RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il seguente problema di PL:

$$\begin{array}{rrcrcl} \max & x_1 & + & 2x_2 & & \\ & & & x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 & & & \leq & 2 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 5 \\ & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

Si applichi l'algoritmo del Simplesso Duale, per via algebrica, a partire dalla base $B = \{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino: la base, la matrice di base e la sua inversa, la coppia di soluzioni di base, l'indice entrante k, il vettore η_B, il passo $\bar{\theta}$ e l'indice uscente h, giustificando le risposte. Si consideri quindi il caso in cui il costo della variabile x_2 sia 1 invece che 2 e, in caso di ottimo finito, si discuta se la soluzione ottima primale individuata continui a restare ottima per il primale modificato; si individui inoltre l'insieme delle soluzioni ottime, sia primali che duali, per la coppia modificata. Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = c A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$k = \min\{\ i \in N : A_i \bar{x} > b_i\ \} = \min\{\ 4, 5\ \} = 4 \text{ [regola anticiclo di Bland]},$$

$$\eta_B = A_k A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\theta} = \min\{\ \bar{y}_i/\eta_i : i \in B,\ \eta_i > 0\ \} = 1/2, \quad h = \min\{\ i \in B : \eta_i > 0,\ \bar{\theta} = \bar{y}_i/\eta_i\ \} = 2$$

it. 2) $B = \{1, 4\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} \not\leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad k = 5,$$

$$\eta_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} = 1, \quad h = 4$$

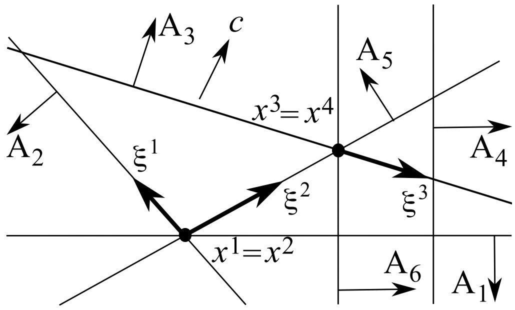
it. 3) $B = \{1, 5\}$: $A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_B^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$$\bar{y}_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \bar{y}_N = 0, \ \bar{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_N \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix} \leq b_N = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \textit{STOP.}$$

Poiché $A_N \bar{x} \leq b_N$, $\bar{x} = (0, 4)$ è una soluzione ottima primale, mentre $\bar{y} = (1, 0, 0, 0, 1)$ è una soluzione ottima duale. Se il costo di x_2 valesse 1 invece che 2, la base $B = \{1, 5\}$ resterebbe primale ammissibile, e continuerebbe a essere duale ammissibile in quanto si avrebbe $\bar{y}_B = (0, 1)$: $\bar{x} = (0, 4)$ sarebbe quindi una soluzione ottima per il primale modificato. Si osservi che $\bar{x} = (0, 4)$ è una soluzione di base primale non degenere: segue che $\bar{y} = (0, 0, 0, 0, 1)$ è l'unica soluzione ottima del duale modificato. Poiché $\bar{y} = (0, 0, 0, 0, 1)$ è degenere, invece, la soluzione ottima del primale modificato potrebbe non essere unica. Infatti, essendo $\bar{y}_5 > 0$, per il Teorema degli scarti complementari le soluzioni ottime del primale modificato sono tutte e sole le soluzioni primali ammissibili tali che il quinto vincolo è attivo, ovvero $x_1 + x_2 = 4$. Si tratta dell'insieme di soluzioni aventi forma $(\alpha, 4 - \alpha)$, $0 \leq \alpha \leq 2$.

2) Si risolva geometricamente, per mezzo dell'algoritmo del Simplesso Primale, il problema di PL in figura a partire dalla base $\{1, 2\}$. Per ogni iterazione si indichino la base, la soluzione di base primale e la direzione di crescita (riportandoli direttamente sulla figura), il segno delle variabili duali in base, gli indici uscente ed entrante, e si discuta la degenerazione primale e duale, giustificando le risposte. Al termine, se il problema ammette ottimo finito, si discuta l'unicità della soluzione ottima sia primale che duale, giustificando le risposte.



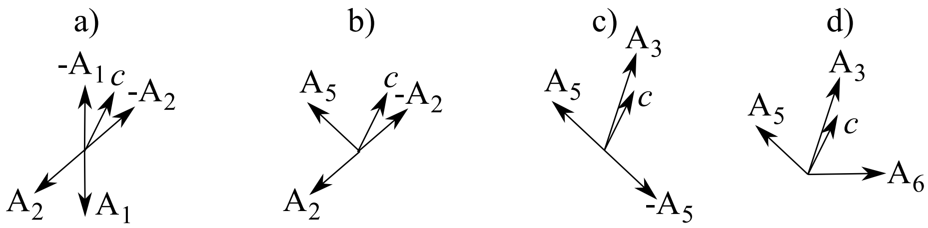
SVOLGIMENTO

it. 1) $B = \{1, 2\}$. $y_1 < 0$ e $y_2 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_1$ e $-A_2$, come mostrato in a); quindi $h = \min\{\, i \in B \,:\, y_i < 0 \,\} = \min\{1, 2\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland. La direzione di crescita ξ^1 è mostrata in figura. La base è primale degenere in quanto $I(x^1) = \{1, 2, 5\}$ include B, ed è duale non degenere in quanto c è interno al cono generato da $-A_1$ e $-A_2$. Il massimo passo lungo la direzione ξ^1 si ottiene in corrispondenza del vincolo 5, attivo ma non in base: quindi $k = 5$ e si compie un cambio di base degenere.

it. 2) $B = \{2, 5\}$. $y_2 < 0$ e $y_5 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da $-A_2$ ed A_5, come mostrato in b); quindi $h = 2$. La base è ancora primale degenere, ed è duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^2 si ottiene in corrispondenza dei vincoli 3 e 6, quindi $k = \min\{3, 6\} = 3$ per la regola anticiclo di Bland.

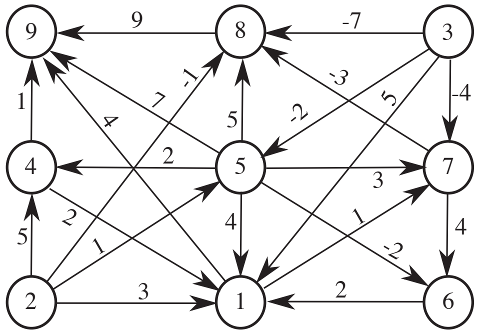
it. 3) $B = \{3, 5\}$. $y_3 > 0$ e $y_5 < 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_3 e $-A_5$, come mostrato in c); quindi $h = 5$. La base è nuovamente primale degenere in quanto $I(x^3) = \{3, 5, 6\}$ include B, e duale non degenere. Il massimo passo lungo la direzione ξ^3 si ottiene in corrispondenza del solo vincolo 6, attivo ma non in base: si compie quindi un altro cambio di base degenere.

it. 4) $B = \{3, 6\}$. $y_3 > 0$ e $y_6 > 0$ poiché c appartiene al cono generato da A_3 ed A_6, come mostrato in d). La base è quindi sia primale che duale ammissibile, e l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima per entrambi i problemi. La base è primale degenere e duale non degenere.



Per quanto riguarda l'unicità delle soluzioni ottime determinate, si osservi che, poiché la base ottima $B = \{3, 6\}$ è duale non degenere, per via delle condizioni degli scarti complementari la soluzione ottima del primale è necessariamente unica. Per via della degenerazione primale della base ottima, la soluzione ottima duale potrebbe invece non essere unica. Nel caso in esame, infatti, anche la base $B' = \{5, 6\}$ è sia primale che duale ammissibile, come mostrato in d), e la corrispondente soluzione di base duale è diversa da quella corrispondente alla base $B = \{3, 6\}$. Pertanto il problema duale ammette più di una soluzione ottima.

3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 2, sul grafo in figura, utilizzando l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo e giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Si esaminino gli archi di ogni stella uscente in ordine crescente dei rispettivi nodi testa. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato. Si consideri quindi il caso in cui il costo dell'arco $(1, 7)$ sia un parametro reale ϵ, invece di valere 1, e si discuta l'ottimalità e l'unicità dell'albero determinato al variare di ϵ. Giustificare le risposte.



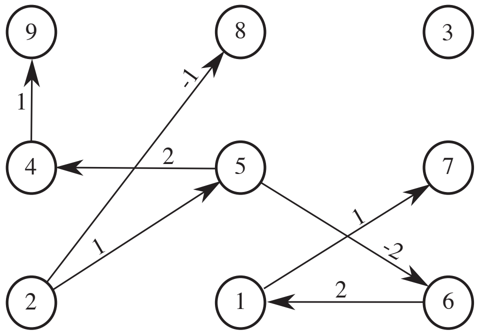
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene cicli orientati (ad esempio $(1, 7, 6)$) e archi di costo negativo (ad esempio $(5, 6)$): pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo è SPT.L in cui Q è implementato come una coda, ovvero l'algoritmo di Bellman, che ha complessità in tempo $O(mn)$.

$M = (n - 1)c_{max} + 1 = 8 \times 9 + 1 = 73.$

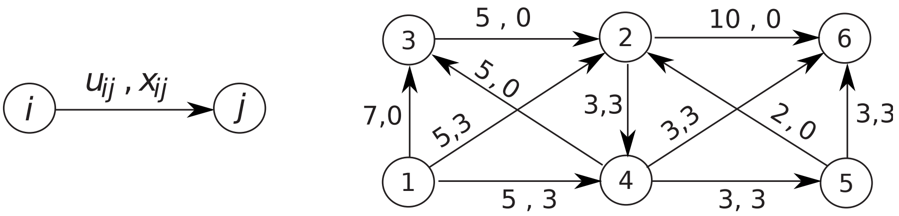
		$p[\cdot]$									$d[\cdot]$									
it.	u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q
0		2	2	2	2	2	2	2	2	2	73	0	73	73	73	73	73	73	73	$\{2\}$
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	0	73	5	1	73	73	-1	73	$\{1, 4, 5, 8\}$
2	1	2	2	2	2	2	2	1	2	1	3	0	73	5	1	73	4	-1	7	$\{4, 5, 8, 7, 9\}$
3	4	2	2	2	2	2	2	1	2	4	3	0	73	5	1	73	4	-1	6	$\{5, 8, 7, 9\}$
4	5	2	2	2	5	2	5	1	2	4	3	0	73	3	1	-1	4	-1	6	$\{8, 7, 9, 4, 6\}$
5	8	2	2	2	5	2	5	1	2	4	3	0	73	3	1	-1	4	-1	6	$\{7, 9, 4, 6\}$
6	7	2	2	2	5	2	5	1	2	4	3	0	73	3	1	-1	4	-1	6	$\{9, 4, 6\}$
7	9	2	2	2	5	2	5	1	2	4	3	0	73	3	1	-1	4	-1	6	$\{4, 6\}$
8	4	2	2	2	5	2	5	1	2	4	3	0	73	3	1	-1	4	-1	4	$\{6, 9\}$
9	6	6	2	2	5	2	5	1	2	4	1	0	73	3	1	-1	4	-1	4	$\{9, 1\}$
10	9	6	2	2	5	2	5	1	2	4	1	0	73	3	1	-1	4	-1	4	$\{1\}$
11	1	6	2	2	5	2	5	1	2	4	1	0	73	3	1	-1	2	-1	4	$\{7\}$
12	7	6	2	2	5	2	5	1	2	4	1	0	73	3	1	-1	2	-1	4	$\emptyset$

L'alberoL'albero trovato è mostrato in figura. Si noti che il nodo 3 non è raggiungibile dalla radice.



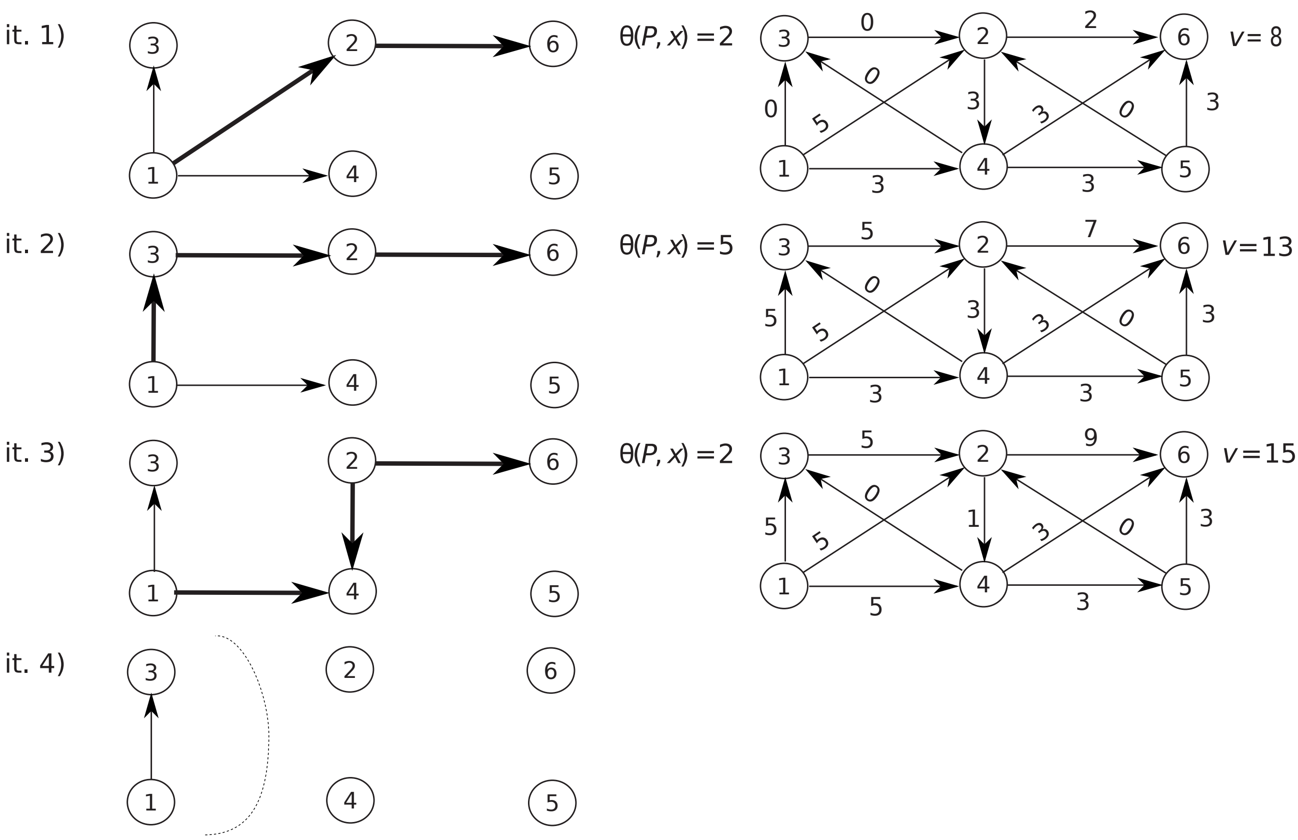
L'arco $(1, 7)$ fa parte dell'albero dei cammini minimi. Se il costo di tale arco fosse un parametro reale ϵ, l'etichetta del nodo 7 diverrebbe $d[7] = d[1] + c_{17} = 1 + \epsilon$. L'albero individuato continuerebbe a essere un albero dei cammini minimi di radice 2 per tutti e soli i valori di ϵ per cui le condizioni di Bellman continuano a valere. Vanno quindi considerati gli archi non appartenenti all'albero e incidenti il nodo 7: l'arco $(3, 7)$ non è significativo (3 non è raggiungibiledal nodo radice); l'arco $(5, 7)$ richiede che $d[5] + c_{57} \geq d[7] \equiv 1 + 3 \geq 1 + \epsilon \equiv \epsilon \leq 3$; l'arco $(7, 6)$ richiede che $d[7] + c_{76} \geq d[6] \equiv 1 + \epsilon + 4 \geq -1 \equiv \epsilon \geq -6$; l'arco $(7, 8)$ richiede infine che $d[7] + c_{78} \geq d[8] \equiv 1 + \epsilon - 3 \geq -1 \equiv \epsilon \geq 1$. Pertanto, l'albero individuato rimane un albero dei cammini minimi di radice 2 per $\epsilon \in [1, 3]$. Per valori di ϵ tra 1 e 3, l'albero ottimo è unico in quanto gli archi esterni all'albero soddisfano le condizioni di Bellman in forma di disuguaglianza stretta. Per $\epsilon = 1$ l'arco $(7, 8)$ soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza: $(7, 8)$ può sostituire $(2, 8)$ nell'albero ottenendo un diverso albero dei cammini minimi di radice 2. Analogamente, per $\epsilon = 3$ l'arco $(5, 7)$ soddisfa le condizioni di Bellman in forma di uguaglianza: $(5, 7)$ può sostituire $(1, 7)$ nell'albero ottenendo, anche in tale caso, un diverso albero dei cammini minimi di radice 2.

4) Si individui un flusso massimo dal nodo 1 al nodo 6 sulla rete in figura, utilizzando l'algoritmo di Edmonds e Karp a partire dal flusso indicato, di valore $v = 6$. Nella visita degli archi di una stella uscente si utilizzi l'ordinamento crescente dei rispettivi nodi testa (ad esempio, (1,2) è visitato prima di (1,3)). A ogni iterazione si fornisca l'albero della visita, il cammino aumentante individuato con la relativa capacità, e il flusso ottenuto con il relativo valore. Al termine, si indichi il taglio (N_s, N_t) restituito dall'algoritmo e la sua capacità, giustificando la risposta. Si discuta infine quale sarebbe il massimo numero di unità di flusso inviabili al nodo 6 se, oltre al nodo 1, anche il nodo 5 fosse una sorgente di flusso. Giustificare la risposta.



SVOLGIMENTO

Le iterazioni sono rappresentate di seguito, dall'alto in basso. Per ogni iterazione, a sinistra è mostrato l'albero della visita e il cammino aumentante P individuato (archi evidenziati); a destra viene invece indicato il flusso ottenuto in seguito all'invio, lungo P, di una quantità di flusso pari alla capacità $\theta(P, x)$, con il relativo valore v. Al termine è riportato il taglio $(N_s, N_t) = (\{1, 3\}, \{2, 4, 5, 6\})$ determinato dall'algoritmo. I nodi in N_s sono quelli esplorati durante l'ultima visita del grafo residuo (ovvero, la visita in cui si dimostra la non esistenza di un cammino aumentante). Il relativo albero della visita è illustrato nell'ultima figura in basso a sinistra. Il taglio è di capacità minima: infatti $u(N_s, N_t) = u_{12} + u_{14} + u_{32} = 5 + 5 + 5 = 15 = v$.



Se anche il nodo 5 fosse sorgente di flusso, 5 potrebbe inviare un'ulteriore unità di flusso lungo il cammino aumentante $(5, 2, 6)$. Il nodo 6 potrebbe quindi ricevere 16 unità di flusso. Si tratta del massimo numero di unità di flusso che il nodo 6 può ricevere dai nodi 1 e 5, come dimostra il taglio $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{6\})$, di capacità 16, che separa i due nodi sorgente dal nodo destinazione 6.

5) Una compagnia specializzata in video giochi ha sette proposte di nuovi giochi. Tuttavia, la compagnia non è in grado di sviluppare tutte le proposte in quanto il suo budget è limitato a $950,000$, e solo 20 programmatori possono essere assegnati ai nuovi progetti. Il capitale e il numero di programmatori richiesti per progetto sono riassunti nel seguito, unitamente al ricavo stimato per progetto (tutti gli ammontari, in dollari, corrispondono a migliaia). Inoltre, i progetti 2 e 6 richiedono skill specializzate, che solo uno dei programmatori nel team dei 20 disponibili possiede. Segue che non è possibile sviluppare entrambi i progetti.

Si formuli in termini di PLI il problema di decidere quali progetti sviluppare per massimizzare il ricavo della compagnia, considerando il vincolo relativo al numero di programmatori disponibili, il vincolo di budget, e il vincolo sulle skill specializzate per i progetti 2 e 6.

Progetto	Programmatori richiesti	Capitale necessario	Ricavo stimato
1	7	250	650
2	6	175	550
3	9	300	600
4	5	150	450
5	6	145	375
6	4	160	525
7	8	325	750

SVOLGIMENTO

Sia x_i una variabile binaria che indica se il progetto i viene sviluppato oppure no:

$$x_i = \begin{cases} 1 \text{ se il progetto } i \text{ viene sviluppato} \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \qquad i = 1, ...7$$

Utilizzando tali variabili binarie il problema può essere formulato in termini di PLI nel modo seguente:

$$\begin{array}{lrrrrrrrcl}
\max & 650x_1 & +550x_2 & +600x_3 & +450x_4 & +375x_5 & +525x_6 & +750x_7 & & \\
 & 250x_1 & +175x_2 & +300x_3 & +150x_4 & +145x_5 & +160x_6 & +325x_7 & \leq & 950,000 \\
 & 7x_1 & +6x_2 & +9x_3 & +5x_4 & +6x_5 & +4x_6 & +8x_7 & \leq & 20 \\
 & x_2 & +x_6 & \leq & 1 & & & & & \\
 & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6, & x_7 & \in & \{0,1\}
\end{array}$$

Il primo vincolo tiene conto del budget disponibile, mentre il secondo vincolo considera il limite sul numero dei programmatori disponibili. Il terzo vincolo, invece, garantisce che non sia possibile sviluppare sia il progetto 2 che il progetto 6. La funzione obiettivo, infine, da massimizzare, rappresenta il ricavo derivante dai progetti selezionati.

6) Si applichi alla seguente istanza del problema dello zaino

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} \max & 8x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +3x_4 & +x_5 & +2x_6 & & \\ & 4x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +2x_5 & +2x_6 & \leq & 12 \\ & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

l'algoritmo Branch and Bound che utilizza il rilassamento continuo per determinare la valutazione superiore, l'euristica Greedy CUD per determinare la valutazione inferiore, esegue il branching sulla variabile frazionaria, visita l'albero di enumerazione in modo depth-first e, tra i figli di uno stesso nodo, visita per primo quello in cui la variabile frazionaria è fissata a 0. Per ogni nodo dell'albero si riportino le soluzioni ottenute dal rilassamento e dall'euristica (se vengono eseguiti) con le corrispondenti valutazioni superiore e inferiore; si indichi poi se viene effettuato il branching, e come, o se il nodo viene chiuso e perché. Si discuta infine se la soluzione ottima determinata resterebbe ottima nel caso in cui la capacità dello zaino fosse 11 invece che 12. (*Nota*: nell'ordinamento CUD delle variabili, in caso di rapporti uguali si ordinino le variabili di ugual rapporto per indice crescente.)

SVOLGIMENTO

Indichiamo con x^* la soluzione ottenuta dal rilassamento e con $\bar{x}$ quella ottenuta dall'euristica. Indichiamo inoltre con $\bar{z}$ la valutazione superiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\bar{z} = cx^*$), con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo (ossia $\underline{z} = c\bar{x}$) e con z la migliore delle valutazioni inferiori determinate. Le variabili vanno ordinate per Costo Unitario Decrescente (CUD): $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_5$.

$\boxed{\text{Inizializzazione}}$ La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile; inoltre, si pone $z = -\infty$.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ $x^* = [1, 1, 1, 1/3, 0, 0]$, $\bar{z} = 19$, $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 18$. Poiché $\underline{z} > z = -\infty$, si aggiorna $z = 18$. Siccome $\bar{z} = 19 > 18 = \underline{z}$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_4.

$\boxed{x_4 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 0, 1/2]$, $\bar{z} = 19$. $\bar{x} = [1, 1, 1, 0, 0, 0]$, $\underline{z} = 18$. Poiché $\underline{z} = 18 = z$, z non cambia. Poiché $\bar{z} = 19 > 18 = z$, si esegue il branching sulla variabile frazionaria x_6.

$\boxed{x_4 = x_6 = 0}$ $x^* = [1, 1, 1, 0, 1/2, 0]$, $\bar{z} = 18 + 1/2$. Si noti che si può porre $\bar{z} = 18$ in quanto tutti i costi sono interi, e quindi anche il valore ottimo è intero. Poiché $\bar{z} = 18 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 0, x_6 = 1}$ $x^* = [1, 1, 3/4, 0, 0, 1]$, $\bar{z} = 18 + 3/4$. Analogamente a prima, si può porre $\bar{z} = 18$. Poiché $\bar{z} = 18 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

$\boxed{x_4 = 1}$ $x^* = [1, 1, 1/2, 1, 0, 0]$, $\bar{z} = 18 + 1/2$. Analogamente a prima, si può porre $\bar{z} = 18$. Poiché $\bar{z} = 18 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione superiore.

Poiché Q è vuota, l'algoritmo Branch and Bound termina, restituendo la soluzione ottima $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$, di costo 18.

Se la capacità dello zaino fosse 11 invece che 12, $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$ resterebbe una soluzione ammissibile. Di conseguenza, poiché il problema dello zaino con capacità 12 è un rilassamento del problema dello zaino con capacità 11, con ugual funzione obiettivo, per le proprietà dei rilassamenti segue che $[1, 1, 1, 0, 0, 0]$ sarebbe soluzione ottima anche per il problema con capacità 11.