Esecizi su interpolazione e zeri di funzioni

15/5/2008

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

1. Si calcoli il polinomio $p(x)$ di interpolazione della f nei tre nodi $x_i = 1 + i$ per $i = 0, 1, 2$.
2. Si dia una maggiorazione del modulo del resto $r(x) = f(x) - p(x)$ per $x \in [x_0, x_2]$.

Esercizio 2 Sono assegnati i punti $(-1, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$.

(a) Si calcolino il polinomio $p(x)$ di interpolazione dei primi tre punti assegnati ed il polinomio $q(x)$ di interpolazione degli ultimi tre punti assegnati.

(b) Posto $\alpha(x) = -x/3 + 2/3$ dimostrare che $t(x) = \alpha(x)p(x) + (1 - \alpha(x))q(x)$, è il polinomio di interpolazione dei quattro punti assegnati.

(c) Posto $\alpha(x) = ax + b$ determinare a e b nel caso in cui i punti siano (x_i, y_i) per $i = 0, \ldots, 3$ e si assumano noti $p(x)$ e $q(x)$.

Esercizio 3 È data l'equazione $\quad f(x) = 2 - 2x^2 - \cos x = 0.$

a) Con opportuna separazione grafica, dire quante soluzioni reali ha l'equazione.

b) Studiare la convergenza del metodo iterativo
$$x_{k+1} = g(x_k), \quad \text{dove} \quad g(x) = \frac{2 - \cos x}{2x}$$
alle soluzioni dell'equazione (scelta del punto iniziale e ordine di convergenza).

Esercizio 4 $p(x) = 2x^2 + 3$ è il polinomio di interpolazione di una funzione $f(x)$ nei nodi $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$.

a) Sapendo che $f(x)$ è un polinomio di 3^o grado che si annulla in 2, determinare $f(x)$.

b) Trovave il massimo modulo del resto nell'intervallo $[-1, 2]$.

Esercizio 5 Sia $f(x) = x^2 - x - 2$.

a) Si determini il polinomio $p(x)$ che interpola $f(x)$ nei nodi $x_0 = 0$ e $x_1 = a$, con $a \in [0, 2]$.

b) Si determini il valore di $a \in [0, 2]$ per cui risulta minimo il $\max_{0 \leq x \leq 2} |f(x) - p(x)|$.

Esercizio 6. Un metodo per approssimare π consiste nel calcolare l'integrale
$$\int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, dx,$$
il cui valore è $\pi/4$. Si dica quanto grande deve essere preso N per ottenere un errore assoluto minore di 10^{-4} con la formula dei trapezi.