RICERCA OPERATIVA (a.a. 2018/19)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & -2 \\ & -3x_1 & & & \leq & 0 \end{array}$$

Si verifichi se la soluzione $\bar{x} = [1, 2]$ sia ottima per il problema. Inoltre, si specifichi se $\bar{x}$ sia una soluzione di base, discutendone l'eventuale degenerazione. Infine, nel caso $\bar{x}$ sia ottima, si individui l'insieme di tutte le soluzioni ottime del problema duale di quello dato. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Considerando la coppia asimmetrica di problemi duali

$$(P) \quad \max\{\, cx \;:\; Ax \leq b \,\} \qquad\qquad (D) \quad \min\{\, yb \;:\; yA = c \,, y \geq 0 \,\}$$

il teorema forte della dualità e il teorema degli scarti complementari garantiscono la seguente caratterizzazione dell'ottimalità primale:

Proposizione. Sia $\bar{x}$ una soluzione ammissibile per (P). $\bar{x}$ è ottima se e solo se esiste una soluzione $\bar{y}$ ammissibile per (D) complementare a $\bar{x}$, ovvero tale che $\bar{x}$ e $\bar{y}$ verifichino le condizioni degli scarti complementari

$$\bar{y}(b - A\bar{x}) = 0 \ .$$

Per l'ammissibilità delle soluzioni $\bar{x}$ e $\bar{y}$, le condizioni degli scarti complementari sono equivalenti al sistema di equazioni

$$\bar{y}_i(b_i - A_i\bar{x}) = 0 \qquad i = 1, ..., m.$$

Per il problema in esame si ha:

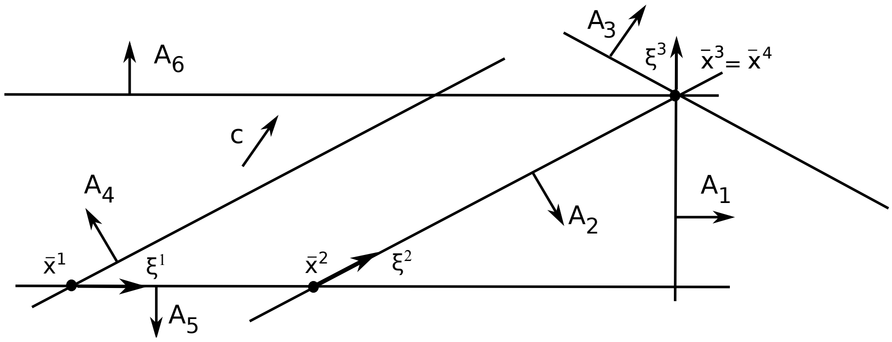
$$(P) \quad \begin{array}{rrcrcr} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ & & & -x_2 & \leq & -2 \\ & -3x_1 & & & \leq & 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{rrcrcrcrcr} \min & 10y_1 & + & y_2 & - & 2y_3 & & & & \\ & 2y_1 & - & y_2 & & & - & 3y_4 & = & 1 \\ & 4y_1 & + & y_2 & - & y_3 & & & = & 1 \\ & y_1 & , & y_2 & , & y_3 & , & y_4 & \geq & 0 \end{array}$$

È immediato verificare che la soluzione $\bar{x} = [1, 2]$ è ammissibile per (P). L'insieme degli indici dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è $I(\bar{x}) = \{i \in \{1, \ldots, m\} : A_i\bar{x} = b_i\} = \{1, 2, 3\}$. Di conseguenza, una soluzione duale $\bar{y}$, tale che $\bar{y}A = c$, che formi con $\bar{x}$ una coppia di soluzioni complementari deve soddisfare le condizioni $\bar{y}_4 = 0$. Affinché $\bar{y}$ sia ammissibile per (D), essa deve soddisfare il sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 2y_1 & - & y_2 & & & = & 1 \\ 4y_1 & + & y_2 & - & y_3 & = & 1 \\ y_1 & , & y_2 & , & y_3 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Posto $y_1 = \alpha$, il sistema di equazioni ammette infinite soluzioni della forma $[\alpha, 2\alpha - 1, 6\alpha - 2]$. $\bar{y}(\alpha) = [\alpha, 2\alpha - 1, 6\alpha - 2, 0]$ ha componenti non negative per $\alpha \geq 1/2$. Pertanto $\bar{x}$ è soluzione ottima di (P), e $\bar{y}(\alpha)$, per $\alpha \geq 1/2$, è l'insieme delle soluzioni ottime di (D). Infine, poiché la sottomatrice dei vincoli attivi in $\bar{x}$ è di rango 2, segue che $\bar{x}$ è una soluzione di base (ammissibile). È degenere in quanto $|I(\bar{x})| = 3 > 2$.

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $B = \{4, 5\}$. Si osservi che c e A_3 sono collineari. Per ogni iterazione si forniscano la base, la soluzione di base primale $\bar{x}$ e la direzione di spostamento ξ (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, e gli indici uscente ed entrante, giustificando le risposte. Alla fine, se l'algoritmo termina con esito ottimo finito, si discuta l'unicità delle soluzioni ottime determinate, sia primale che duale.



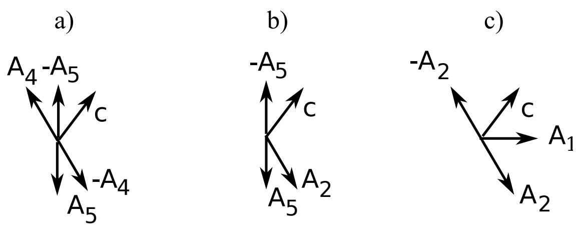
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{4, 5\}$: $\bar{y}_4 < 0$ e $\bar{y}_5 < 0$ poiché c appartiene (è interno) al cono generato da $-A_4$ e $-A_5$, come mostrato in *a*). Quindi $h = 4$ per la regola anticiclo di Bland. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del solo vincolo 2, quindi $k = 2$.

it. 2) $B = \{2, 5\}$: $\bar{y}_2 > 0$ e $\bar{y}_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_2 ed $-A_5$, come mostrato in *b*), quindi $h = 5$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 1, 3 e 6: quindi $k = 1$ per la regola anticiclo di Bland.

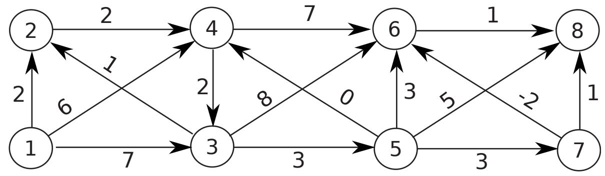
it. 3) $B = \{1, 2\}$: $\bar{y}_1 > 0$ e $\bar{y}_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_1 e $-A_2$, come mostrato in *c*), quindi $h = 2$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3 e 6: quindi $k = 3$ per la regola anticiclo di Bland. Essendo tale passo uguale a zero, si esegue un cambio di base degenere.

it. 4) $B = \{1, 3\}$: $\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_3 > 0$ in quanto c e A_3 sono collineari, quindi l'algoritmo termina individuando in $\bar{x}^4$ una soluzione ottima del problema primale (si osservi che tale soluzione ottima era già stata individuata all'iterazione precedente).



La soluzione ottima primale è unica, come si può verificare per via geometrica. Per discutere l'unicità della soluzione ottima duale osserviamo che la soluzione ottima primale è degenere. In particolare, anche la base $B' = \{1, 6\}$ induce la soluzione di base primale $\bar{x}_4$ ed è duale ammissibile. La soluzione di base duale corrispondente a B' è quindi anch'essa ottima, ed è diversa da quella corrispondente alla base B perché in quest'ultima $\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_3 > 0$, mentre nella soluzione duale corrispondente a B' la prima e la sesta componente sono positive, mentre la terza componente è nulla. Pertanto la soluzione ottima duale non è unica.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si indichino il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q (se utilizzato). Si esaminino gli archi della stella uscente in ordine crescente del nodo testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. La soluzione ottima ottenuta è unica? Giustificare la risposta.



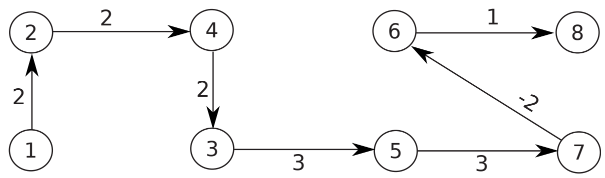
SVOLGIMENTO

Poiché il grafo presenta cicli (es. $(2, 4, 3, 2)$) ed archi di costo negativo, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo risulta essere SPT.L.Queue, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$$M = (n-1)\max\{c_{ij} : (i,j) \in A\} + 1 = 8 \times 7 + 1 = 57.$$

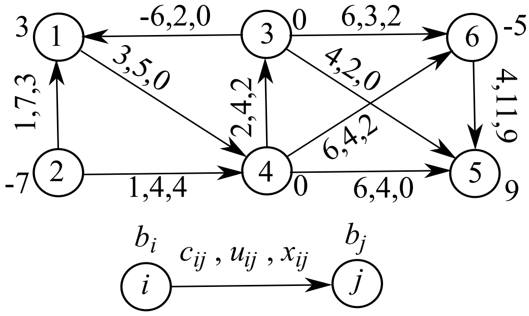
		$p[\cdot]$								$d[\cdot]$								
it.	u	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	1	1	0	57	57	57	57	57	57	57	(1)
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	1	1	0	2	7	6	57	57	57	57	$(2,3,4)$
2	2	*nil*	1	1	2	1	1	1	1	0	2	7	4	57	57	57	57	$(3,4)$
3	3	*nil*	1	1	2	3	3	1	1	0	2	7	4	10	15	57	57	$(4,5,6)$
4	4	*nil*	1	4	2	3	4	1	1	0	2	6	4	10	11	57	57	$(5,6,3)$
5	5	*nil*	1	4	2	3	4	5	5	0	2	6	4	10	11	13	15	$(6,3,7,8)$
6	6	*nil*	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	10	11	13	12	$(3,7,8)$
7	3	*nil*	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	9	11	13	12	$(7,8,5)$
8	7	*nil*	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	9	11	13	12	$(8,5)$
9	8	*nil*	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	9	11	13	12	(5)
10	5	*nil*	1	4	2	3	4	5	6	0	2	6	4	9	11	12	12	(7)
11	7	*nil*	1	4	2	3	7	5	6	0	2	6	4	9	10	12	12	(6)
12	6	*nil*	1	4	2	3	7	5	6	0	2	6	4	9	10	12	11	(8)
13	8	*nil*	1	4	2	3	7	5	6	0	2	6	4	9	10	12	11	$\emptyset$

L'albero dei cammini minimi individuato è:



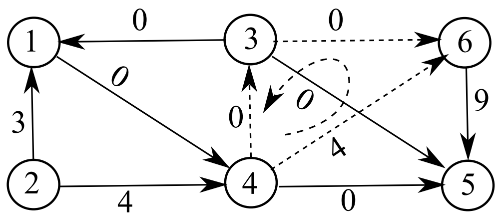
La soluzione ottima è unica. Infatti ogni arco non appartenente all'albero individuato soddisfa le condizioni di Bellman in forma di disuguaglianza stretta.

4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo per l'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 71$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

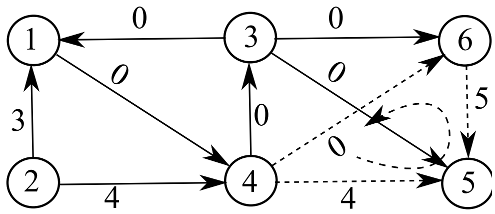


SVOLGIMENTO

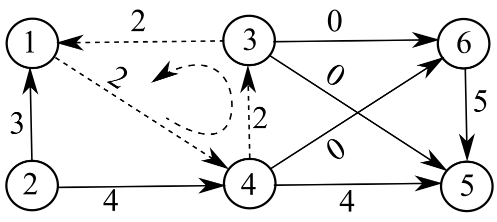
L'algoritmo esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (da sinistra a destra, dall'alto in basso): in ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La quarta figura, in basso a destra, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione e il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



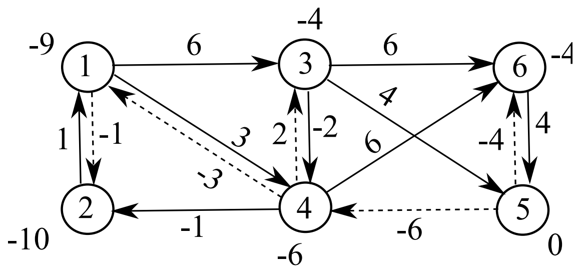
$\theta = 2$, $c(C) = -2$, $cx = 67$



$\theta = 4$, $c(C) = -4$, $cx = 51$



$\theta = 2$, $c(C) = -1$, $cx = 49$



5) Si consideri un problema di ottimizzazione della forma

$$(P) \qquad z(P) = \min \{\ c(x)\ :\ x \in F\ \}. \tag{1}$$

Si consideri inoltre il problema

$$(\bar{P}) \qquad z(\bar{P}) = \min \{\ \bar{c}(x)\ :\ x \in \bar{F}\ \}. \tag{2}$$

Si specifichi quali proprietà deve soddisfare $(\bar{P})$ per poter essere definito un rilassamento del problema (P). Data una soluzione ottima x^* di $(\bar{P})$, si indichino inoltre condizioni che garantiscono che x^* sia pure soluzione ottima di (P), dimostrando quanto affermato.

SVOLGIMENTO

Per definizione, $(\bar{P})$ è un rilassamento del problema (P) se soddisfa le seguenti proprietà:

1. $F \subseteq \bar{F}$;
2. $\bar{c}(x) \leq c(x)$ per ogni $x \in F$.

In altre parole, $(\bar{P})$ è un rilassamento di (P) se ammette tutte le soluzioni di (P) come ammissibili e se, sull'insieme F, la sua funzione obiettivo è un'approssimazione inferiore della funzione obiettivo di (P). È immediato verificare che il valore ottimo di $(\bar{P})$ fornisce una *valutazione inferiore* del valore ottimo di (P), ossia $z(\bar{P}) \leq z(P)$.

Sotto alcune condizioni, il rilassamento $(\bar{P})$ permette di risolvere il problema (P). Questo accade in particolare se la soluzione ottima x^* di $(\bar{P})$ è tale che $x^* \in F$ e $\bar{c}(x^*) = c(x^*)$, ossia x^* è ammissibile per il problema (P) e la funzione obiettivo $\bar{c}$ ha in x^* lo stesso valore della funzione obiettivo c. In questo caso, infatti, x^* è pure soluzione ottima di (P) in quanto

$$\bar{c}(x^*) = z(\bar{P}) \leq z(P) \leq c(x^*) = \bar{c}(x^*),$$

ossia x^* fornisce sia una valutazione inferiore che una valutazione superiore del valore ottimo $z(P)$, e le due coincidono.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} \max & 13x_1 & +9x_2 & +10x_3 & +7x_4 & +4x_5 & +3x_6 & & \\ & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo breadth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché.

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta ad ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili sono già ordinate per Costo Unitario Decrescente.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 1/3, 0, 0]$, $\bar{z} = 34 + 1/3$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 32$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 32$. Siccome $\bar{z} = 34 + 1/3 > 21 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2, 0]$, $\bar{z} = 34$. $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 32$. Poiché $\underline{z} = 32 = z$, z non cambia. Poiché $\bar{z} = 34 > 32 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_5.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [1, 1, 1/2, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 34$. $\bar{x} = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\underline{z} = 33$. Poiche $\underline{z} = 33 > z$, $z = 33$. Poiché $\bar{z} = 34 > 33 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_3.

$\boxed{x_4 = x_5 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 33 + 1/2$. Si noti che si può porre $\bar{z} = 33$ in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché $\bar{z} = 33 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 0, x_5 = 1}$ $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 1, 0]$, $\bar{z} = 33 + 1/2$. Analogamente a prima, si può porre $\bar{z} = 33$. Poiché $\bar{z} = 33 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1, x_3 = 0}$ $x^* = [1, 1, 0, 1, 1, 0]$, $\bar{z} = \underline{z} = 33$. Poiché la soluzione ottima del rilassamento continuo è intera, il nodo viene chiuso per ottimalità. Poiché $\underline{z} = 33 = z$, potrebbe essere chiuso anche dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1, x_3 = 1}$ $x^* = [1, 1/3, 1, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 33$. Poiché $\bar{z} = 33 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch and Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 0, 1, 1, 0]$, di costo 33.