RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si risolva il seguente problema di *PL*

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & -2x_1 & + & 2x_2 & & \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ & x_1 & & & \leq & 6 \\ & & & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

applicando l'algoritmo del Simplesso Primale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base e la loro eventuale degenerazione, l'indice uscente, la direzione di crescita, il passo di spostamento e l'indice entrante, giustificando le risposte. In caso di ottimo finito: *i*) si discuta se la soluzione ottima primale individuata sia unica; *ii*) si determini l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it.1) $B = \{3, 4\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = cA_B^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \; , \; \bar{y}_N = 0 \; , \; \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale degenere e duale degenere] $h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = 3$, $B(h) = 1$

$$\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; , \; A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \; , \; J = \{\, i \in N \,:\, A_i \xi > 0 \,\} = \{1, 2, 5\}$$

$$\lambda_i = (b_i - A_i \bar{x})/A_i \xi \; , \; \lambda_1 = 2 \; , \; \lambda_2 = 4 \; , \; \lambda_5 = 0 \; , \; \bar{\lambda} = \min\{\, \lambda_i \,:\, i \in J \,\} = 0$$

$k = \min\{\, i \in J \,:\, \lambda_i = \bar{\lambda} \,\} = 5$ [cambio di base degenere]

it.2) $B = \{4, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \; , \; \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale degenere e duale non degenere] $h = 4$, $B(h) = 1$

$$\xi = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \; , \; A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$J = \{2\} \; , \; \bar{\lambda} = \lambda_2 = 4 \; , \; k = 2$$

it.3) $B = \{2, 5\}$, $A_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix} \; , \; \bar{y} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

[sol. di base primale non degenere e duale degenere]

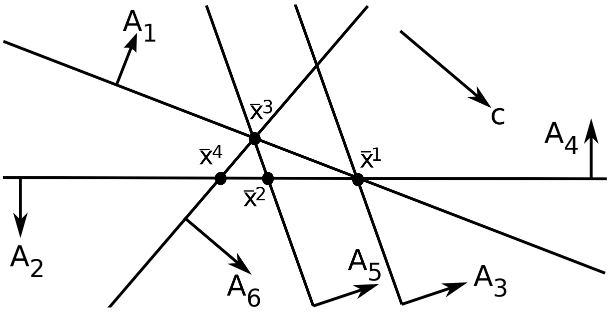
Poiché $y_B \geq 0$ segue che $\bar{x} = (2, 4)$ è una soluzione ottima per il problema dato, mentre $\bar{y} = (0, 2, 0, 0, 0)$ è una soluzione ottima per il suo problema duale. L'esito è quindi ottimo finito.

i) Le soluzioni ottime del problema primale sono tutte e sole le soluzioni, ammissibili per il primale, che soddisfano le condizioni degli scarti complementari con $\bar{y} = (0, 2, 0, 0, 0)$. L'insieme degli indici delle variabili duali positive in $\bar{y}$ è $\{2\}$. Di conseguenza, una soluzione primale che formi con $\bar{y}$ una coppia di soluzioni complementari deve avere il secondo vincolo attivo. Affinché tale soluzione sia ammissibile per (P), essa deve quindi soddisfare il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 12 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\ x_1 & & & \leq & 6 \\ & & x_2 & \leq & 4 \end{array} \right.$$

Posto $x_1 = \alpha$, tale sistema ammette infinite soluzioni della forma $(\alpha, 2 + \alpha)$, per $\alpha \leq 2$. Segue che il problema primale ammette infinite soluzioni ottime della forma $(\alpha, 2 + \alpha)$, per $\alpha \leq 2$. *ii*) Poiché la soluzione ottima primale individuata dall'algoritmo è non degenere, segue che $\bar{y} = (0, 2, 0, 0, 0)$ è l'unica soluzione ottima del problema duale.

2) Si risolva graficamente il problema di *PL* in figura, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Si noti che le tre coppie c e A_6, A_3 e A_5, e A_2 e A_4 sono collineari. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione primale di base (in figura), l'indice entrante k, i segni delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. In caso di ottimo finito si discuta l'unicità delle soluzioni ottime, primale e duale.



SVOLGIMENTO

it. 1): $B = \{1, 2\}$. $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 > 0$ in quanto c è interno a cono(A_1, A_2), come mostrato in figura *a*); la base è quindi duale non degenere, mentre è primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^1) = \{\, 1\,,\, 2\,,\, 3\,,\, 4\,\}$ (anche i vincoli 3 e 4 sono attivi, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^1$ viola i vincoli 5 e 6, pertanto

$$k = \min\{\, i \in N \,:\, A_i\bar{x} > b_i \,\} = \min\{\, 5\,,\, 6\,\} = 5$$

per la regola anticiclo di Bland. Poiché A_5 è interno a cono$(\, A_1\,,\, A_2\,)$, come mostrato in figura *a*), si ha $\eta_1 > 0$ e $\eta_2 > 0$. Per determinare

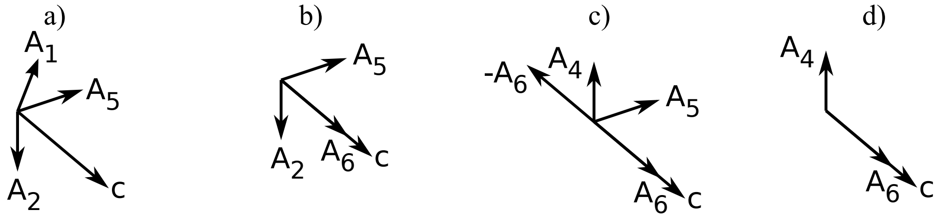
$$\bar{\theta} = \min\{\, \bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0 \,\} \quad \text{e} \quad h = \min\{\, i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i \,\}\ ,$$

si osservi che la base $\{\, 1\,,\, 5\,\}$ non è duale ammissibile, mentre $\{\, 2\,,\, 5\,\}$ lo è. Deve quindi essere necessariamente $h = 1$.

it. 2): $B = \{2, 5\}$. $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è interno a cono(A_2, A_5), come mostrato in figura *b*); la base è quindi ancora duale non degenere, e rimane anche primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^2) = \{\, 2\,,\, 4\,,\, 5\,\}$ (anche il vincolo 4 è attivo, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^2$ viola il solo vincolo 6, pertanto $k = 6$. Poiché A_6 risulta interno a cono(A_2, A_5), si ha che $\eta_2 > 0$ e $\eta_5 > 0$. Inoltre, poiché A_6 è collineare a c, η_2 e η_5 sono multipli di $\bar{y}_2$ e $\bar{y}_5$, e quindi $\bar{y}_2/\eta_2 = \bar{y}_5/\eta_5$. Segue $h = 2$ per la regola anticiclo di Bland.

it. 3): $B = \{5, 6\}$. $\bar{y}_5 = 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è collineare ad A_6 e ha lo stesso verso, come mostrato in figura *c*); pertanto la base è duale degenere, ed è inoltre primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^3) = \{\, 1\,,\, 5\,,\, 6\,\}$ (anche il vincolo 1 è attivo, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^3$ viola il solo vincolo 4, pertanto $k = 4$. A_4 è interno a cono$(A_5, -A_6)$ come mostrato in figura *c*). Pertanto $\eta_5 > 0$ e $\eta_6 < 0$, e quindi necessariamente $h = 5$.

it. 4): $B = \{4, 6\}$. $\bar{y}_4 = 0$ e $\bar{y}_6 > 0$ in quanto c è collineare ad A_6 e ha lo stesso verso, come mostrato in figura *d*); pertanto la base è duale degenere, ed è pure primale degenere poiché $B \subset I(\bar{x}^4) = \{\, 2\,,\, 4\,,\, 6\,\}$ (anche il vincolo 2 è attivo, pur non essendo in base). La soluzione di base primale $\bar{x}^4$ non viola alcun vincolo, e pertanto è ottima per il problema primale, mentre la corrispondente soluzione di base duale è ottima per il problema duale.

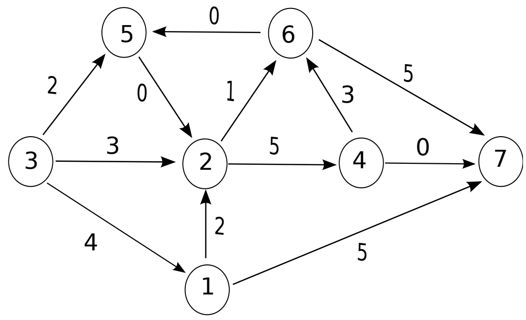


Per discutere l'unicità di $\bar{x}^4$ esaminiamo la degenerazione della base ottima determinata. Essa risulta duale degenere in quanto c è collineare ad A_6, e pertanto la soluzione ottima primale potrebbe non essere unica. Ma questo non è il caso. Infatti, la regione ammissibile primale è una semiretta di estremo $\bar{x}^4$, individuata dalle rette corrispondenti al secondo e al quarto vincolo. Il vettore dei costi c non è ortogonale a tale semiretta, e pertanto non esistono altre soluzioni ottime primali oltre a quella individuata dall'algoritmo.

La base ottima è anche primale degenere, e quindi la soluzione ottima duale potrebbe non essere unica. Questo è in effetti il caso. Infatti, la soluzione ottima duale determinata è tale che $\bar{y}_6 > 0$ e $\bar{y}_i = 0$ per $i \neq 6$. Ma A_2 e A_4 sono collineari di verso opposto: pertanto, assumendo per semplicità (e senza perdita di generalità) che abbiano la stessa norma, ponendo $\tilde{y}_2 = \tilde{y}_4 = 1$ si può ottenere una diversa soluzione duale $\tilde{y} \geq 0$ tale che $\tilde{y}A = c$ (il contributo dei due vettori A_2 e A_4 si annulla reciprocamente). Pertanto, la soluzione ottima duale non è unica.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 3 sul grafo in figura utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.

Nel caso in cui il costo dell'arco $(2, 6)$ fosse un parametro reale ϵ (anzichè valere 1, come in figura), per quali valori di tale parametro l'albero individuato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3? E per quali valori di ϵ tale albero sarebbe l'unico albero dei cammini minimi di radice 3? Giustificare le risposte.



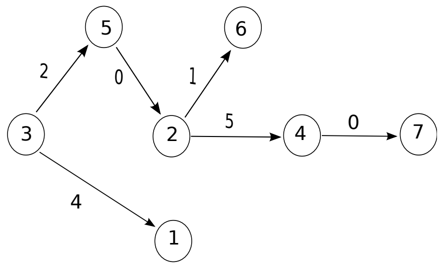
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo $(2, 6, 5)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 6 \times 5 + 1 = 31$.

it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	Q
0		3	3	*nil*	3	3	3	3	31	31	0	31	31	31	31	$\{3\}$
1	3	3	3	*nil*	3	3	3	3	4	3	0	31	2	31	31	$\{1, 2, 5\}$
2	5	3	5	*nil*	3	3	3	3	4	2	0	31	2	31	31	$\{1, 2\}$
3	2	3	5	*nil*	2	3	2	3	4	2	0	7	2	3	31	$\{1, 4, 6\}$
4	6	3	5	*nil*	2	3	2	6	4	2	0	7	2	3	8	$\{1, 4, 7\}$
5	1	3	5	*nil*	2	3	2	6	4	2	0	7	2	3	8	$\{4, 7\}$
6	4	3	5	*nil*	2	3	2	4	4	2	0	7	2	3	7	$\{7\}$
7	7	3	5	*nil*	2	3	2	4	4	2	0	7	2	3	7	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



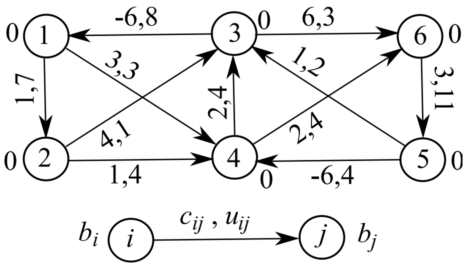
Se il costo dell'arco $(2, 6)$ fosse pari a un parametro reale ϵ, l'albero in figura continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3 per tutti e soli i valori di ϵ che garantiscono il soddisfacimento delle condizioni di ottimalità di Bellman. Si osservi che, in tal caso, si avrebbe $d(6) = 2 + \epsilon$. Occorrerebbe quindi garantire che, per tutti gli archi esterni all'albero, ed incidenti il nodo 6, tali condizioni continuino ad essere rispettate:

- (4,6): $d(4) + 3 \geq d(6)$, ovvero $10 \geq 2 + \epsilon$ ovvero $\epsilon \leq 8$
- (6,5): $d(6) + 0 \geq d(5)$, ovvero $2 + \epsilon \geq 2$ ovvero $\epsilon \geq 0$
- (6,7): $d(6) + 5 \geq d(7)$, ovvero $7 + \epsilon \geq 7$ ovvero $\epsilon \geq 0$

Segue che l'albero determinato continuerebbe ad essere un albero dei cammini minimi di radice 3 se e solo se $0 \leq \epsilon \leq 8$.

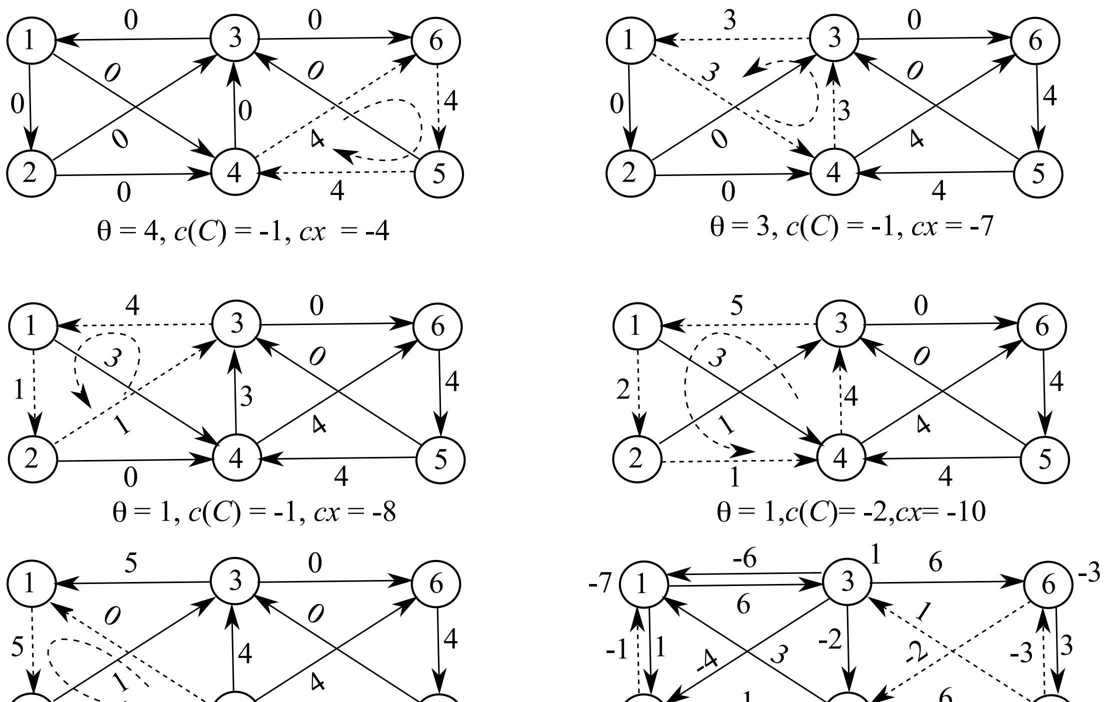
Per $\epsilon = 8$ le condizioni di Bellman relative all'arco $(4, 6)$ varrebbero in forma di uguaglianza e $(4, 6)$ potrebbe sostituire $(2, 6)$ nell'albero, ottenendo un albero dei cammini minimi alternativo. Per $\epsilon = 0$, le condizioni di Bellman varrebbero in forma di uguaglianza per gli archi $(6, 5)$ e $(6, 7)$: $(6, 7)$ potrebbe sostituire $(4, 7)$ nell'albero, ottenendo un albero dei cammini minimi alternativo, mentre $(6, 5)$ non potrebbe sostituire $(3, 5)$ in quanto si otterrebbe una struttura non connessa. Segue che l'albero determinato sarebbe l'unico albero dei cammini minimi di radice 3 per $0 < \epsilon < 8$ (si osservi che, per gli archi non incidenti il nodo 6, le condizioni di Bellman valgono in forma di disuguaglianza stretta).

4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo, per l'istanza in figura, utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso nullo. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima. Giustificare le risposte.



SVOLGIMENTO

Si osservi che l'istanza ha tutti i bilanci nulli, ovvero si tratta di un problema *di circolazione*. Per tale motivo il flusso nullo, di costo zero, è una soluzione ammissibile. A partire da questa soluzione, l'algoritmo esegue cinque iterazioni, illustrate dalle prime cinque figure (da sinistra a destra, dall'alto in basso): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La sesta figura, in basso a destra, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione e il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



5) Data la coppia asimmetrica di problemi di *PL*

$$(\text{P}) \max\{cx : Ax \leq b\} \qquad \text{e} \qquad (\text{D}) \min\{yb : yA = c, y \geq 0\},$$

dimostrare che, se durante un'iterazione dell'algoritmo del Simplesso Primale si ottiene $A_N\xi \leq 0$, dove ξ è la direzione determinata dall'algoritmo nel corso dell'iterazione, allora (D) risulta vuoto.

SVOLGIMENTO

La direzione determinata dall'algoritmo è definita dalla formula $\xi = -A_B^{-1}u_{B(h)}$, dove A_B è la matrice di base corrente, h è l'indice uscente dalla base, $B(h)$ è la posizione dell'indice h in B, e $u_{B(h)}$ è il vettore che ha tutte le componenti nulle salvo quella in posizione $B(h)$, che vale 1.

Per definizione, la direzione ξ è tale che $A_i\xi = 0$, per ogni $i \in B \setminus \{h\}$, mentre $A_h\xi = -1$. Inoltre, la variabile di base duale $\bar{y}_h$, corrispondente all'indice h uscente di base, è negativa, cioè:

$$\bar{y}_h = cA_B^{-1}u_{B(h)} < 0.$$

La direzione ξ è di crescita per il problema (P), in quanto:

$$c\xi = -cA_B^{-1}u_{B(h)} = -\bar{y}_h > 0.$$

Inoltre, le proprietà della direzione ξ sopra mostrate e l'ipotesi $A_N\xi \leq 0$ implicano $A\xi \leq 0$.

Indicando con $\bar{x}$ la soluzione di base primale associata alla base corrente B, si consideri $x(\lambda) = \bar{x} + \lambda\xi$, ovvero il fascio di soluzioni primali, parametriche in λ, ottenute spostandosi da $\bar{x}$ lungo la direzione ξ. Essendo $A\xi \leq 0$, tali soluzioni risultano ammissibili per ogni valore $\lambda \geq 0$. Infatti:

$$Ax(\lambda) = A\bar{x} + \lambda A\xi \leq A\bar{x} \leq b, \ \ \forall\lambda \geq 0,$$

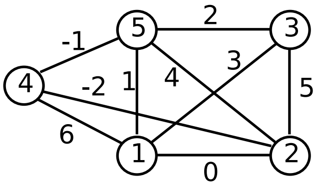
in quanto B è una base primale ammissibile.

Inoltre, essendo $c\xi > 0$, il valore della funzione obiettivo in corrispondenza del fascio di soluzioni ammissibili $x(\lambda)$ cresce al crescere di λ:

$$cx(\lambda) = c\bar{x} + \lambda c\xi \to \infty \text{ per } \lambda \to \infty.$$

(P) risulta quindi superiormente illimitato e di conseguenza, per il Teorema Debole della Dualità, (D) risulta vuoto.

6) Si risolva l'istanza di TSP in figura mediante un algoritmo Branch and Bound che usa il rilassamento MS1T, nessuna euristica, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di archi dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo) e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali lati. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visiti l'albero delle decisioni in modo depth-first, ossia si implementi Q come una pila (o stack). Considerando il caso $r = 3$, si inseriscano in Q i figli del nodo i selezionato, avente grado 3 nell'MS1T, in ordine decrescente di j, dove (i, j) è l'arco la cui variabile è fissata a zero. Si ricordi che, essendo Q una pila, i nodi vengono estratti in ordine inverso rispetto a quello di inserzione. Giustificare le risposte.



SVOLGIMENTO Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate.

Inizializzazione: La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = +\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 0$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano, non si è determinata alcuna soluzione ammissibile: essendo $\underline{z} = 0 < \infty = z$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 5 (che ha tre archi incidenti) e creare tre figli, in ciascuno dei quali si fissa a zero la variabile corrispondente a uno di tali archi; per la strategia di visita stabilita, si inseriscono in Q, nell'ordine, $(5, 4)$, $(5, 3)$ e $(5, 1)$ (essendo Q una pila, verranno estratti nell'ordine inverso).

$\boxed{x_{51} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 2$, è mostrato in (b). Poiché è un ciclo Hamiltoniano, si pone $z = 2$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{53} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 1$, è mostrato in (c). Poiché $\underline{z} = 1 < 2 = z$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il vertice 1 (che ha tre archi incidenti), e creare tre figli fissando a zero, rispettivamente, la variabile relativa agli archi $(1, 5)$, $(1, 3)$ e $(1, 2)$.

$\boxed{x_{53} = 0,\ x_{12} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 5$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 5 > 2 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{53} = 0,\ x_{13} = 0}$ Poiché il nodo 3 ha un solo arco incidente nel grafo corrispondente al nodo, non può esistere nessun ciclo Hamiltoniano e il nodo viene chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{53} = 0,\ x_{15} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 4$, è mostrato in (e). Poiché $\underline{z} = 4 > 2 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{54} = 0}$ Il corrispondente MS1T, con $\underline{z} = 4$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 4 > 2 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo termina. La soluzione ammissibile determinata, di costo $z = 2$, è una soluzione ottima del problema.