Lezione 21 maggio

Thursday, May 21, 2020 9:04 AM

$\mathbb{P}$ classe dei problemi <u>decisionali</u> <u>risolubili</u> in tempo polinomiale

$\mathbb{NP}$ classe dei problemi <u>decisionali</u> <u>verificabili</u> in tempo polinomiale

$$P \overset{?}{\subseteq} NP$$

Zaino decisionale: considera il problema di input e un valore K.
Esiste una soluzione a valore $\geq K$?

<u>Riducibilità polinomiale</u>

$\mathcal{P}$ problema decisionale
$\mathcal{P}'$ " "

$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ $\qquad$ $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$
$\mathcal{P} \propto \mathcal{P}'$ $\qquad$ $\mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}$ $\qquad$ $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}'$
$\mathcal{P} \leq_p \mathcal{P}'$

se ogni istanza x di $\mathcal{P}$ si può trasformare in tempo poly in un'istanza x' di $\mathcal{P}'$:
$\mathcal{P}'$ risponde 'true' su x' sse $\mathcal{P}$ risponde

$\wp'$ risponde true su x' sse $\wp$ risponde true su x.

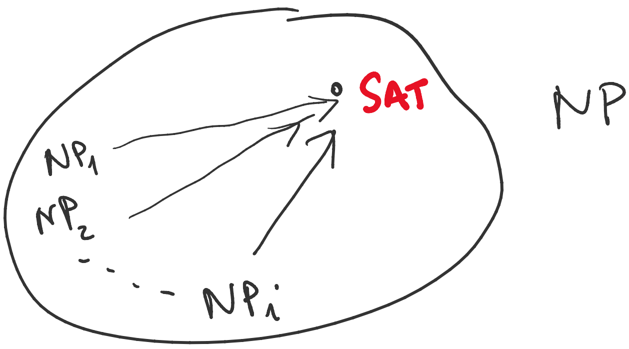
$$\wp_{DEC} \rightarrow \wp_{OTT}$$

Riducibilità è transitiva

$$P \xrightarrow{p} Q \xrightarrow{p} R$$

$$P \rightarrow R$$

Def: $\wp$ è NP-completo se $\wp \in NP$, e se ogni problema in NP si riduce ad esso.



SODDISFACIBILITÀ

SAT

SAT: input

$X = \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ var. booleane

$C = \{C_0, \dots, C_{m-1}\}$

clausole separate da "$\wedge$" AND

clausole separate da $\wedge$ AND

C_i = insieme di letterali separati da "OR" "$\vee$"

$$\boxed{F = C_0 \wedge C_1 \wedge \dots \wedge C_{m-1}}$$

$$F = (a \vee b) \wedge (\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \wedge (c)$$

$X = \{a, b, c\}$

$a = t \quad \bar{b} = t \quad c = t$

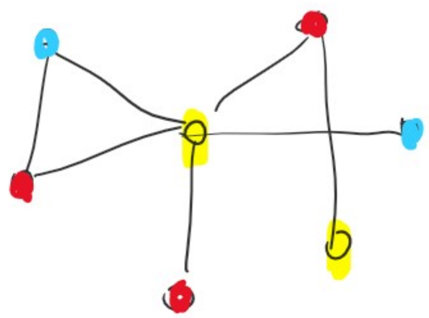
$a = true \quad b = false \quad c = true$

Cook-Levin Th : SAT é NP-completo

1) SAT $\in$ NP $\qquad \Theta$ (linearre con $|F|$)

2) $NP_1, NP_2, \dots, NP_i \to$ SAT

3-COLOR $\in$ NP



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ & \dots & & \end{bmatrix} \qquad A_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } A[i,j]=1 \\ \bar{a}_{ij} & \text{else} \end{cases}$$

$\forall\, i \in V \qquad r_i \; g_i \; b_i$

$$B_i = (r_i \wedge \bar{g}_i \wedge \bar{b}_i) \vee (\bar{r}_i \wedge g_i \wedge \bar{b}_i) \vee (\bar{r}_i \wedge \bar{g}_i \wedge b_i)$$

$$C_{ij} : a_{ij} \Rightarrow (r_i \wedge \bar{r}_j) \vee (g_i \wedge \bar{g}_j) \vee (b_i \wedge \bar{b}_j)$$

$$= \bar{a}_{ij} \vee (r_i \wedge \bar{r}_j) \ldots$$

$$\Phi_G = \underset{\substack{0 \le i,j < n \\ \uparrow \\ \text{per tutti gli archi}}}{\bigwedge A_{ij}} \wedge \Big(\underset{\substack{0 \le i < n \\ \uparrow \\ \text{per tutti i vertici}}}{\bigwedge B_i}\Big) \wedge \Big(\underset{\substack{0 \le i,j < n \\ \uparrow \\ \text{per tutte le colorazioni}}}{\bigwedge C_{ij}}\Big)$$

Φ_G può essere trasformata in tempo pol. in una formula normale congiuntiva

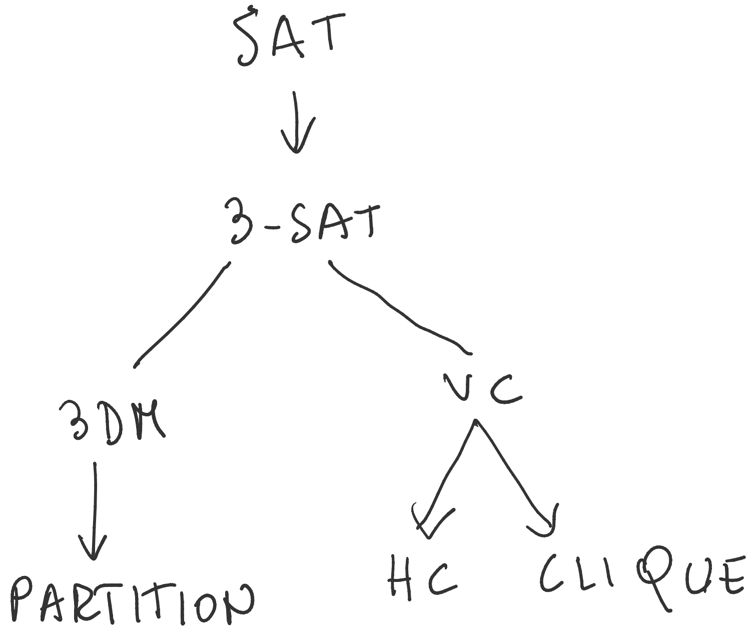
$\mathcal{C}$ è NP-completo

1) $\mathcal{C} \in NP \Rightarrow$ per il th. Cook-Levin $\mathcal{C} \to SAT$

2) $SAT \to \mathcal{C}$

$$\mathcal{C} \equiv SAT$$

Poiché $\rightarrow$ è transitiva non importa che nel punto 2) si debba essere SAT ma un qualsiasi problema noto essere NP-completo.



<u>NP-completi i più difficili</u> all'interno della classe

FATT $\in$ NP è OPEN

Se uno trova una sol. poly per un solo problema NP-completo, attraverso le riduzioni ha trovato una sol. efficiente per tutti.

Se si trova un <u>limite inferiore</u> per

... - -

La risposta che P = NP è basata

Π è NP-completo?

1) WIKIPEDIA

2) Esistono libri con una collezione molto estesa di problemi NP-completi divisi per categorie

Garey, Johnson:

Computer and Intractability

3) Dimostrare che Π è NP-completo

1) $\Pi \in NP$

2) $\Pi' \rightarrow \Pi$ $\quad \Pi'$ è NP-completo

CLIQUE è NP-completo

Dato $G(V,E)$ e K, esiste un sottografo completo di un numero di vertici $\geq K$.

K-CLIQUE $\rightarrow$ $CLIQUE_{DEC} \longrightarrow CLIQUE_{OTT}$

K-CLIQUE esiste .... = K

1) VerificaClique (G, b):

b stringa binaria di n el. $b[i]=1$ se $i \in$ CLIQUE

G in matrice di adiac. A

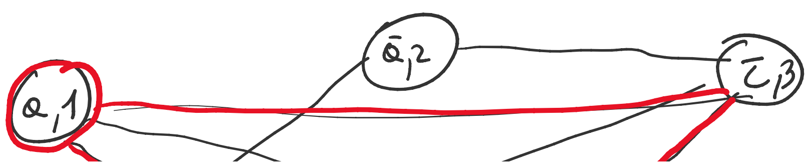
```
num = 0;
for (i=0, i<n, i++)
    if (b[i]==1) num++;
if (num != K) return false;
for (i=0, i<n, i++){
    for (j=0, j<n, j++){
        if (b[i]==1 && b[j]==1)
        if (A[i,j]==0) return false;
    }
}
return true;
```

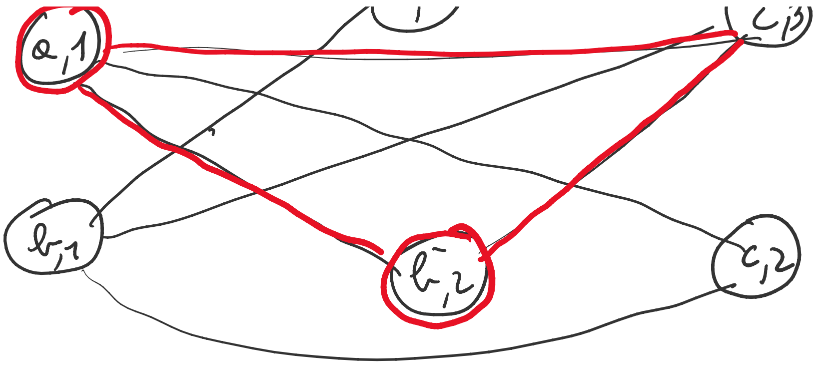
$\Theta(n^2)$ polinomiale!

K-CLIQUE $\in$ NP

3-SAT $\rightarrow$ K-CLIQUE

$$F = \overset{1}{(a \vee b)} \wedge \overset{2}{(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c)} \wedge \overset{3}{(\bar{c})}$$





(x, i) è connesso a (y, j) $i \neq j$ $y = \bar{x}$

Si dimostra che SAT di k clausole è soddisfacibile sse e solo se il grafo ha una clique di dimensione k

1) Se SAT è sodd. $\Rightarrow$ il grafo ha una k clique

2) Se G ha una k vertici $\Rightarrow$ SAT è sodd.

k-clique è NP-completo per valori di $k = \Theta(n)$.

Zaino

Def: Un problema P si dice NP-hard se il problema equivalente decisionale è NP-completo.

$\text{ZAINO}_{\text{OTT}}$ è NP-hard

ZAINO $\longrightarrow$ ZAINO

$ZAINO_{OTT}$ è NP-hard

$ZAINO_{DEC} \to ZAINO_{OTT}$

$ZAINO_{DEC}$ è NP-completo

1) b: la stringa binaria degli oggetti selezionati

per b si calcola

V = somma di valori

P = somma dei pesi

$P < W$?

V è max?

2) $PARTITION \to ZAINO_{DEC}$

$A = \{a_0, \dots, a_n\}$ esiste $A' \subseteq A$:

$$\sum_{a_i \in A'} a_i = \sum_{a_i \in A - A'} a_i \qquad \sum_{a_i \in A} a_i / 2$$

Es: $A = \{\underline{9}, \underline{7}, \underline{5}, 4, 1, \underline{2}, 3, 8, 4, 3\}$

$\sum a_i = 46/2 = 23$

Si applica la tecnica della riduzione:

si considera un probl. di Zaino dove

$W = \frac{\sum p_i}{2}$ e $p_i = v_i$.

2 $\text{PARTITION} = \text{ZAINO}_R$

$\text{PARTITION} \rightarrow \text{ZAINO}_R \rightarrow \text{ZAINO}_{DEC} \rightarrow \text{ZAINO}_{OTT}$

$\Downarrow$

ZAINO_{OTT} è NP-hard