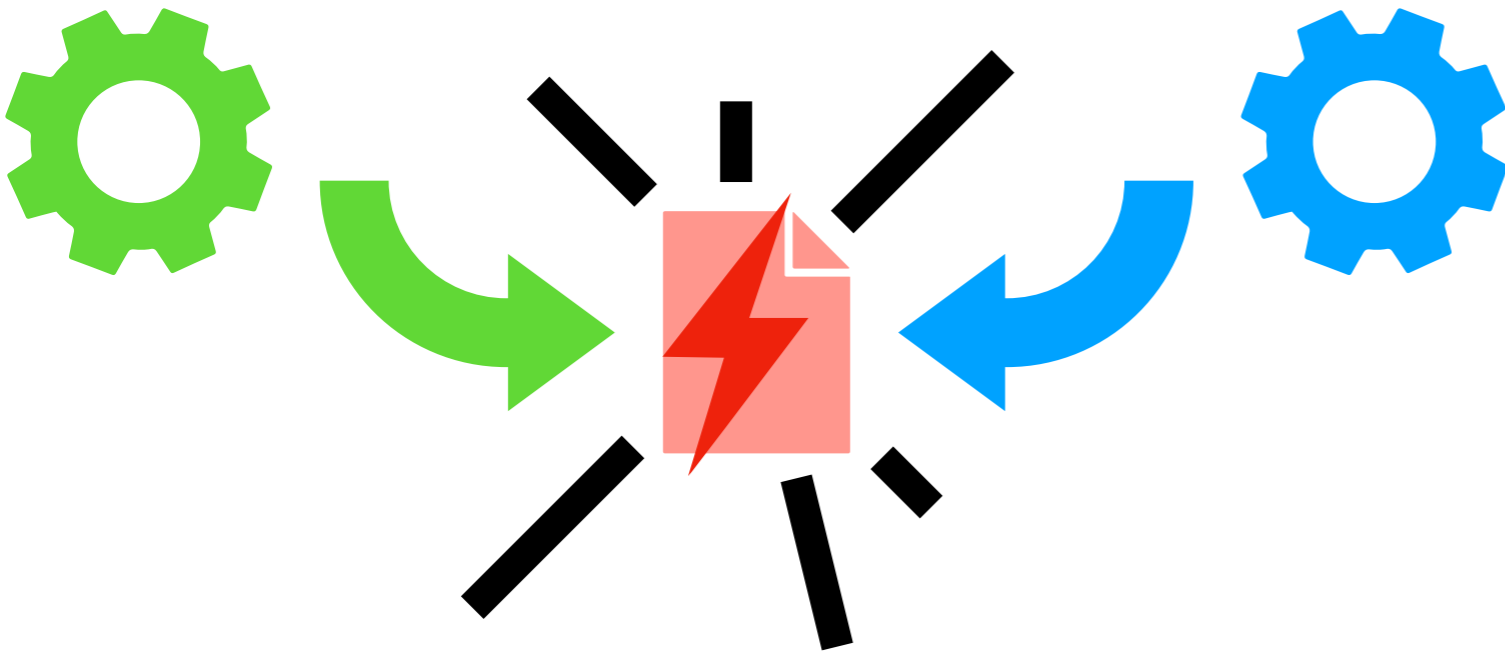


Linguaggi di Programmazione



Roberta Gori

Capitolo 1 (1.1.e 1.2)

Dalla sintassi alla semantica

Linguaggi di programmazione

Quando definiamo un linguaggio di programmazione ne fissiamo:

1. la sintassi

programmi ben formati,
escludiamo i programmi senza senso

2. i tipi

riduce l'insieme di programmi legali,
aiuta a non commettere errori

3. semantica

Il significato dei programmi (ben tipati)

La sintassi

La sintassi di un linguaggio

1. L'alfabeto

quali simboli possono essere usati

2. La struttura grammaticale dei programmi

quali sequenze di simboli sono valide, quali devono invece essere segnalate come erronee

Esempio

```
int function(int x)
```

```
{k := 1;
```

```
  while { if r > 100 then
```

```
    r := r - 10;
```

```
    k := k - 1
```

```
  else
```

```
    r := r + 11;
```

```
    k := k + 1 }
```

```
  return r}
```

Non possiamo assegnargli un significato!

Non e' un programma C sintatticamente corretto (legale)!!

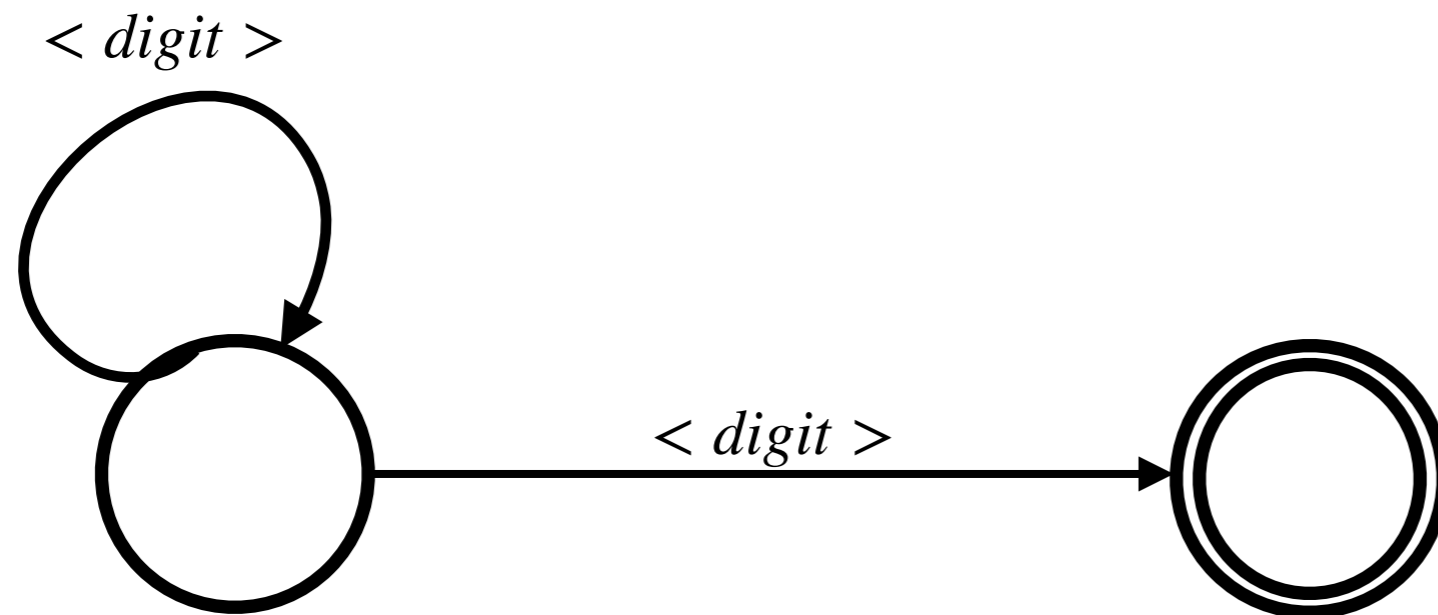
Come definire programmi legali

Modi per definire la sintassi sono
espressioni regolari, grammatiche libere, automi che
riconoscono il linguaggio,...

Esempio

Se vogliamo definire una stringa che rappresenta un numero possiamo usare una grammatica in BNF oppure un automa che riconosce lo stesso linguaggio

```
<numeral> ::= <digit> | <numeral> <digit>  
<digit>    ::= "0" | "1" | "2" | "3" | "4" | "5" | "6" | "7" | "8" | "9"
```



Sistema di tipi

Un sistema di tipi puo' essere usato per

1. ridurre gli errori

sistemi di tipi diversi
possono essere definiti
sullo stesso linguaggio!

2. permettere ottimizzazioni di compilazione

3. scoraggiare le cattive pratiche di programmazione

I sistemi di tipi sono spesso espressi usando regole logiche

Esempio

```
...  
bool b := true;  
while (b && i) do {  
    i := i-1;  
}
```

Vantaggi della formalizzazione della sintassi

Standardizzazione del linguaggio

i programmatori scrivono programmi sintatticamente corretti

gli implementatori scrivono front-end dei compilatori corretti

Analisi formale delle proprietà del linguaggio

ambiguità' del linguaggio

Implementazione automatica del front-end del compilatore

Esercizio

Consideriamo l'alfabeto $A \triangleq \{ (,) \}$

Definire la gramatica delle stringhe formate da parentesi bilanciate

$S ::= ?$

Uso di un linguaggio

I programmatori dovrebbero capire il codice che scrivono

Ogni manuale di un linguaggio contiene

1. descrizioni in linguaggio naturale dei vari costrutti
2. esempi di frammenti di codice e del loro uso
3. esempi di cattive pratiche

Ma questo e' sufficiente?

Le descrizioni in linguaggio naturale dovrebbero essere

1. più precise possibile
2. comprensibile
3. inequivocabili ma non pedanti

Ma ...

1. è difficile (quasi impossibile) coprire tutti i casi
2. molti punti rimarranno aperti a diverse interpretazioni
3. possono sorgere incongruenze
4. le buone pratiche non eliminano i problemi (li nascondono)

Alcuni problemi

Come dimostrare che il codice soddisfi una specifica (descrizione del comportamento)?

Come dimostrare l'assenza di problemi?

Come produrre codice affidabile?

Come provare la correttezza di un'implementazione?

Come definire i risultati corretti dei casi di test?

Come individuare precocemente ambiguità, anomalie, incoerenze?

Come esporre le debolezze?...

Le buone pratiche

Code reviews



Test-driven
development



Ma...

Cost of software fails in 2017



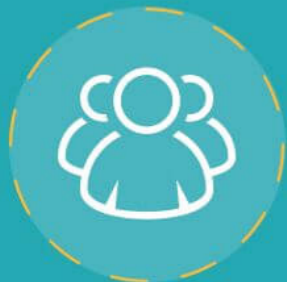
606 fails

from 314 companies



US\$1.7 trillion

in financial losses



3.6 billion

people affected



268 years

lost to downtime

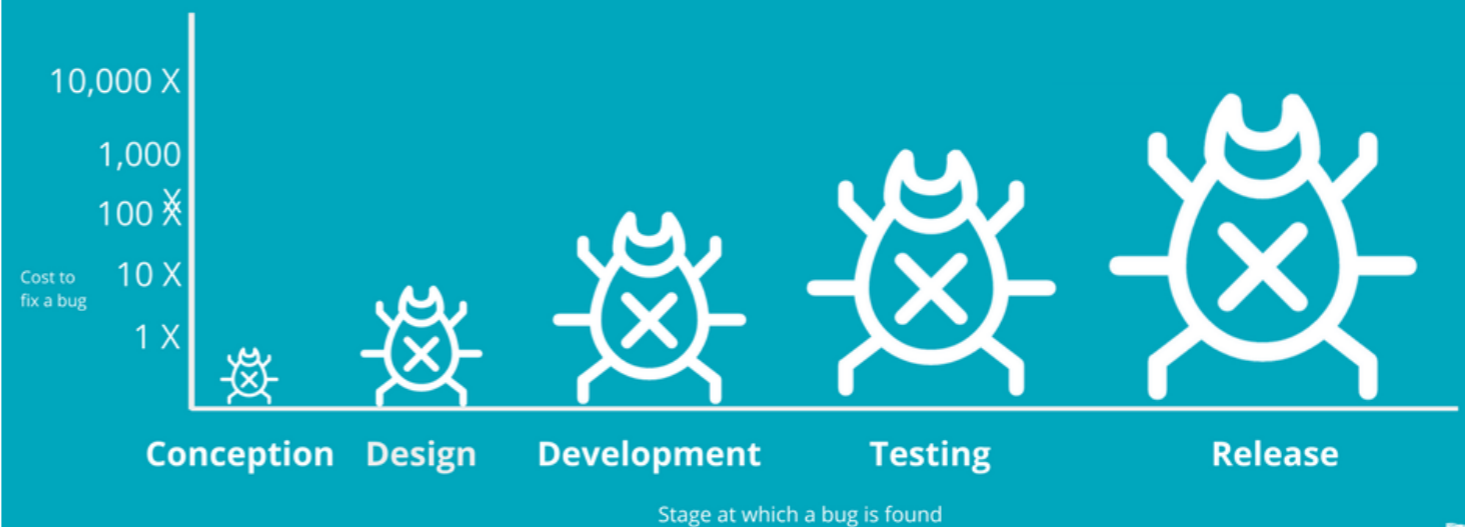
Source: Tricentis 2017



IT WORKS

on my machine

Resolving bugs early and often reduces associated costs



Semantica

La parola semantica è stata introdotta nel 1900:

lo studio di come le parole cambiano il loro significato (M. Bréal)

stranamente anche il suo significato è ora cambiato in

lo studio del legame tra le frasi di una lingua (scritta, parlata o formale) e i loro significati

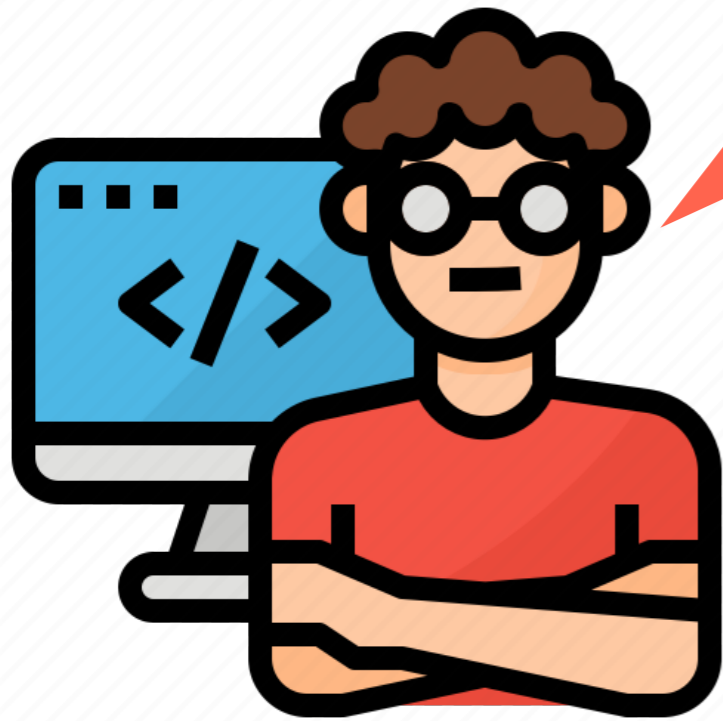
Nell'informatica ha a che fare con

lo studio del significato dei programmi (ben tipati)

La semantica formale assegna un significato rigoroso e non ambiguo ai programmi: dice ai programmatori il significato del codice che scrivono (ad un certo livello di astrazione)

Qualcuno dirà sempre

La (mia)
implementazione è la
semantica del linguaggio



corretta per definizione
e' indipendente dalla macchina?
e' portabile?
quanto durerà?
astrazione utile per altri programmatori?
come ragionarci sopra?
e quelle dei concorrenti?

...

Vantaggi della formalizzazione del significato del programma

Standardizzazione del modello di riferimento del linguaggio
ufficiale, indipendente dalla macchina
un modello mentale per i programmatori
un punto di riferimento per gli implementatori

Analisi formale delle proprietà' del linguaggio
espressività, correttezza dei tipi,
conformità del programma

Implementazione automatica del back-end del compilatore
Dalla semantica possiamo ottenere un
interprete per la sperimentazione

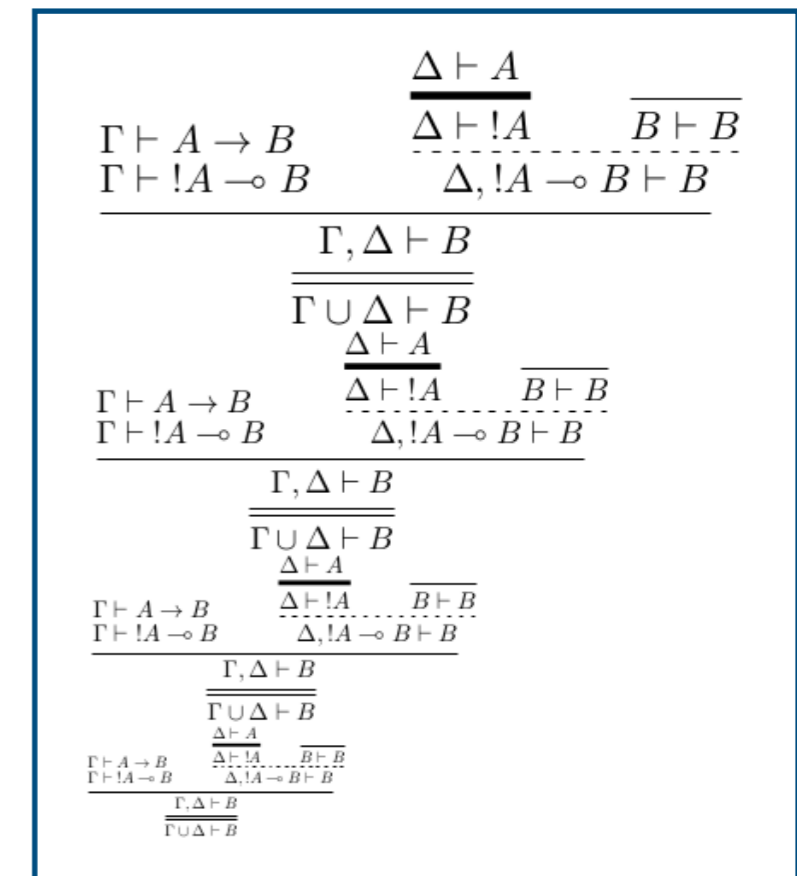
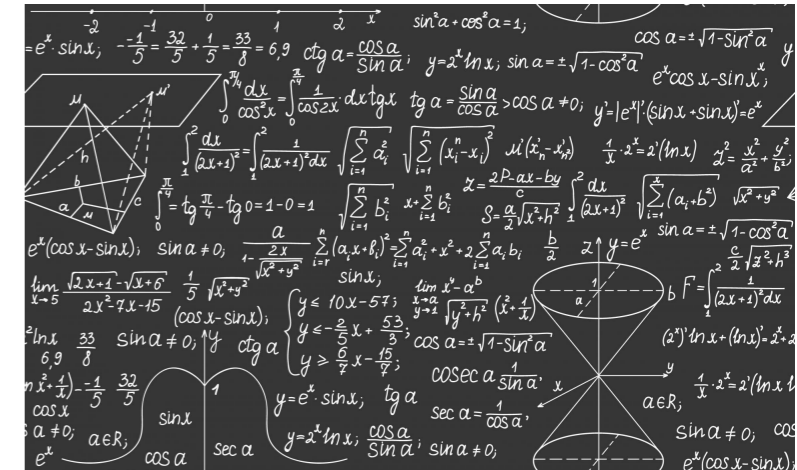
Obiezioni...

ma la semantica è più difficile da formalizzare della sintassi!

metodi diversi!

richiede nozioni matematiche e logiche!

non farmi perdere tempo, voglio scrivere codice



e di conseguenza ...



SOFTWARE BUGS IN HISTORY

The Ariane 5 Disaster



SOFTWARE BUGS IN HISTORY

**Mars Climate
Orbiter Disassembly**



SOFTWARE BUGS IN HISTORY

Therac-25



SOFTWARE BUGS IN HISTORY

Losing \$460m in 45 minutes

e ancora...

Heathrow Airport has apologised for disruption after the west London hub was hit by "technical issues".

One passenger said the situation was "utter chaos" after a problem with the airport's IT system saw staff called in to help passengers get to gates on the second day of the half-term weekend.



Heathrow Airport @HeathrowAirport · 16 feb 2020

Today's technical issue has now been resolved and Heathrow's systems are returning to normal. We apologise for the inconvenience caused. Our teams will continue to monitor our systems and be on hand to provide assistance to passengers as we work to resume our regular operations.

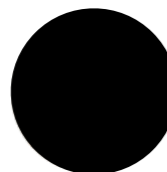
29

36

97



Risposte



· 16 feb 2020

In risposta a [@HeathrowAirport](#)

Someone turned the system off and back on again?



1



la semantica

Tre differenti approcci

I metodi di definizione della semantica si dividono in tre gruppi principali

1. Operazionale

l'accento è su come si ottiene il risultato della computazione

2. Denotazionale

solo l'effetto della computazione è interessante, non come si ottiene

3. Assiomatico

l'attenzione si concentra su asserzioni valide nella computazione

Semantica operativa



opposto ad un
dispositivo fisico
esistente

Idea: definire un qualche tipo di macchina astratta e descrivere il significato di un programma in termini di passi o istruzioni che questa macchina esegue per eseguire il compito

Motivazione:
spiegare le computazioni

l'enfasi è sugli **stati** e
le **trasformazioni**
tra stati

$$s_0 \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_n \rightarrow r$$

Padri fondatori

['70] small-step: semantica di LISP di John McCarthy (1960) e di Algol 68 (1975)

Recursive Functions of Symbolic Expressions
and Their Computation by Machine, Part I

John McCarthy, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass.

April 1960

['80] approccio SOS: Gordon Plotkin ha introdotto la **semantica operativa strutturale** (orientata alla sintassi e definita induttivamente) nel 1981 (uno dei rapporti tecnici più citati nell'informatica, pubblicato in una rivista solo più di 20 anni dopo).

$$\frac{\langle e_0, \sigma \rangle \longrightarrow \langle e'_0, \sigma \rangle}{\langle e_0 + e_1, \sigma \rangle \longrightarrow \langle e'_0 + e_1, \sigma \rangle}$$

['90] big-step: Gilles Kahn ha introdotto la semantica naturale nel 1987, dove il risultato è calcolato in un solo passo

$$s_0 \longrightarrow r$$

Panoramica

La relazione di transizione è tipicamente definita induttivamente, da assiomi e regole di inferenza secondo la sintassi del programma (stile SOS).

Vantaggi:

traduzione immediata in programmazione logica;

prototipo di interprete Prolog (quasi) gratuito;

forti connessioni con la sintassi del linguaggio;

utile per individuare comportamenti sotto specificati;

le regole per i diversi costrutti sono ordinatamente separate;

la matematica coinvolta di solito non è molto complicata;

le descrizioni SOS sono facili da leggere, anche per i non specialisti;

Semantica denotazionale

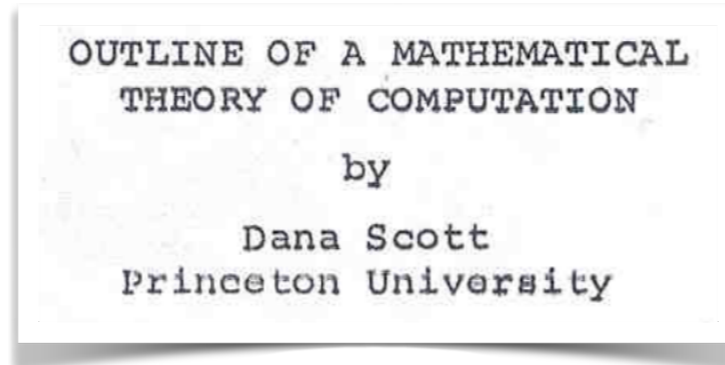
Idea: il significato di un programma è un oggetto matematico (per esempio una funzione da input a output) e i passi fatti per calcolare il risultato non sono importanti

$\llbracket \cdot \rrbracket : \text{Programs} \rightarrow \text{Domains}$

Motivazione: le funzioni sono indipendenti da come vengono calcolate e quindi sono più semplici della sequenza di operazioni passo dopo passo della semantica operativa

Padri fondatori

['60/'70]: Christopher Strachey and Dana Scott



Principio di composizione: la semantica e' una funzione che assegna un elemento di qualche dominio matematico a ogni singolo costrutto in modo tale che

il significato di un costrutto composto non dipende dalla forma particolare dei costrutti costituenti, ma solo dai loro significati

Panoramica

Vantaggi:

matematicamente elegante;

utile per individuare comportamenti sotto specificati;

può essere usato per derivare implementazioni di prototipi;

è servito come ispirazione per molti linguaggi di

programmazione;

difficile da applicare a sistemi concorrenti e interattivi

Semantica assiomatica

Idea: descrivere i costrutti di un linguaggio di programmazione fornendo assiomi logici che sono soddisfatti da questi costrutti

Motivazione: dimostrare la correttezza di un programma rispetto ad una data specifica

$$\vdash \{P\} c \{Q\}$$

Padri fondatori

['60]: Robert W. Floyd (1967) and Tony Hoare (1969)

Robert W. Floyd

ASSIGNING MEANINGS TO PROGRAMS¹

An Axiomatic Basis for
Computer Programming

C. A. R. HOARE

The Queen's University of Belfast, Northern Ireland*

Logica di Hoare: una dichiarazione è accompagnata da una precondizione (lo stato prima dell'esecuzione) e una postcondizione (lo stato dopo l'esecuzione)

Il significato di un programma è una proposizione logica che afferma alcune proprietà dell'output ogniqualvolta alcune proprietà dell'input sono soddisfatte

Panoramica

Vantaggi:

enfasi sulla correttezza delle prove fin dall'inizio;
sistemi di prove sorprendentemente eleganti;
può essere usato per dimostrare l'assenza di bug;
difficile da applicare a sistemi concorrenti e interattivi

Non fate la guerra

Le diverse semantiche sono spesso viste in opposizione tra loro, ma non dovrebbe essere così!

Possiamo ottenere molto di più dalla loro combinazione!



In questo corso

Ci concentriamo sulla semantica operativa e denotazionale!

Vedremo le idee e i metodi fondamentali dietro questi approcci e sottolineeremo le loro relazioni, dimostrando alcuni teoremi di corrispondenza rilevanti.

$$s_0 \rightarrow r$$

$$[[\cdot]] : \text{Programs} \rightarrow \text{Domains}$$

L'idea dietro i differenti approcci

Un semplice linguaggio

Sintassi informale delle **espressioni booleane**

- TT e FF sono espressioni booleane;
- se B_1 e B_2 sono espressioni booleane allora anche $B_1 \triangle B_2$;
- se B_1 e B_2 sono espressioni booleane allora anche $B_1 \square B_2$.

Sintassi

sintassi	1	0
per true e	TT	FF
false		
Falso	Vero	

Semantica

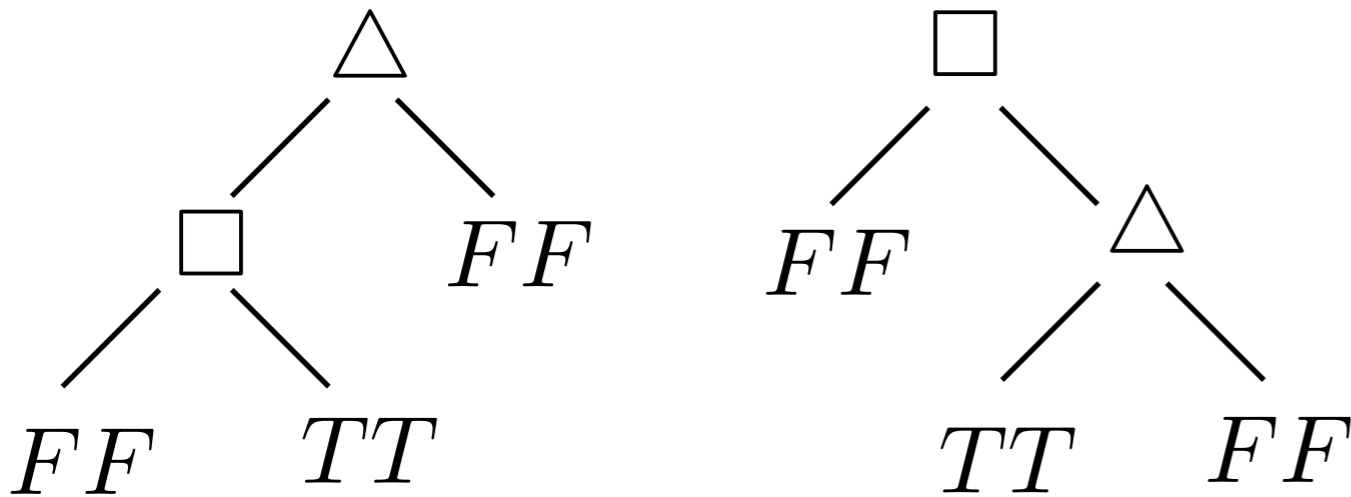
$True \in \mathbb{B}$ Oggetti logici,
 $False \in \mathbb{B}$ concetti

Sintassi formale

$$B ::= TT \mid FF \mid B \square B \mid B \triangle B$$

$\square TT \triangle FF$ non e' un espressione numerica ben formata

data la sequenza $FF \square TT \triangle FF$



ha due diversi alberi di sintassi astratta

Decidiamo una precedenza:

$$(FF \square TT) \triangle FF$$

E correggiamo la grammatica per evitare ambiguita'

Dare un significato

$$B ::= TT \mid FF \mid B \square B \mid B \triangle B$$

questa e' solo sintassi!

e' TT necessariamente un booleano?

e' \square necessariamente l'and booleano?

e' \triangle necessariamente l'or booleano ?

forse stiamo parlando di
matrici con addizione e moltiplicazione

o insiemi con unione e intersezione

o stringhe con concatenazione e minimo prefisso
comune

o alberi con due forme di fusione

Semantica informale

Semantica informale delle espressioni booleane

- Valutiamo TT o FF al corrispondente valore booleano;
- Per valutare $B_1 \triangle B_2$ valutiamo se B_1 e B_2 e poi calcoliamo l'or;
- Per valutare $B_1 \square B_2$ valutiamo se B_1 e B_2 e poi calcoliamo l'and.

Tre regole sono sufficienti per determinare il valore di qualsiasi espressione ben formata, non importa quanto grande

Semantica small-steps

Espressioni booleane runtime

$B ::= \textit{True} | \textit{False} | TT | FF | B \square B | B \Delta B$

Lo stato della macchina astratta può mescolare risultati intermedi con espressioni booleane

un passo

$B_0 \rightarrow B_1$

una valutazione

$B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow \textit{True}$

che puo' essere scritta

$B_0 \rightarrow^* \textit{True}$

ci aspettiamo che

$\textit{True} \not\rightarrow \textit{False} \not\rightarrow$

Come definiamo la relazione di transizione?

$B_0 \rightarrow B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_k \rightarrow \textit{True}$

Regole di inferenza

regole di
inferenza

$(\textit{nome regola}) \frac{\textit{premesse}}{\textit{conclusioni}} \textit{condizione}$

Se le premesse e la condizione sono soddisfatte, allora si può trarre la conclusione

La conclusione è un'unica proposizione

Le premesse consistono in uno, nessuno o più proposizioni

La condizione è un predicato logico

Il nome della regola è solo una comoda etichetta

Semantica SOS per le espressioni booleane

$$(True) \frac{}{TT \rightarrow True}$$

$$(False) \frac{}{FF \rightarrow False}$$

$$(Triangle) \frac{}{v_1 \Delta v_2 \rightarrow v} \quad v = v_1 \vee v_2$$

$$(TriangleL) \frac{B_1 \rightarrow B'_1}{B_1 \Delta B_2 \rightarrow B'_1 \Delta B_2}$$

$$(TriangleR) \frac{B_1 \rightarrow B'_1}{v_0 \Delta B_1 \rightarrow v_0 \Delta B'_1}$$

N. B. Abbiamo imposto valutazione da sinistra a destra...altre scelte erano possibili

Semantica SOS per le espressioni booleane

$$(Box) \frac{}{v_1 \square v_2 \rightarrow v} \quad v = v_1 \wedge v_2$$

$$(BoxL) \frac{B_1 \rightarrow B'_1}{B_1 \square B_2 \rightarrow B'_1 \square B_2}$$

$$(BoxR) \frac{B_1 \rightarrow B'_1}{v_0 \square B_1 \rightarrow v_0 \square B'_1}$$

N. B. Abbiamo imposto valutazione da sinistra a destra...altre scelte erano possibili

Alcune derivazioni

$$\begin{array}{c}
 (True) \frac{}{TT \rightarrow True} \\
 (BoxL) \frac{}{(TT \Box TT) \rightarrow (True \Box TT)} \\
 (TriangleL) \frac{}{(TT \Box TT) \Delta (TT \Delta FF) \rightarrow (True \Box TT) \Delta (TT \Delta FF)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 (True) \frac{}{TT \rightarrow True} \\
 (BoxR) \frac{}{(True \Box TT) \rightarrow (True \Box True)} \\
 (TriangleL) \frac{}{(True \Box TT) \Delta (TT \Delta FF) \rightarrow (True \Box True) \Delta (TT \Delta FF)}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 (Box) \frac{}{(True \Box True) \rightarrow True} \quad True = True \wedge True \\
 (TriangleL) \frac{}{(True \Box True) \Delta (TT \Delta FF) \rightarrow True \Delta (TT \Delta FF)}
 \end{array}$$

Linguaggio delle espressioni numeriche

Sintassi informale delle espressioni numeriche

- ogni numerale N è un'espressione;
- se E_1 e E_2 sono espressioni, allora anche $E_1 \oplus E_2$ è un'espressione;
- se E_1 e E_2 sono espressioni, allora anche $E_1 \otimes E_2$ è un'espressione.

N	numerali vs numeri	n
syntassi	5	
per scrivere i	1 0 1	
numeri	cinque	oggetti matematici, concetti
		$5 \in \mathbb{N}$

Espressioni numeriche

$$E ::= n \mid N \mid E \oplus E \mid E \otimes E$$

Espressioni numeriche runtime

una valutazione $E_0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow \dots \rightarrow E_k \rightarrow n$

che puo' essere scritta $E_0 \rightarrow^* n$

ci aspettiamo che $n \not\rightarrow$

Semantica informale

Semantica informale delle espressioni numeriche

- un numerale N viene valutato al suo corrispondente valore n ;
- per valutare $E_1 \oplus E_2$ valutiamo E_1 e E_2 e poi sommiamo i valori;
- per valutare $E_1 \otimes E_2$ valutiamo E_1 e E_2 e poi moltiplichiamo i valori;

Notate che non stiamo dicendo l'ordine di valutazione degli argomenti: è importante?

Semantica small steps

$$(num) \frac{}{N \rightarrow n}$$

$$(sum) \frac{}{n_0 \oplus n_1 \rightarrow n} \quad n = n_0 + n_1$$

$$(sumL) \frac{E_0 \rightarrow E'_0}{E_0 \oplus E_1 \rightarrow E'_0 \oplus E_1}$$

$$(sumR) \frac{E_1 \rightarrow E'_1}{E_0 \oplus E_1 \rightarrow E_0 \oplus E'_1}$$

$$(prod) \frac{}{}$$

$$(prodL) \frac{}{}$$

$$(prodR) \frac{}{}$$

N. B. Non abbiamo imposto un ordine di valutazione

Alcune derivazioni

$$\begin{array}{c} (num) \frac{}{1 \rightarrow 1} \\ (sumL) \frac{}{(1 \oplus 2) \rightarrow (1 \oplus 2)} \\ (prodL) \frac{}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \rightarrow (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (num) \frac{}{2 \rightarrow 2} \\ (sumR) \frac{}{(1 \oplus 2) \rightarrow (1 \oplus 2)} \\ (prodL) \frac{}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \rightarrow (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4)} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (sum) \frac{}{(1 \oplus 2) \rightarrow 3} \quad 3 = 1 + 2 \\ (prodL) \frac{}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \rightarrow 3 \otimes (3 \oplus 4)} \end{array}$$

Una computazione

$$\begin{aligned} (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) &\rightarrow (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \\ &\rightarrow (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \\ &\rightarrow 3 \otimes (3 \oplus 4) \\ &\rightarrow 3 \otimes (3 \oplus 4) \\ &\rightarrow 3 \otimes (3 \oplus 4) \\ &\rightarrow 3 \otimes 7 \\ &\rightarrow 21 \\ &\nearrow \end{aligned}$$

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \rightarrow^* 21$$

Un'altra computazione

$$\begin{aligned}(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) &\rightarrow (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \\ &\rightarrow (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \\ &\rightarrow (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \\ &\rightarrow (1 \oplus 2) \otimes 7 \\ &\rightarrow (1 \oplus 2) \otimes 7 \\ &\rightarrow 3 \otimes 7 \\ &\rightarrow 21 \\ &\nearrow\end{aligned}$$

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \rightarrow^* 21$$

Confluenza?

Abbiamo visto che ci sono molte sequenze di valutazione diverse (non determinismo)

Abbiamo la garanzia che portino tutti allo stesso risultato?

Possiamo cambiare le regole di inferenza per imporre una specifica strategia di valutazione (determinismo)

Per esempio, possiamo imporre una valutazione da sinistra a destra degli argomenti cambiando le regole (sumR) e (prodR)

Strategia di valutazione

$$(num) \frac{}{N \rightarrow n}$$

$$(sum) \frac{}{n_0 \oplus n_1 \rightarrow n} \quad n = n_0 + n_1$$

$$(sumL) \frac{E_0 \rightarrow E'_0}{E_0 \oplus E_1 \rightarrow E'_0 \oplus E_1}$$

$$(sumR) \frac{E_1 \rightarrow E'_1}{n_0 \oplus E_1 \rightarrow n_0 \oplus E'_1}$$

$$(prod) \frac{}{}$$

$$(prodL) \frac{}{}$$

$$(prodR) \frac{}{}$$

N. B. Ora abbiamo una valutazione da sinistra a destra

Semantica SOS per le espressioni booleane

$$(True) \frac{}{TT \rightarrow True}$$

$$(False) \frac{}{FF \rightarrow False}$$

$$(Triangle) \frac{}{v_1 \Delta v_2 \rightarrow v} \quad v = v_1 \vee v_2$$

$$(TriangleL) \frac{B_1 \rightarrow B'_1}{B_1 \Delta B_2 \rightarrow B'_1 \Delta B_2}$$

$$(TriangleR) \frac{B_1 \rightarrow B'_1}{v_0 \Delta B_1 \rightarrow v_0 \Delta B'_1}$$

N. B. Abbiamo imposto valutazione da sinistra a destra...altre scelte erano possibili

Una computazione

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \rightarrow (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4)$$

$$\rightarrow (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4)$$

$$\rightarrow 3 \otimes (3 \oplus 4)$$

Ora e' unica!

$$\rightarrow 3 \otimes (3 \oplus 4)$$

$$\rightarrow 3 \otimes (3 \oplus 4)$$

$$\rightarrow 3 \otimes 7$$

$$\rightarrow 21$$

\nrightarrow

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \rightarrow^* 21$$

Semantica big-step

un
passo $B_0 \longrightarrow v$ $E_0 \longrightarrow n$

rappresenta tutta
una computazione!

Come definire la relazione di transizione?

Di solito più semplice delle regole della small-step

Può corrispondere ad un interprete efficiente

Regole big steps

$$(True) \frac{}{TT \rightarrow True}$$

$$(False) \frac{}{FF \rightarrow False}$$

$$(Triangle) \frac{B_0 \longrightarrow v_0 \quad B_1 \longrightarrow v_1 \quad v = v_0 \vee v_1}{B_0 \triangle B_1 \longrightarrow v}$$

$$(Box) \frac{B_0 \longrightarrow v_0 \quad B_1 \longrightarrow v_1 \quad v = v_0 \wedge v_1}{B_0 \square B_1 \longrightarrow v}$$

Regole big steps

$$(num) \frac{}{N \longrightarrow n}$$

$$(sum) \frac{E_0 \longrightarrow n_0 \quad E_1 \longrightarrow n_1}{E_0 \oplus E_1 \longrightarrow n} \quad n = n_0 + n_1$$

$(prod)$ _____

Una derivazione

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} (num) \frac{}{1 \longrightarrow 1} \quad (num) \frac{}{2 \longrightarrow 2} \\ (sum) \frac{}{\hline} \end{array} \quad \begin{array}{c} (num) \frac{}{3 \longrightarrow 3} \quad (num) \frac{}{4 \longrightarrow 4} \\ (sum) \frac{}{\hline} \end{array} \\ \begin{array}{c} (prod) \frac{}{\hline} \\ (1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21 \end{array} \end{array}$$

non può esprimere calcoli non terminanti

(le derivazioni sono possibili solo per i programmi che terminano)

Semantica denotazionale

un dominio + una funzione di interpretazione

$$\mathbb{B} \quad \mathcal{B}[\cdot] : Exp \rightarrow \mathbb{B}$$

$$\mathbb{N} \quad \mathcal{E}[\cdot] : Exp \rightarrow \mathbb{N}$$

la scelta del dominio ha
conseguenze immediate:
chiunque sa già che le
espressioni booleane e
aritmetiche sono deterministiche
e terminano

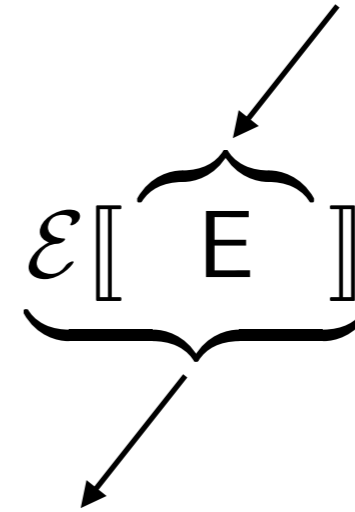
ogni espressione ha
al massimo una
risposta

ogni espressione
ha una risposta

categorie sintattiche diverse
richiedono domini diversi!

(\mathbb{B} e \mathbb{N})

un termine
(un pezzo di sintassi)



la sua denotazione
(un oggetto semantico)

Induzione strutturale

$$\mathcal{B}[\text{TT}] = \textit{True}$$

$$\mathcal{B}[\text{FF}] = \textit{False}$$

$$\mathcal{E}[\text{N}] = n$$

$$\mathcal{B}[\text{B}_0 \triangle \text{B}_1] = \mathcal{B}[\text{B}_0] \vee \mathcal{B}[\text{B}_1]$$

$$\mathcal{E}[\text{E}_0 \oplus \text{E}_1] = \mathcal{E}[\text{E}_0] + \mathcal{E}[\text{E}_1]$$

$$\mathcal{B}[\text{B}_0 \square \text{B}_1] = \mathcal{B}[\text{B}_0] \wedge \mathcal{B}[\text{B}_1]$$

$$\mathcal{E}[\text{E}_0 \otimes \text{E}_1] = \mathcal{E}[\text{E}_0] \cdot \mathcal{E}[\text{E}_1]$$

principio di composizionalità'

il significato di un costrutto composto non dipende dalla forma particolare dei costrutti costituenti, ma solo dai loro significati

Una valutazione

$$\begin{aligned}\mathcal{B}[(TT \square FF) \Delta TT] &= \mathcal{B}[TT \square FF] \vee \mathcal{B}[TT] \\ &= (\mathcal{B}[TT] \wedge \mathcal{B}[FF]) \vee \mathcal{B}[TT] \\ &= (True \wedge False) \vee True \\ &= True\end{aligned}$$

Una valutazione

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4)] &= \mathcal{E}[1 \oplus 2] \cdot \mathcal{E}[3 \oplus 4] \\ &= (\mathcal{E}[1] + \mathcal{E}[2]) \cdot (\mathcal{E}[3] + \mathcal{E}[4]) \\ &= (1 + 2) \cdot (3 + 4) \\ &= 21\end{aligned}$$

Confronto

$$E \rightarrow^* n$$

$$E \longrightarrow n$$

$$\mathcal{E}[[E]] = n$$

terminazione?

$$\forall E. \exists n. E \rightarrow^* n$$

da dimostrare

$$\forall E. \exists n. E \longrightarrow n$$

da dimostrare

$$\forall E. \exists n. \mathcal{E}[[E]] = n$$

ovvio

Confronto

determinismo?

$$\forall E, n, m. \left(\begin{array}{l} E \rightarrow^* n \\ \wedge \\ E \rightarrow^* m \end{array} \right) \Rightarrow n = m \quad \text{da dimostrare}$$

$$\forall E, n, m. \left(\begin{array}{l} E \longrightarrow n \\ \wedge \\ E \longrightarrow m \end{array} \right) \Rightarrow n = m \quad \text{da dimostrare}$$

$$\forall E, n, m. \left(\begin{array}{l} \mathcal{E}[E] = n \\ \wedge \\ \mathcal{E}[E] = m \end{array} \right) \Rightarrow n = m \quad \text{ovvio}$$

Confronto

$$E \rightarrow^* n$$

$$E \longrightarrow n$$

$$\mathcal{E}[[E]] = n$$

consistenza?

$$\forall E, n. (E \rightarrow^* n \iff E \longrightarrow n \iff \mathcal{E}[[E]] = n)$$

Da dimostrare

Confronto

equivalenze indotte

$$E_0 \equiv_s E_1$$

$$\forall n. (E_0 \rightarrow^* n \Leftrightarrow E_1 \rightarrow^* n)$$

$$E_0 \equiv_b E_1$$

$$\forall n. (E_0 \longrightarrow n \Leftrightarrow E_1 \longrightarrow n)$$

$$E_0 \equiv_d E_1$$

$$\mathcal{E}[[E_0]] = \mathcal{E}[[E_1]]$$

coincidono?

Confronto

possiamo provare che sono vere/false:

proprietà' di specifiche espressioni

$$2 \otimes 6 \equiv_s 3 \otimes 4$$

proprietà' di espressioni generiche

$$\forall E, E_1, E_2. E \otimes (E_1 \oplus E_2) \equiv_d (E \otimes E_1) \oplus (E \otimes E_2)$$

Esercizio

Espressioni con variabili

$$E ::= x \mid N \mid E \oplus E \mid E \otimes E$$

Come valutare espressioni come $(x \oplus 4) \otimes y$?

Abbiamo bisogno della memoria $\mathbb{M} \triangleq \{\sigma \mid \sigma : X \rightarrow \mathbb{N}\}$

Gli stati della macchina $\langle E, \sigma \rangle$

Funzione di interpretazione $\mathcal{E}[\cdot] : Exp \rightarrow (\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N})$

Ridefinite le varie semantiche

Semantica operativa small steps

$$\mathbb{M} \triangleq \{\sigma \mid \sigma : X \rightarrow \mathbb{N}\} \quad \text{Stati } \langle E, \sigma \rangle$$

$$(num) \frac{}{\mathbb{N} \rightarrow n}$$

$$(sum) \frac{}{n_0 \oplus n_1 \rightarrow n}$$

$$(sumL) \frac{E_0 \rightarrow E'_0}{E_0 \oplus E_1 \rightarrow E'_0 \oplus E_1}$$

$$(sumR) \frac{E_1 \rightarrow E'_1}{n_0 \oplus E_1 \rightarrow n_0 \oplus E'_1}$$

Semantica operativa big steps

$$\mathbb{M} \triangleq \{\sigma \mid \sigma : X \rightarrow \mathbb{N}\}$$

Stati $\langle E, \sigma \rangle$

$$(num) \frac{}{\mathbb{N} \longrightarrow n}$$

$$(sum) \frac{E_0 \longrightarrow n_0 \quad E_1 \longrightarrow n_1}{E_0 \oplus E_1 \longrightarrow n}$$

Semantica denotazionale

$$\mathbb{M} \triangleq \{\sigma \mid \sigma : X \rightarrow \mathbb{N}\} \quad \mathcal{E}[\cdot] : Exp \rightarrow (\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{N})$$

$$\mathcal{E}[\mathbb{N}] = n$$

$$\mathcal{E}[\mathbb{E}_0 \oplus \mathbb{E}_1] = \mathcal{E}[\mathbb{E}_0] + \mathcal{E}[\mathbb{E}_1]$$

$$\mathcal{E}[\mathbb{E}_0 \otimes \mathbb{E}_1] = \mathcal{E}[\mathbb{E}_0] \cdot \mathcal{E}[\mathbb{E}_1]$$