RICERCA OPERATIVA (a.a. 2019/20)

Nome: Cognome: Matricola:

1) Si consideri il problema di *PL* riportato a lato, parametrico in ε: i) si individui l'insieme di tutti i valori di ε per cui la base $B = \{3, 4\}$ è ottima; ii) si risolva il problema dato, a partire dalla base $B = \{3, 4\}$, per $\varepsilon = 3$, utilizzando l'algoritmo del Simplesso appropriato. Giustificare algebricamente le risposte date.

$$
\begin{array}{rrcrcr}
\max & (2-\varepsilon)x_1 & + & x_2 & & \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & - & 2x_2 & \leq & 0 \\
 & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & x_1 & & & \leq & 2
\end{array}
$$

SVOLGIMENTO

i) Considerando la base $B = \{3, 4\}$, si ha

$$
A_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},\ \bar{y}_B(\varepsilon) = \begin{bmatrix} (2-\varepsilon) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (2-\varepsilon) \end{bmatrix}
$$

La soluzione di base primale è ammissibile a prescindere dal valore di ε. La soluzione di base duale è invece ammissibile per tutti i valori di ε per cui $\bar{y}_B(\varepsilon) \geq 0$, ovvero

$$
2 - \varepsilon \geq 0 \quad \equiv \quad \varepsilon \leq 2\ .
$$

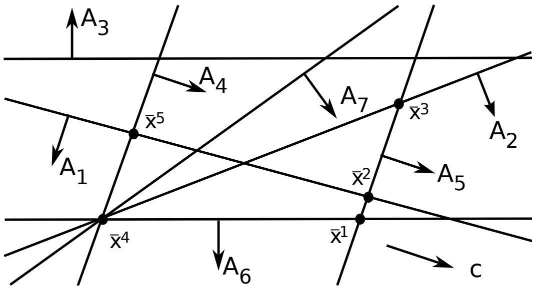
Segue che $B = \{3, 4\}$ è una base ottima per $\varepsilon \leq 2$.

ii) Per $\varepsilon = 3$, la base $B = \{3, 4\}$ è primale ammissibile ma non più duale ammissibile, come risulta dall'analisi in i): infatti $\bar{y}_4 < 0$. Essendo $B = \{3, 4\}$ primale ammissibile, è possibile risolvere il problema dato mediante l'algoritmo del Simplesso Primale, a partire da $B = \{3, 4\}$, ponendo $h = 4$, $B(h) = 2$, e calcolando:

$$
\xi = -A_B^{-1} u_{B(h)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_N \xi = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.
$$

Poiché $A_N \xi \leq 0$, segue che per $\varepsilon = 3$ il problema dato è superiormente illimitato, e di conseguenza il suo problema duale è vuoto.

2) Si risolva il problema di *PL* in figura, per via geometrica, utilizzando l'algoritmo del Simplesso Duale a partire dalla base $B = \{5, 6\}$. Si noti che c, A_4 e A_5 sono collineari tra loro, come pure A_3 e A_6. Per ogni iterazione si indichino: la base, la soluzione di base primale (in figura), l'indice entrante k, il segno delle componenti dei vettori $\bar{y}_B$ e η_B, e l'indice uscente h. Si discuta inoltre l'eventuale degenerazione primale e duale delle soluzioni di base determinate. Giustificare tutte le risposte.



SVOLGIMENTO

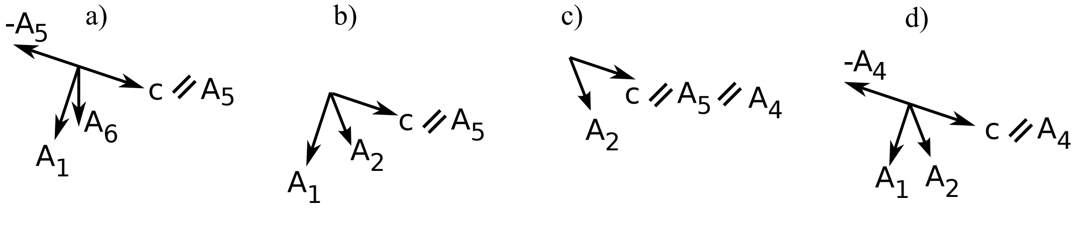
it. 1): $B = \{5, 6\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^1$ viola i vincoli 1, 2, 4, e 7, pertanto $k = \min\{ i \in N : A_i\bar{x} > b_i \} = \min\{1, 2, 4, 7\} = 1$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_5 > 0$ e $\bar{y}_6 = 0$ in quanto c è collineare con A_5. Quindi la base è duale degenere, ed è primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^1)$. Poiché $A_1 \in \text{cono}(-A_5, A_6)$, come mostrato in figura (a), risultano $\eta_5 < 0$ e $\eta_6 > 0$. Pertanto $\bar{\theta} = \min\{ \theta_i = \bar{y}_i/\eta_i : i \in B, \eta_i > 0 \} = \bar{y}_6/\eta_6 = 0$, e quindi $h = \min\{ i \in B : \eta_i > 0, \bar{\theta} = \theta_i \} = \min\{6\} = 6$. Si noti che, essendo $\bar{\theta} = 0$, si è effettuata un'iterazione degenere.

it. 2): $B = \{1, 5\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^2$ viola i vincoli 2, 4 e 7, pertanto $k = \min\{2, 4, 7\} = 2$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è collineare con A_5. Quindi la base è ancora duale degenere, e rimane primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^2)$. Poiché $A_2 \in \text{cono}(A_1, A_5)$, come mostrato in figura (b), risultano $\eta_1 > 0$ e $\eta_5 > 0$. Poiché $\bar{y}_1 = 0$ mentre $\bar{y}_5 > 0$, si ha $\bar{y}_1/\eta_1 = 0 < \bar{y}_5/\eta_5$, e pertanto $h = 1$. Un modo diverso di ottenere lo stesso risultato è notare che $c \in \text{cono}(A_2, A_5)$ ma $c \notin \text{cono}(A_1, A_2)$, pertanto non potrebbe mai essere $h = 5$. Anche in questo caso si è effettuata un'iterazione degenere in quanto $\bar{\theta} = \bar{y}_1/\eta_1 = 0$.

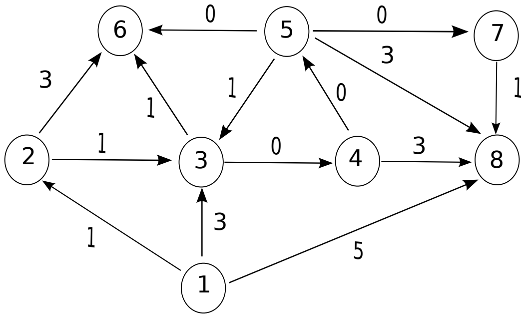
it. 3): $B = \{2, 5\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^3$ viola i vincoli 4 e 7, pertanto $k = \min\{4, 7\} = 4$ per la regola anticiclo di Bland. $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_5 > 0$ in quanto c è collineare con A_5. La base è quindi duale degenere, mentre è primale non degenere poiché $B = I(\bar{x}^3)$. Poiché A_4 è collineare con A_5 si ha $\eta_2 = 0$ ed $\eta_5 > 0$, pertanto deve necessariamente essere $h = 5$. Si noti che la base ottenuta è ancora duale degenere, ma non si è effettuata un'iterazione degenere: infatti $\bar{\theta} = \bar{y}_5/\eta_5 > 0$.

it. 4): $B = \{2, 4\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^4$ viola il solo vincolo 1, pertanto $k = 1$. $\bar{y}_2 = 0$ e $\bar{y}_4 > 0$ in quanto c è collineare con A_4. Quindi la base è ancora duale degenere, ed è pure primale degenere poiché B è incluso in $I(\bar{x}^4) = \{2, 4, 6, 7\}$. Poiché $A_1 \in \text{cono}(A_2, -A_4)$, come mostrato in figura (d), si ha $\eta_2 > 0$ ed $\eta_4 < 0$, pertanto deve necessariamente essere $h = 2$.

it. 5): $B = \{1, 4\}$. La soluzione di base primale $\bar{x}^5$ non viola alcun vincolo, quindi l'algoritmo termina avendo determinato una soluzione ottima sia per il primale che per il duale. La soluzione di base duale ha $\bar{y}_1 = 0$ e $\bar{y}_4 > 0$ in quanto c è collineare con A_4, quindi la base è ancora duale degenere. È invece primale non degenere in quanto $B = I(\bar{x}^5)$.



3) Si individui un albero dei cammini minimi di radice 1 sul grafo in figura.



Si utilizzi l'algoritmo più appropriato dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, giustificando la scelta effettuata. Per ogni iterazione si forniscano il nodo selezionato u, i vettori dei predecessori e delle etichette, e l'insieme dei nodi candidati Q. Al termine si disegni l'albero dei cammini minimi individuato.

Si consideri quindi lo scenario in cui l'arco $(5,3)$ cambia orientamento e costo, diventando l'arco $(3,5)$, di costo -1. Si discuta se l'albero individuato al passo precedente continui a essere un albero dei cammini minimi di radice 1 anche nel nuovo scenario. In caso contrario, si indichi quale sia l'algoritmo più adeguato per individuare un albero dei cammini minimi a partire dall'albero precedentemente trovato. Giustificare tutte le risposte.

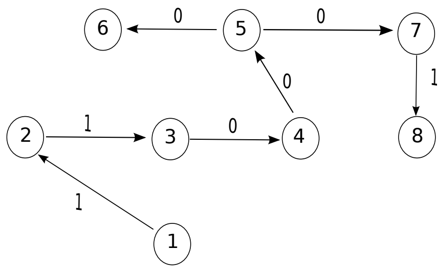
SVOLGIMENTO

Il grafo contiene il ciclo $(3,4,5)$ e non sono presenti archi di costo negativo. Pertanto, l'algoritmo più conveniente dal punto di vista della complessità computazionale in tempo, tra quelli studiati, è l'algoritmo SPT.S, che ha complessità in tempo $O(n^2)$ nel caso in cui la coda di priorità Q sia implementata come una lista.

$M = (n-1)c_{max} + 1 = 7 \times 5 + 1 = 36.$

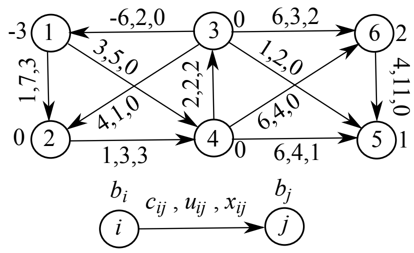
it.	u	$p[1]$	$p[2]$	$p[3]$	$p[4]$	$p[5]$	$p[6]$	$p[7]$	$p[8]$	$d[1]$	$d[2]$	$d[3]$	$d[4]$	$d[5]$	$d[6]$	$d[7]$	$d[8]$	Q
0		*nil*	1	1	1	1	1	1	1	0	36	36	36	36	36	36	36	(1)
1	1	*nil*	1	1	1	1	1	1	1	0	1	3	36	36	36	36	5	$(2,3,8)$
2	2	*nil*	1	2	1	1	2	1	1	0	1	2	36	36	4	36	5	$(3,6,8)$
3	3	*nil*	1	2	3	1	3	1	1	0	1	2	2	36	3	36	5	$(4,6,8)$
4	4	*nil*	1	2	3	4	3	1	1	0	1	2	2	2	3	36	5	$(5,6,8)$
5	5	*nil*	1	2	3	4	5	5	1	0	1	2	2	2	2	2	5	$(6,7,8)$
6	6	*nil*	1	2	3	4	5	5	1	0	1	2	2	2	2	2	5	$(7,8)$
7	7	*nil*	1	2	3	4	5	5	7	0	1	2	2	2	2	2	3	(8)
8	8	*nil*	1	2	3	4	5	5	7	0	1	2	2	2	2	2	3	$\emptyset$

L'albero trovato è mostrato in figura:



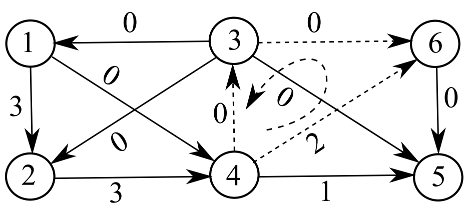
Si l'arco $(5,3)$ cambiasse orientamento, diventando $(3,5)$, con costo -1, l'albero individuato non sarebbe più ottimo in quanto l'arco $(3,5)$, esterno all'albero, violerebbe le condizioni di Bellman: $d(3) - 1 = 1 < d(5) = 2$. Tale arco potrebbe quindi essere inserito nell'albero al posto di $(4,5)$, migliorando l'etichetta del nodo 5. Poiché il grafo risulta aciclico dopo l'inversione di $(5,3)$, come testimoniato dalla buona enumerazione dei nodi della rete, l'algoritmo più appropriato per individuare un albero dei cammini minimi di radice 1 nel nuovo scenario sarebbe SPT-Acyclic. Si noti che tale algoritmo potrebbe essere invocato a partire dal nodo 5, ovvero dal nodo che subisce una riduzione della propria etichetta in seguito all'inserimento dell'arco $(3,5)$ nell'albero.

4) Si risolva il problema di flusso di costo minimo relativamente all'istanza in figura utilizzando l'algoritmo di cancellazione dei cicli a partire dal flusso indicato, di costo $cx = 28$. Per ogni iterazione si mostri il ciclo individuato con il suo verso, costo e capacità, e la soluzione ottenuta dopo l'applicazione dell'operazione di composizione, con il suo costo. Al termine si dimostri che la soluzione ottenuta è ottima.

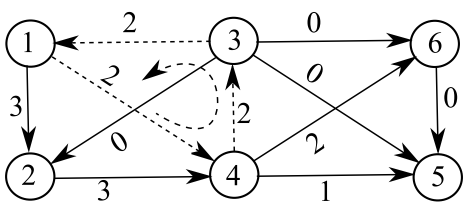


SVOLGIMENTO

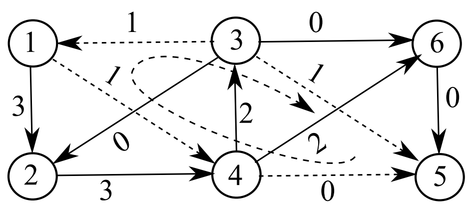
L'algoritmo esegue tre iterazioni, illustrate dalle prime tre figure (da sinistra a destra, dall'alto in basso). In ogni figura è mostrato il ciclo C utilizzato (archi tratteggiati) con il suo verso (freccia tratteggiata) e la sua capacità θ, nonché il flusso x al termine dell'iterazione, ossia dopo l'applicazione dell'operazione di composizione con C, con il relativo costo cx. La quarta figura, in basso a destra, mostra il grafo residuo relativo all'ultima soluzione e il corrispondente albero dei cammini minimi (archi tratteggiati) di radice fittizia r (non mostrata in figura). Tale albero è ottimo, come dimostrano le etichette associate ai nodi, che soddisfano le condizioni di Bellman. L'esistenza di un albero dei cammini minimi dimostra che non esistono cicli orientati di costo negativo nel grafo residuo, ovvero non esistono cicli aumentanti di costo negativo rispetto all'ultimo flusso determinato x, che è quindi un flusso di costo minimo.



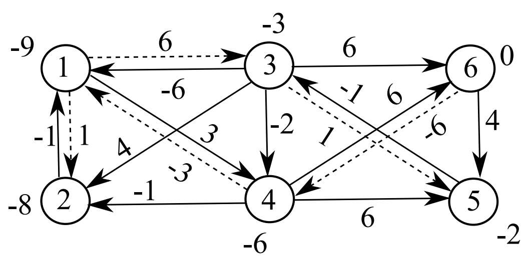
$\theta = 2$, $c(C) = -2$, $cx = 24$



$\theta = 2$, $c(C) = -1$, $cx = 22$



$\theta = 1$, $c(C) = -2$, $cx = 20$



5) Si consideri il seguente modello matematico:

$$
\begin{array}{ll}
\max & \min\{\,2x_1 - x_2 + x_3\,,\ -x_1 + x_2 + 3x_3\,\} \\
 & x_1, x_3 \in \{0,1\} \\
 & x_1 = 1 \Longrightarrow x_2 \in \{3,5,8\} \\
 & x_1 = 0 \Longrightarrow x_2 = 0 \\
 & x_1 = 1 \ \textit{and}\ x_3 = 1 \Longrightarrow x_2 = 5
\end{array}
$$

Utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso, lo si formuli come un problema di Programmazione Lineare Intera (*PLI*). Giustificare le risposte.

SVOLGIMENTO

Il modello matematico proposto non è un modello di *PLI* in quanto:

- la funzione obiettivo non è lineare (bensì è definita come il minimo di due funzioni lineari);
- la variabile x_2 è una variabile a valori discreti;
- sono presenti implicazioni logiche che legano la variabile x_2 ai valori assunti dalle variabili binarie x_1 e x_3.

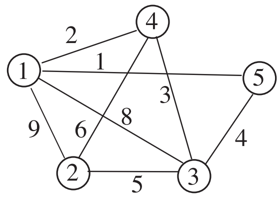
Il modello può comunque essere (ri)formulato in termini di modello *PLI* nel modo seguente:

$$
\begin{array}{ll}
\max & z \\
 & z \le 2x_1 - x_2 + x_3 \\
 & z \le -x_1 + x_2 + 3x_3 \\
 & x_2 = 3y_1 + 5y_2 + 8y_3 \\
 & y_1 + y_2 + y_3 = x_1 \\
 & y_1, y_2, y_3 \in \{0,1\} \\
 & x_1, x_3 \in \{0,1\} \\
 & y_2 \ge x_1 + x_3 - 1.
\end{array}
$$

La variabile di soglia z, infatti, permette di stimare per difetto il minimo tra i valori restituiti dalle funzioni lineari $2x_1 - x_2 + x_3$ e $-x_1 + x_2 + 3x_3$. Massimizzando z, il solutore attribuisce pertanto a x_1, x_2 e x_3 quei valori (ammissibili) che massimizzano il minimo valore restituito dalle due funzioni lineari.

Le variabili binarie ausiliarie y_1, y_2 e y_3 permettono di formulare la variabile a valori discreti x_2 utilizzando le tecniche di modellazione apprese durante il corso. Si noti che, se $x_1 = 1$, una di tali variabili deve assumere il valore 1, e pertanto $x_2 \in \{3,5,8\}$, come richiesto. Se invece $x_1 = 0$, il vincolo $y_1 + y_2 + y_3 = x_1$ forza tutte le variabili ausiliarie a zero, e quindi $x_2 = 0$, come specificato. Infine, l'ultimo vincolo del modello *PLI* garantisce che, se $x_1 = x_3 = 1$, allora la variabile ausiliaria y_2 sia forzata ad assumere il valore 1, e quindi x_2 assuma il valore 5, come desiderato.

6) Si applichi all'istanza di TSP in figura un algoritmo Branch and Bound che usa MS1T come rilassamento, non usa euristiche, ed effettua il branching selezionando il nodo con il più piccolo valore $r > 2$ di archi dell'MS1T in esso incidenti (a parità di tale valore, quello con indice minimo), e creando $r(r-1)/2$ figli corrispondenti a tutti i modi possibili per fissare a zero la variabile corrispondente a $r-2$ di tali archi. Per ogni nodo dell'albero si riportino la soluzione ottenuta dal rilassamento con la corrispondente valutazione inferiore; si indichi poi se, e come, viene effettuato il branching o se il nodo viene chiuso e perché. Si visiti l'albero delle decisioni in modo breadth-first, ossia si implementi Q come una fila, e si inseriscano in coda i figli di ogni nodo in ordine lessicografico crescente rispetto all'insieme di archi fissati a zero (ad esempio, se si seleziona il nodo 2, e si fissano a zero le variabili corrispondenti agli archi $(2,1)$ e $(2,3)$, il figlio corrispondente a $(2,1)$ è inserito in coda prima del figlio corrispondente a $(2,3)$). Giustificare tutte le risposte.



SVOLGIMENTO

Indichiamo con $\underline{z}$ la valutazione inferiore ottenuta a ogni nodo e con z la migliore delle valutazioni superiori determinate (inizialmente $z = +\infty$). La coda Q viene inizializzata inserendovi il solo nodo radice dell'albero delle decisioni, corrispondente a non aver fissato alcuna variabile.

$\boxed{\text{Nodo radice}}$ MS1T, con $\underline{z} = 15$, è mostrato in (a). Poiché non è un ciclo Hamiltoniano non si è determinata alcuna soluzione ammissibile. Pertanto $\underline{z} = 15 < z = +\infty$ e occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 3, che ha tre archi incidenti, e a creare $3(3-1)/2 = 3$ figli fissando a zero le variabili corrispondenti agli archi $(3,2)$, $(3,4)$ e $(3,5)$ rispettivamente, inserendoli in Q in quest'ordine.

$\boxed{x_{23} = 0}$ MS1T, con $\underline{z} = 16$, è mostrato in (b). Poiché $\underline{z} = 16 < z = +\infty$, occorre procedere con il branching. Ciò corrisponde a selezionare il nodo 4, che ha tre archi incidenti, e a creare tre figli fissando a zero le variabili corrispondenti agli archi (4, 1),4, 2) e $(4,3)$ rispettivamente, inserendoli in Q in quest'ordine.

$\boxed{x_{34} = 0}$ MS1T, con $\underline{z} = 18$, è mostrato in (c). Poiché si tratta di un ciclo Hamiltoniano, e $18 < z = +\infty$, si pone $z = 18$. Inoltre il nodo viene chiuso per ottimalità.

$\boxed{x_{35} = 0}$ Poiché il nodo 5 ha solamente un arco incidente nel sottografo corrispondente al nodo dell'albero in esame, non può esistere alcun ciclo Hamiltoniano, e quindi il nodo viene chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{23} = x_{14} = 0}$ MS1T, con $\underline{z} = 22$, è mostrato in (d). Poiché $\underline{z} = 22 > 18 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

$\boxed{x_{23} = x_{24} = 0}$ Poiché il nodo 2 ha solamente un arco incidente nel sottografo corrispondente al nodo dell'albero in esame, non può esistere alcun ciclo Hamiltoniano, e quindi il nodo viene chiuso per inammissibilità.

$\boxed{x_{23} = x_{34} = 0}$ MS1T, con $\underline{z} = 21$, è mostrato in (e). Poiché $\underline{z} = 21 > 18 = z$, il nodo viene chiuso dalla valutazione inferiore.

Poiché Q è vuota l'algoritmo termina, avendo risolto il problema all'ottimo. La soluzione ottima, di costo 18, è mostrata in (c).