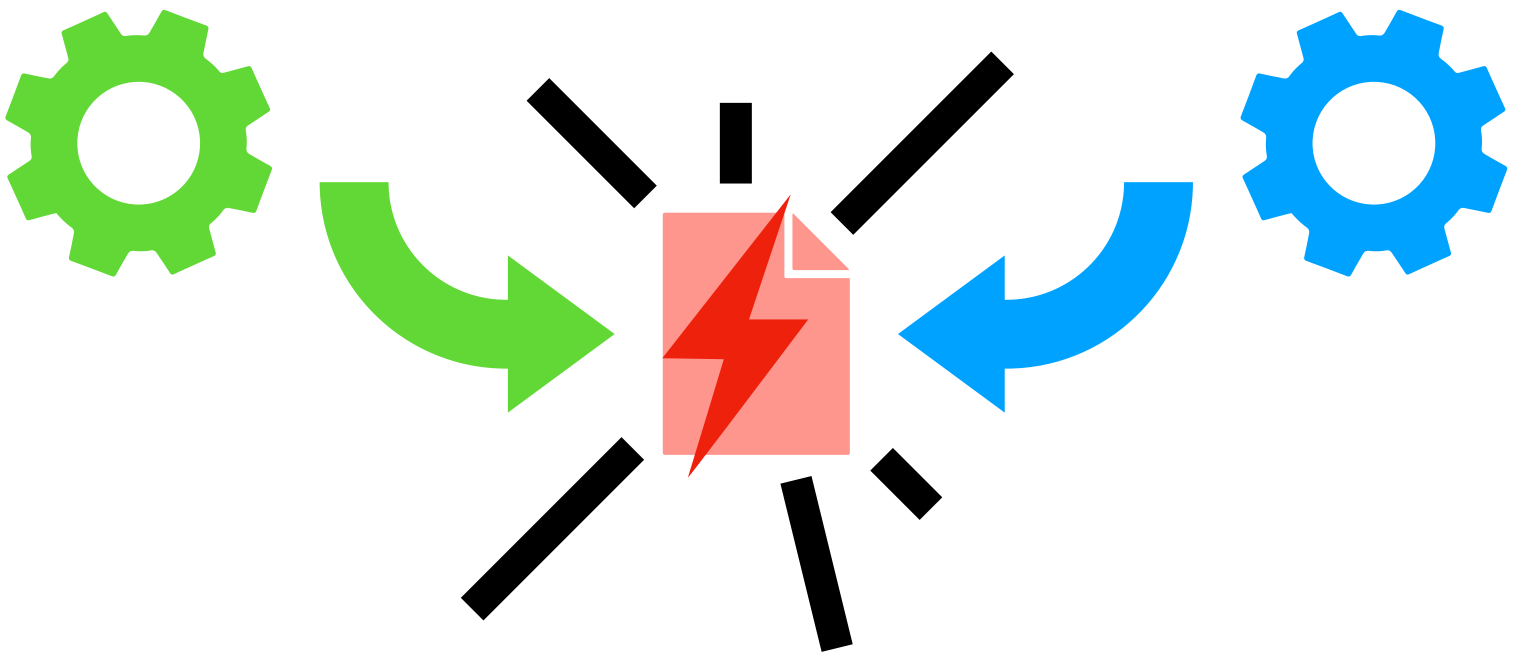
Linguaggi di Programmazione



Roberta Gori

Capitolo 2.1

Inferenza

Come applicare le regole SOS

1. un goal

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow m$$

Come applicare le regole SOS

$$(prod)\,\frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \qquad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\mathsf{E}_0 \otimes \mathsf{E}_1 \longrightarrow n}\ n = n_0 \cdot n_1$$

2. prendiamo una regola

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow m$$

Come applicare le regole SOS

$$(prod)\,\frac{\mathsf{E}_0 \longrightarrow n_0 \qquad \mathsf{E}_1 \longrightarrow n_1}{\boxed{\mathsf{E}_0 \otimes \mathsf{E}_1 \longrightarrow n}}\ \ n = n_0 \cdot n_1$$

3. unificchiamo
(se possibile)

$$\mathsf{E}_0 = 1 \oplus 2$$
$$\mathsf{E}_1 = 3 \oplus 4$$
$$n = m$$

$$\boxed{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow m}$$

Come applicare le regole SOS

$$(prod)\,\frac{1 \oplus 2 \longrightarrow n_0 \qquad 3 \oplus 4 \longrightarrow n_1}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow m}\; m = n_0 \cdot n_1$$

4. instanziamo

$$\boxed{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow m}$$

Come applicare le regole SOS

$$(prod)\frac{\boxed{1 \oplus 2 \longrightarrow n_0} \quad \boxed{3 \oplus 4 \longrightarrow n_1}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow m}\; m = n_0 \cdot n_1$$

5. ricorsivamente risolviamo i sotto-goal

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow m$$

Come applicare le regole SOS

$$(prod)\,\frac{1 \oplus 2 \longrightarrow \boxed{3} \quad 3 \oplus 4 \longrightarrow \boxed{7}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow m} \quad m = \boxed{3 \cdot 7}$$

6. combiniamo i risultati

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow m$$

SOS rule application?

$$(prod)\,\frac{1 \oplus 2 \longrightarrow 3 \qquad 3 \oplus 4 \longrightarrow 7}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow \boxed{21}}$$

7. restituiamo il risultato

$$(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow \boxed{21}$$

Processo di deduzione

$$(\mathit{rule\ name})\,\frac{\mathit{premises}}{\mathit{conclusion}}\,\mathit{side\ condition}$$

$$\mathit{goal}$$

Segnature

Segnature (senza tipi)

$$(\Sigma, ar)$$

un insieme di simboli di funzione
(chiamati anche operatori)

$$\Sigma = \{c, f, g, ...\}$$

arieta' di una funzione

$$ar : \Sigma \to \mathbb{N}$$

ogni simbolo di funzione ha un'arieta'

Esempio

$ar(c) = 0$ constante

$ar(f) = 1$ unaria

$ar(g) = 2$ binaria

$ar(h) = 3$ ternaria

....o equivalentemente

$$(\Sigma, ar)$$

let $\Sigma_n \triangleq ar^{-1}(n)$
$= \{f \in \Sigma \mid ar(f) = n\}$

una segnatura è una famiglia di insiemi di operatori indicizzati dall'arieta'

$$\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

Termini su una segnatura

$\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una segnatura

$X = \{x, y, z, ...\}$ un insieme infinito di variabili

$T_{\Sigma,X}$ denota l'insieme di tutti i termini su Σ, X

e' il piu' piccolo insieme tale che:

- se $x \in X$, allora $x \in T_{\Sigma,X}$
- se $c \in \Sigma_0$, allora $c \in T_{\Sigma,X}$
- se $f \in \Sigma_n$ e $t_1, ..., t_n \in T_{\Sigma,X}$, allora $f(t_1, ..., t_n) \in T_{\Sigma,X}$

ovvero $$T_{\Sigma,X} \ni t ::= \underset{x\in X}{x} \mid \underset{c\in\Sigma_0}{c} \mid \underset{f\in\Sigma_n}{f(t_1, ..., t_n)}$$

Esempio

$$\Sigma = \{a, f/1, g/2\}$$

$$X = \{\mathsf{y}\}$$

$$T_{\Sigma,X} = \{\ a, \mathsf{y}, f(a), f(\mathsf{y}),$$

$$g(a,a), g(a,\mathsf{y}), g(\mathsf{y},\mathsf{y}), g(\mathsf{y},a)$$

$$f(f(a)), f(f(\mathsf{y})), f(g(a,a)), f(g(a,\mathsf{y})), f(g(\mathsf{y},\mathsf{y})), f(g(\mathsf{y},a))$$

$$g(f(a), f(a)), g(f(a), f(\mathsf{y})), g(f(\mathsf{y}), f(a)), g(f(\mathsf{y}), f(\mathsf{y})), \ldots$$

$$\}$$

Vars

$$\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \quad X = \{x, y, z, ...\}$$

$t \in T_{\Sigma,X}$ $\quad vars(t)$ l'insieme di variabili che appare in *t*

$$vars : T_{\Sigma,X} \to \wp(X)$$

$$vars(x) \triangleq \{x\} \qquad vars(c) \triangleq \varnothing$$

$$vars(f(t_1, ..., t_n)) \triangleq \bigcup_{i=1}^{n} vars(t_i)$$

$$T_\Sigma \triangleq vars^{-1}(\varnothing) = \{t \in T_{\Sigma,X} \mid vars(t) = \varnothing\}$$

Esempio

$\Sigma = \{a, f/1, g/2\}$ $\qquad\qquad$ $X = \{\mathsf{y}\}$

$$T_{\Sigma,X} = \{ \quad a, \mathsf{y}, f(a), f(\mathsf{y}),$$
$$g(a,a), g(a,\mathsf{y}), g(\mathsf{y},\mathsf{y}), g(\mathsf{y},a)$$
$$f(f(a)), f(f(\mathsf{y})), f(g(a,a)), f(g(a,\mathsf{y})), f(g(\mathsf{y},\mathsf{y})), f(g(\mathsf{y},a))$$
$$g(f(a), f(a)), g(f(a), f(\mathsf{y})), g(f(\mathsf{y}), f(a)), g(f(\mathsf{y}), f(\mathsf{y})), \ldots$$
$$\}$$

$$T_{\Sigma} = \{ \quad a, f(a),$$
$$g(a,a),$$
$$f(f(a)), f(g(a,a)),$$
$$g(f(a), f(a)), \ldots$$
$$\}$$

Esempio

$$\Sigma_0 = \{0\}$$

$$\Sigma_1 = \{\mathsf{succ}\}$$

$$\Sigma_2 = \{\mathsf{plus}\}$$

$$\Sigma_n = \varnothing \qquad \text{if } n > 2$$

Esercizio

completiamo lo schema

t	$t \in ?$	$vars(t)$
0	◉ T_Σ ○ $T_{\Sigma,X}$	$\emptyset$
x	○ T_Σ ◉ $T_{\Sigma,X}$	$\{x\}$
$\mathsf{succ}(0)$	○ T_Σ ○ $T_{\Sigma,X}$	
$\mathsf{succ}(x)$	○ T_Σ ○ $T_{\Sigma,X}$	
$\mathsf{succ}(\mathsf{plus}(0), x)$	○ T_Σ ○ $T_{\Sigma,X}$	
$\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), 0)$	○ T_Σ ○ $T_{\Sigma,X}$	
$\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(0), \mathsf{plus}(x))$	○ T_Σ ○ $T_{\Sigma,X}$	
$\mathsf{succ}(\mathsf{plus}(w, z))$	○ T_Σ ○ $T_{\Sigma,X}$	
$\mathsf{plus}(\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y)), \mathsf{plus}(0, \mathsf{succ}(x)))$	○ T_Σ ○ $T_{\Sigma,X}$	

Sostituzioni

$\rho : X \to T_{\Sigma,X}$ una sostituzione assegna un termine alle variabili

consideriamo sostituzioni che sono identità ovunque, tranne un numero finito di casi, scritto

$$\rho = [x_1 = t_1 \, , \, \dots \, , \, x_n = t_n]$$

tutte diverse

$$\rho(x) = \begin{cases} t_i & \text{if } x = x_i \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

indichiamo allo stesso modo la funzione sui termini $\rho : T_{\Sigma,X} \to T_{\Sigma,X}$

$\rho(t)$ denota il termine ottenuto dall'applicazione simultanea della sostituzione a tutte le occorrenze delle variabile in t

$t\rho$ notazione alternativa

Esempio

$$\rho \triangleq [\, x = \mathsf{succ}(y) \, , \; y = \mathsf{0}]$$

$$t \triangleq \mathsf{plus}(\, \mathsf{plus}(x, y) \, , \; \mathsf{succ}(x) \,)$$

$$t\rho = \mathsf{plus}(\, \mathsf{plus}(\mathsf{succ}(y), \mathsf{0}) \, , \; \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y)) \,)$$

la relazione mgt (more general than)

$$t \text{ è più generale di } t' \text{ se } \exists \rho . t' = t\rho$$

nel qual caso diciamo anche che t' è un istanza di t

$\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(y))$	mgt	$\mathsf{plus}(0, \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(z)))$
$\mathsf{plus}(0, x)$	~~mgt~~	$\mathsf{plus}(y, 0)$
$\mathsf{plus}(y, 0)$	~~mgt~~	$\mathsf{plus}(0, x)$
$\mathsf{plus}(0, x)$ $\mathsf{plus}(y, 0)$	mgt	$\mathsf{plus}(0, 0)$

relazione mgt

mgt e' transitiva e riflessiva

$t \text{ mgt } t$

se $(t_1 \text{ mgt } t_2)$ e $(t_2 \text{ mgt } t_3)$ allora $(t_1 \text{ mgt } t_3)$

ci sono termini $t \neq t'$ tali che $(t \text{ mgt } t')$ e $(t' \text{ mgt } t)$

$\mathsf{succ}(x) \quad \mathsf{succ}(y)$

se consideriamo le classi di equivalenza rispetto al renaming sostituzioni che mappano variabili in variabili
$\rho = [x = y]$ otteniamo un ordine sui termini

e sulle sostituzioni

mgt puo' essere esteso alle sostituzioni

$\rho \ \mathsf{mgt} \ \rho'$ se $\exists \rho''. \ \forall x. \ \rho'(x) = \rho''(\rho(x))$

Problema dell'unificazione

Il problema di unificazione nella sua forma più semplice (sintattica, del primo ordine) può essere espresso come segue:

Dato un insieme di possibili eguaglianze (sintattiche)

$$\mathcal{G} = \{\ell_1 \stackrel{?}{=} r_1, ..., \ell_n \stackrel{?}{=} r_n\}$$

where $\ell_1, ..., \ell_n, r_1, ..., r_n \in T_{\Sigma,X}$

Possiamo trovare una sostituzione ρ

$$\forall i \in [1, n].\ \rho(\ell_i) = \rho(r_i) \quad ?$$

chiamiamo tale ρ una soluzione di $\mathcal{G}$

$$sols(\mathcal{G}) \triangleq \{\rho \mid \forall i \in [1, n].\ \rho(\ell_i) = \rho(r_i)\}$$

Problema dell'unificazione

In realta' possiamo risolvere il seguente problema

Dato un insieme di possibili eguaglianze (sintattiche)

$$\mathcal{G} = \{\ell_1 \stackrel{?}{=} r_1, ..., \ell_n \stackrel{?}{=} r_n\}$$

where $\ell_1, ..., \ell_n, r_1, ..., r_n \in T_{\Sigma,X}$

Possiamo trovare la sostituzione piu' generale ρ ?

$\rho \in sols(\mathcal{G})$ and

$\forall \rho' \in sols(\mathcal{G}).\ \rho$ mgt ρ'

Algoritmo di unificazione

Idea: riduciamo iterativamente l'insieme $\mathcal{G}$ applicando delle trasformazioni che preservano la soluzione finche' non troviamo una soluzione oppure possiamo provare che tale soluzione non esiste

Le soluzioni potrebbero non esistere
e anche se esistono possono non essere uniche

Se esistono saranno uniche a meno di renaming!

Terminazione

$$\mathcal{G} = \{\ell_1 \stackrel{?}{=} r_1, ..., \ell_n \stackrel{?}{=} r_n\}$$

$$\mathcal{G} \text{ e } \mathcal{G}' \text{ sono equivalenti if } sols(\mathcal{G}) = sols(\mathcal{G}')$$

l'algoritmo termina con successo quando troviamo

$\mathcal{G}' = \{x_1 \stackrel{?}{=} t_1, ..., x_k \stackrel{?}{=} t_k\}$ equivalente a $\mathcal{G}$

tutte diverse

$$\{x_1, ..., x_k\} \cap \bigcup_{i=1}^{k} vars(t_i) = \varnothing$$

ogni siffatto $\mathcal{G}'$ costituisce una soluzione $[x = t_1, ..., x_k = t_k]$

Notazione

$$\mathcal{G} = \{\ell_1 \stackrel{?}{=} r_1, ..., \ell_n \stackrel{?}{=} r_n\}$$

$$vars(\mathcal{G}) \triangleq \bigcup_{i=1}^{n} (vars(\ell_i) \cup vars(r_i))$$

$$\mathcal{G}\rho \triangleq \{\ell_1\rho \stackrel{?}{=} r_1\rho, ..., \ell_n\rho \stackrel{?}{=} r_n\rho\}$$

Algoritmo di unificazione

delete

$$\mathcal{G} \cup \{t \stackrel{?}{=} t\}$$
becomes
$$\mathcal{G}$$

eliminate

$$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$$
becomes if $x \in vars(\mathcal{G}) \setminus vars(t)$
$$\mathcal{G}[x = t] \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$$

swap

$$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} x\}$$
becomes
$$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} f(t_1, ..., t_m)\}$$

decompose

$$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} f(u_1, ..., u_m)\}$$
becomes
$$\mathcal{G} \cup \{t_1 \stackrel{?}{=} u_1, ..., t_m \stackrel{?}{=} u_m\}$$

occur-check

$$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} f(t_1, ..., t_m)\}$$
fails if $x \in vars(f(t_1, ..., t_m))$

conflict

$$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} g(u_1, ..., u_h)\}$$
fails if $f \neq g$ or $m \neq h$

Esempio

$$\{\mathsf{plus}(\mathsf{succ}(x), x) \stackrel{?}{=} \mathsf{plus}(y, 0)\}$$

decompose

$$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, \ldots, t_m) \stackrel{?}{=} f(u_1, \ldots, u_m)\}$$

becomes

$$\mathcal{G} \cup \{t_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, t_m \stackrel{?}{=} u_m\}$$

$$\{\mathsf{succ}(x) \stackrel{?}{=} y\,,\ x \stackrel{?}{=} 0\}$$

eliminate

$$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$$

becomes if $x \in vars(\mathcal{G}) \setminus vars(t)$

$$\mathcal{G}[x = t] \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$$

$$\{\mathsf{succ}(0) \stackrel{?}{=} y\,,\ x \stackrel{?}{=} 0\}$$

swap

$$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, \ldots, t_m) \stackrel{?}{=} x\}$$

becomes

$$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} f(t_1, \ldots, t_m)\}$$

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{succ}(0)\,,\ x \stackrel{?}{=} 0\}$$

successo! $\rho = [y = \mathsf{succ}(0)\,,\ x = 0]$

Esempio

$$\{\mathsf{plus}(0, x) \stackrel{?}{=} \mathsf{succ}(y)\}$$ plus $\neq$ succ

conflict

$$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} g(u_1, ..., u_h)\}$$

fails if $f \neq g$ or $m \neq h$

fallimento!

Esempio

$$\{\mathsf{succ}(x) \stackrel{?}{=} y\,,\ \mathsf{succ}(y) \stackrel{?}{=} x\}$$

swap

$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} x\}$

becomes

$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} f(t_1, ..., t_m)\}$

$$\{\mathsf{succ}(x) \stackrel{?}{=} y\,,\ x \stackrel{?}{=} \mathsf{succ}(y)\}$$

eliminate

$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$

becomes if $x \in vars(\mathcal{G}) \setminus vars(t)$

$\mathcal{G}[x = t] \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$

$$\{\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y)) \stackrel{?}{=} y\,,\ x \stackrel{?}{=} \mathsf{succ}(y)\}$$

swap

$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} x\}$

becomes

$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} f(t_1, ..., t_m)\}$

$$\{y \stackrel{?}{=} \mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y))\,,\ x \stackrel{?}{=} \mathsf{succ}(y)\}$$

$y \in vars(\mathsf{succ}(\mathsf{succ}(y)))$

occur-check

$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} f(t_1, ..., t_m)\}$

fails if $x \in vars(f(t_1, ..., t_m))$

fallimento

Esercizio

delete

$\mathcal{G} \cup \{t \stackrel{?}{=} t\}$
become
$\mathcal{G}$

decompose

$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} f(u_1, ..., u_m)\}$
become
$\mathcal{G} \cup \{t_1 \stackrel{?}{=} u_1, ..., t_m \stackrel{?}{=} u_m\}$

swap

$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} x\}$
becomes
$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} f(t_1, ..., t_m)\}$

eliminate

$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$
becomes if $x \in vars(\mathcal{G}) \setminus vars(t)$
$\mathcal{G}[x = t] \cup \{x \stackrel{?}{=} t\}$

occur-check

$\mathcal{G} \cup \{x \stackrel{?}{=} f(t_1, ..., t_m)\}$
fails if $x \in vars(f(t_1, ..., t_m))$

conflict

$\mathcal{G} \cup \{f(t_1, ..., t_m) \stackrel{?}{=} g(u_1, ..., u_h)\}$
fails if $f \neq g$ or $m \neq h$

$$\{\mathsf{plus}(x, \mathsf{succ}(x)) \stackrel{?}{=} \mathsf{plus}(0, y)\ ,\ \mathsf{plus}(y, z) \stackrel{?}{=} \mathsf{plus}(z, w)\}$$