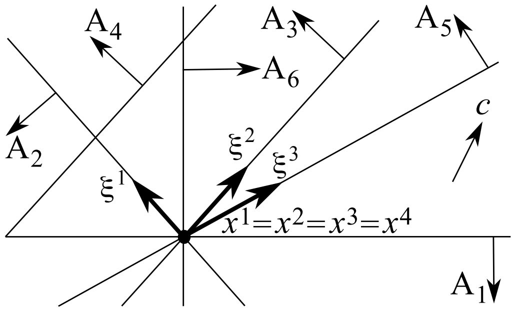
it. 3) $B = \{3, 5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{y}_N = 0, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP.}$$

$B = \{3, 5\}$ è una base ottima: $\bar{x} = [2, 0]$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = [0, 0, 1, 0, 1]$ è una soluzione ottima duale. Osserviamo che $\bar{y}$ è non degenere. Segue che $\bar{x} = [2, 0]$ è l'unica soluzione ottima primale.

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{1, 2\}$; si noti che A_3 e A_4 sono collineari. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale x e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, gli indici uscente ed entrante, e la degenerazione primale e duale, giustificando le risposte. Al termine, se il problema ammette ottimo finito si discuta l'unicità della soluzione ottima sia del primale che del duale, giustificando le risposte.



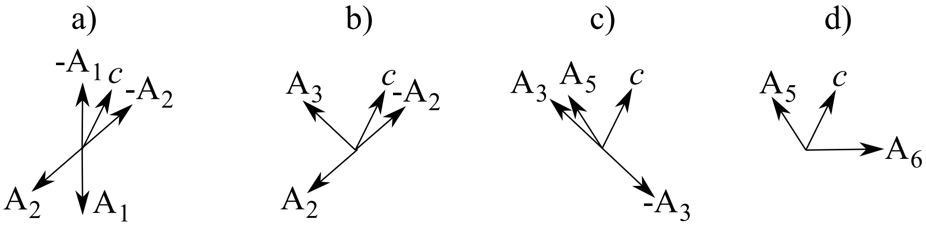
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$. $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e $-A_2$, come mostrato in a). Quindi $h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = \min\{1, 2\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland. La direzione ξ^1 è mostrata in figura. La base è primale degenere, in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ è un sovrainsieme di B, ed è duale non degenere in quanto c è interno al cono generato da $-A_1$ e $-A_2$, ossia non coincide con nessuno dei due generatori. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3 e 5, quindi $k = \min\{3, 5\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland, e si compie un passo degenere. Si noti che anche il vincolo 6 è attivo e non in base, ma non è candidato ad entrarvi in quanto $A_6\xi_1 < 0$.

it. 2) $B = \{2, 3\}$. $y_2 < 0$ e $y_3 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_2$ ed A_3, come mostrato in b). Quindi $h = 2$. La base è ancora primale degenere e duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 5 e 6. Quindi $k = \min\{5, 6\} = 5$ per la regola anticiclo di Bland, e si compie un ulteriore passo degenere. Si noti che anche il vincolo 1 è attivo e non in base, ma non è candidato ad entrarvi in quanto $A_1\xi_2 < 0$.

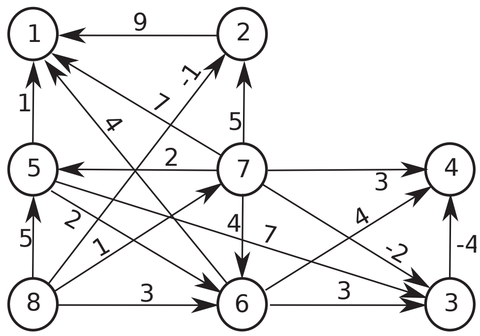
it. 3) $B = \{3, 5\}$. $y_3 < 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_3$ ed A_5, come mostrato in c). Quindi $h = 3$. La base continua ad essere primale degenere e duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del solo vincolo 6, attivo ma non in base: si compie quindi un altro passo degenere. Si noti che anche i vincoli 1 e 2 sono attivi e non in base, ma non sono candidati ad entrarvi in quanto $A_1\xi_3 < 0$ ad $A_2\xi_3 < 0$.

it. 4) $B = \{5, 6\}$. $y_5 > 0$ e $y_6 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_5 ed A_6, come mostrato in d). La base è quindi sia primale che duale ammissibile, e l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima per entrambi i problemi. La base è ancora primale degenere e duale non degenere.



Per discutere l'unicità delle soluzioni ottime consideriamo la degenerazione della base ottima individuata e utilizziamo il teorema degli scarti complementari. Poiché tale base è duale non degenere, la soluzione ottima del primale è unica. In particolare, la soluzione ottima individuata è l'unico punto ammissibile (l'intero poliedro). Per via della degenerazione primale della base ottima la soluzione ottima duale potrebbe invece non essere unica, come in effetti accade. Ad esempio, anche la base $B' = \{3, 6\}$ è sia primale che duale ammissibile, e la corrispondente soluzione di base duale non coincide con la soluzione corrispondente alla base $B = \{5, 6\}$ in quanto sono entrambe duali non degeneri. Pertanto, il problema duale ammette soluzioni ottime alternative.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 8 sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato, i vettori dei predecessori e delle etichette e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si consideri poi il caso in cui il costo dell'arco $(5, 1)$ sia un parametro reale α, e si discuta per quali valori del parametro la soluzione determinata resta un albero dei cammini minimi di radice 8, giustificando la risposta.



SVOLGIMENTO

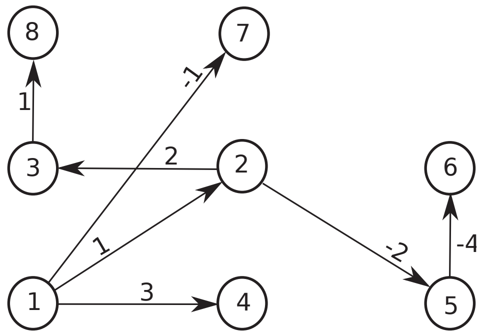
Rinumerando i nodi come segue

originale	1	2	3	4	5	6	7	8
rinumerato	8	7	5	6	3	4	2	1

si dimostra che il grafo è aciclico: infatti per ogni arco (i, j) del grafo rinumerato risulta $i < j$. L'algoritmo più conveniente dal punto di vista computazionale risulta quindi essere SPT.Acyclic, che ha complessità in tempo $O(m)$ (anche in presenza di archi di costo negativo, come in questo caso). Nello svolgimento si utilizzano i nomi dei nodi dopo la rinumerazione, e si riporta solamente il numero dell'iterazione, in quanto all'iterazione i-esima viene selezionato il nodo i. Inoltre, non viene usata alcuna struttura dati Q. $M = (n - 1)\max\{c_{ij} : (i, j) \in A\} + 1 = 7 \times 9 + 1 = 64$.

it.	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$p[8]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$d[8]$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	64	64	64	64	64	64	64
1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	5	3	64	64	-1	64
2	1	1	2	1	2	2	1	2	0	1	3	3	-1	4	-1	8
3	1	1	2	1	2	2	1	3	0	1	3	3	-1	4	-1	4
4	1	1	2	1	2	2	1	3	0	1	3	3	-1	4	-1	4
5	1	1	2	1	2	5	1	3	0	1	3	3	-1	-5	-1	4
6	1	1	2	1	2	5	1	3	0	1	3	3	-1	-5	-1	4
7	1	1	2	1	2	5	1	3	0	1	3	3	-1	-5	-1	4

L'albero dei cammini minimi individuato, sul grafo rinumerato, è:

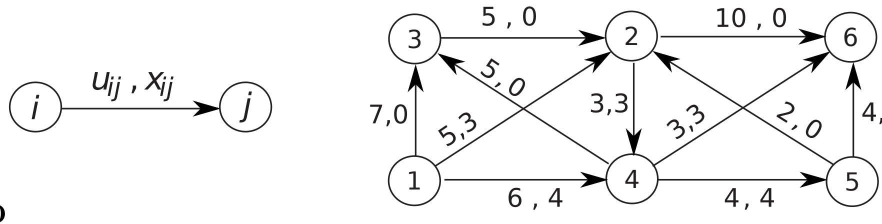


L'arco $(5, 1)$ diventa, dopo la rinumerazione, l'arco $(3, 8)$, che fa parte dell'albero dei cammini minimi. Se il suo costo è un parametro reale α, l'etichetta del nodo 8 è anch'essa dipendente da α: $d[8] = 3 + \alpha$. Nessuna delle etichette degli altri nodi, invece, dipende da α. Pertanto, l'albero rimane ottimo fintanto che tutti gli archi incidenti in 8 continuano a soddisfare le condizioni di Bellman:

$$
\begin{aligned}
d[7] + c_{78} = -1 + 9 \geq 3 + \alpha = d[8] \quad &\Longrightarrow \quad \alpha \leq 5 \\
d[4] + c_{48} = 3 + 4 \geq 3 + \alpha = d[8] \quad &\Longrightarrow \quad \alpha \leq 4 \\
d[2] + c_{28} = 1 + 7 \geq 3 + \alpha = d[8] \quad &\Longrightarrow \quad \alpha \leq 5
\end{aligned}
$$

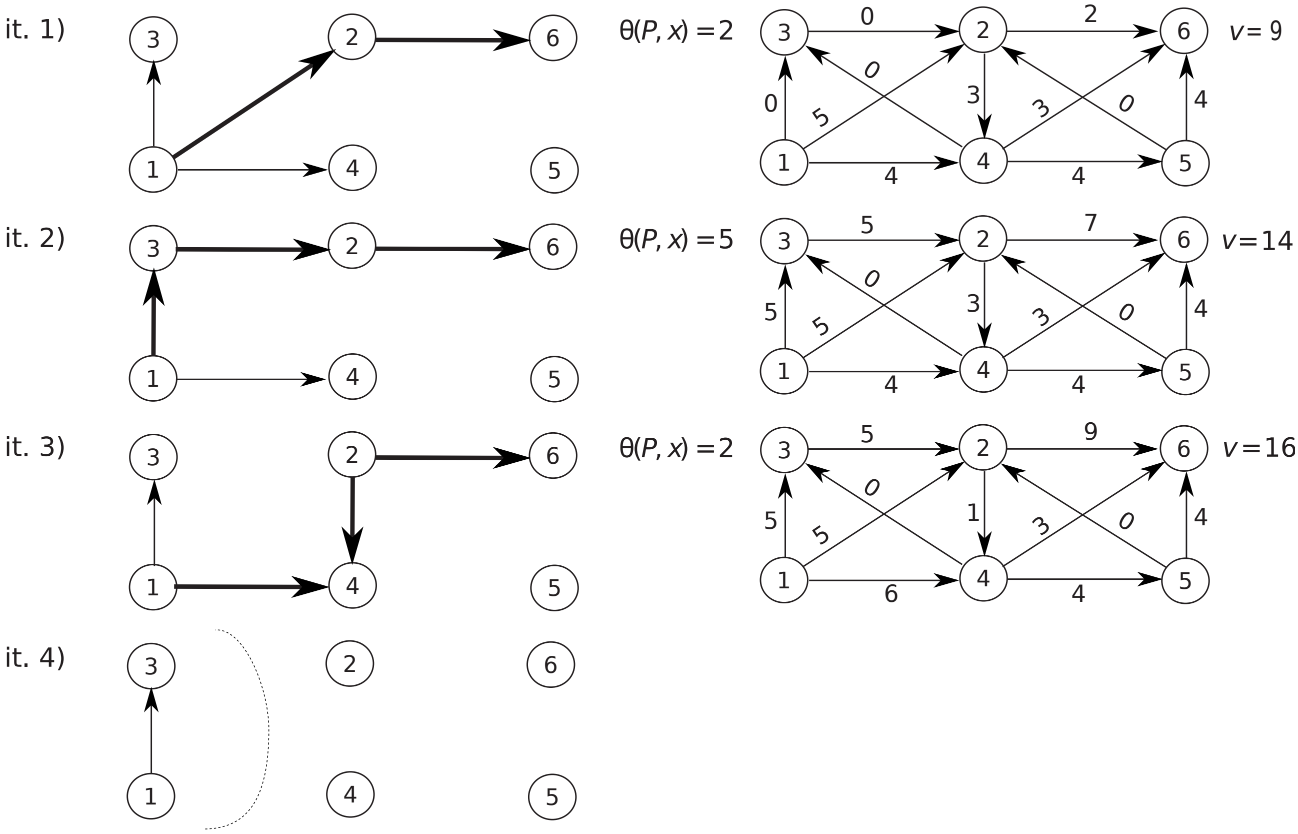
Dunque l'albero rimane un albero dei cammini minimi se e solo se $\alpha \leq 4$. In particolare, per $\alpha = 4$ si potrebbe sostituire l'arco $(3, 8)$ con l'arco $(4, 8)$ ottenendo un diverso albero dei cammini minimi, mentre per $\alpha > 5$ l'albero originario non sarebbe più una soluzione ottima del problema.

4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 7$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). Ad ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, ed il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine come cambierebbero le risposte finali se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità $u_{12} = 6$.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita ed il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{14} + u_{32} = 5 + 6 + 5 = 16 = v$.



Se l'arco $(1, 2)$ avesse capacità $u_{12} = 6$, il flusso non sarebbe più ottimo. Infatti, poiché l'arco $(1, 2)$ appartiene al taglio individuato, la capacità del taglio aumenterebbe al valore $u(N_s, N_t) = 17$, e sarebbe possibile inviare un'ulteriore unità di flusso da 1 a 6 lungo il cammino $\{(1, 2), (2, 6)\}$, ottenendo un nuovo flusso di valore $v = 17$ (e quindi massimo). Il taglio (N_s, N_t) precedentemente individuato rimarrebbe quindi un taglio di capacità minima, e sarebbe individuato dall'algoritmo anche nel nuovo scenario.

5) Si enunci e si dimostri il Teorema Forte della Dualità.

SVOLGIMENTO L'enunciato del Teorema Forte della Dualità è il seguente. Sia data una coppia (P) e (D) di problemi duali in forma asimmetrica: se (P) e (D) ammettono entrambi soluzioni ammissibili, allora

$$z(P) = \max\{\ cx\ :\ Ax \leq b\ \}\ =\ \min\{\ yb\ :\ yA = c\ ,\ y \geq 0\ \} = z(D)\ \ .$$

La dimostrazione procede come segue.

Innanzitutto, per il Teorema debole della dualità, poiché (D) ammette soluzioni ammissibili, (P) non può essere (superiormente) illimitato. Essendo non vuoto, (P) ha pertanto ottimo finito e quindi almeno una soluzione ottima, che denotiamo con x^*. Segue che non possono esistere direzioni ξ ammissibili di crescita per x^* (vale in effetti anche l'implicazione inversa).

Se $c = 0$, allora $z(P) = 0$ e $y = 0$, ammissibile per (D), è quindi ottima; in questo caso il Teorema è quindi dimostrato. Assumiamo perciò $c \neq 0$, e denotiamo con I l'insieme degli indici dei vincoli attivi in x^*. È immediato notare che $I \neq \emptyset$. Infatti, se così non fosse, qualsiasi direzione sarebbe ammissibile per x^*, e quindi in particolare c $(\neq 0)$ sarebbe una direzione ammissibile di crescita.

Consideriamo adesso i sistemi *Primale Ristretto* e *Duale Ristretto* (ovvero primale e duale ristretti ai soli vincoli attivi), che caratterizzano le direzioni ammissibili di crescita per x^*:

$$(P_R)\quad \begin{cases} A_I\xi & \leq 0 \\ c\xi & > 0 \end{cases} \qquad\qquad (D_R)\quad \begin{cases} y_I A_I & = c \\ y_I & \geq 0. \end{cases}$$

Poiché x^* è ottima, il sistema (P_R) non può avere soluzioni. Per il Lemma di Farkas, quindi, il sistema (D_R) ammette almeno una soluzione $\bar{y}_I$. La soluzione $\bar{y} = [\, \bar{y}_I\ ,\ 0\,]$ è pertanto ammissibile per (D), poiché $\bar{y}A = \bar{y}_I A_I = c$ e $\bar{y}_I \geq 0$ implica $\bar{y} \geq 0$.

Infine, è immediato verificare che $\bar{y}$ ed x^* rispettano le *condizioni degli scarti complementari*, in quanto hanno lo stesso valore della funzione obiettivo (rispettivamente duale e primale). Per questo è sufficiente notare che

$$\bar{y}b = \bar{y}_I b_I = \bar{y}_I A_I x^* = cx^*$$

dove la seconda uguaglianza deriva dalla definizione di I e la terza dal fatto che $\bar{y}_I$ risolve (D_R). Segue che $\bar{y}$ è ottima per (D), e la tesi segue.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{lrrrrrrcl} \max & 9x_1 & +6x_2 & +6x_3 & +4x_4 & +2x_5 & +x_6 & & \\ & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 1/3, 0, 0]$, $\bar{z} = 22 + 1/3$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 21$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 21$. Siccome $\bar{z} = 22 + 1/3 > 21 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2, 0]$, $\bar{z} = 22$. $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 21$. Poiché $\underline{z} = 21 = z$, z non cambia. Poiché $\bar{z} = 22 > 21 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_5.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [1, 1, 1/2, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 22$. $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 21$. Poiche $\underline{z} = 21 = z$, z non cambia. Poiché $\bar{z} = 22 > 21 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_4 = x_5 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 21 + 1/2$. Si noti che si può porre $\bar{z} = 21$ in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché $\bar{z} = 21 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 0, x_5 = 1}$ $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 21 + 1/2$. Analogamente a prima, si può porre $\bar{z} = 21$. Poiché $\bar{z} = 21 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1, x_3 = 0}$ $x^* = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = \underline{z} = 21$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, il nodo viene chiuso per ottimalità. Poiché $\underline{z} = 21 = z$, potrebbe essere chiuso anche dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1, x_3 = 1}$ $x^* = [1, 1/3, 1, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 21$. Poiché $\bar{z} = 21 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch and Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$, di costo 21.