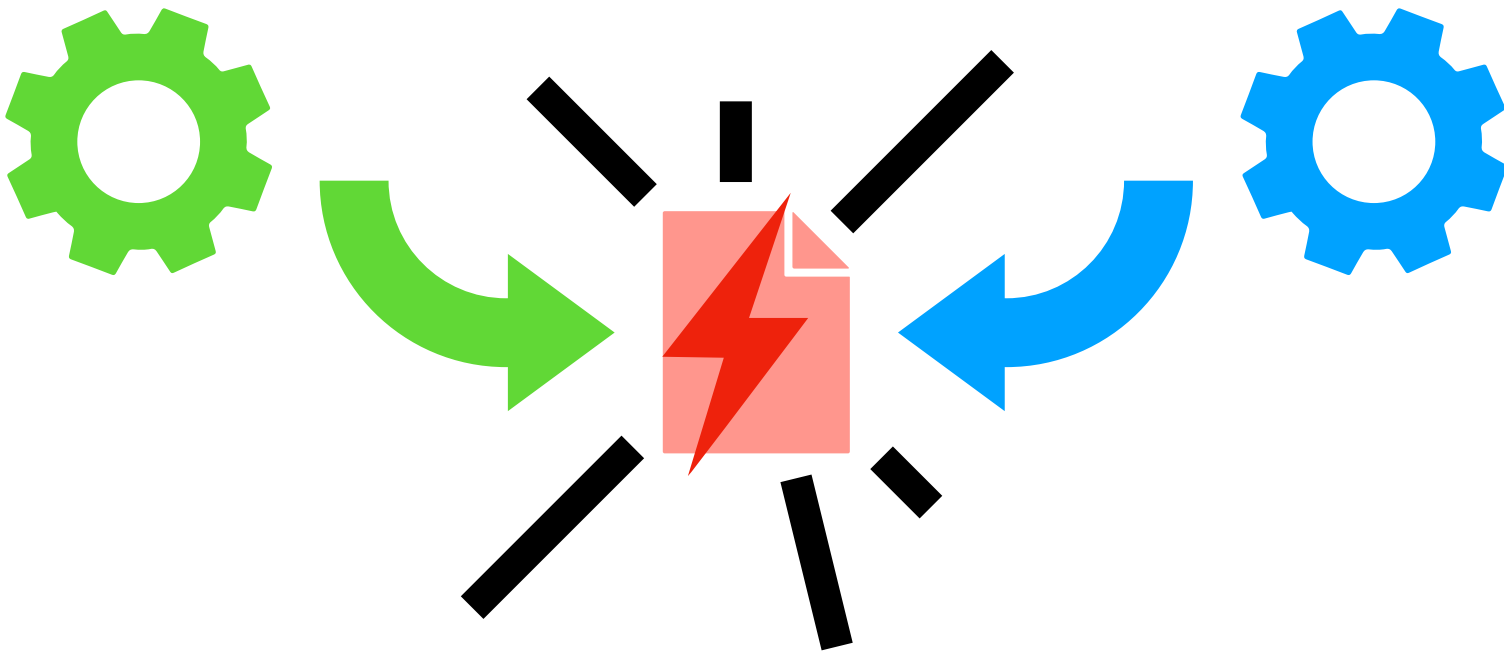


Linguaggi di Programmazione



Roberta Gori

Induzione sulle regole 4.1.7

Induzione sulle derivazioni

Derivazioni

Dato un sistema logico R , una derivazione in R , e' scritta

$$d \Vdash_R y$$

dove

- o $d = (\frac{\quad}{y}) \in R$ è un assioma di R ;
- oppure $d = (\frac{d_1, \dots, d_n}{y}) \in R$ per derivazioni $d_1 \Vdash_R x_1, \dots, d_n \Vdash_R x_n$
 $\frac{x_1, \dots, x_n}{y}$ è una regola di inferenza di R .

$\frac{x_1, \dots, x_n}{y}$ è un'istanza di una regola di inferenza che appartiene a R perché tutte le istanze appartengono a R .

$$D_R \triangleq \{d \mid d \Vdash_R y\}$$

Sotto-derivazione immediata

$$A = D_R$$

$$\prec = \left\{ \left(d_i, \frac{d_1, \dots, d_n}{y} \right) \mid d_1 \Vdash_R x_1, \dots, d_n \Vdash_R x_n, \left(\frac{x_1, \dots, x_n}{y} \right) \in R \right\}$$

(relazione di sotto-derivazione immediata)

Esempio

$$R = \left\{ \frac{}{N \longrightarrow n}, \frac{E_0 \longrightarrow n_0 \quad E_1 \longrightarrow n_1}{E_0 \oplus E_1 \longrightarrow n_0 + n_1}, \frac{E_0 \longrightarrow n_0 \quad E_1 \longrightarrow n_1}{E_0 \otimes E_1 \longrightarrow n_0 \cdot n_1} \right\}$$

$$\frac{}{2 \longrightarrow 2} \prec \frac{\frac{}{1 \longrightarrow 1} \quad \frac{}{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \prec \frac{\frac{\frac{}{1 \longrightarrow 1} \quad \frac{}{2 \longrightarrow 2}}{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3} \quad \frac{\frac{}{3 \longrightarrow 3} \quad \frac{}{4 \longrightarrow 4}}{(3 \oplus 4) \longrightarrow 7}}{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21}$$

Lemma

$$D_R, \prec \text{ e' b.f.}$$

Sia $height : D_R \rightarrow \mathbb{N}$ definita come:

$$height\left(\frac{\quad}{y}\right) \stackrel{\Delta}{=} 1 \quad \text{if } \left(\frac{\quad}{y}\right) \in R$$

$$height\left(\frac{d_1, \dots, d_n}{y}\right) \stackrel{\Delta}{=} 1 + \max_{i \in [1, n]} height(d_i) \quad \text{if } d_1 \Vdash_R x_1, \dots, d_n \Vdash_R x_n, \left(\frac{x_1, \dots, x_n}{y}\right) \in R$$

Per definizione, se $d \prec d'$ allora $height(d) < height(d')$

Ogni catena discendente in \prec induce una catena discendente in $(\mathbb{N}, <)$

Dal momento che $<$ è b.f. allora anche \prec è b.f.

Principio di induzione sulle derivazioni

$$\frac{\forall \frac{x_1, \dots, x_n}{y} \in R. \forall d_1 \Vdash_R x_1, \dots, d_1 \Vdash_R x_n. (P(d_1) \wedge \dots \wedge P(d_n)) \Rightarrow P(\frac{d_1, \dots, d_n}{y})}{\forall d. P(d)}$$

Corollario

$$D_R, \prec^+ \text{ e' b.f.}$$

Perchè \prec^+ è la chiusura transitiva di una relazione b.f.

Esempio

$$R = \left\{ \frac{\overline{N \longrightarrow n}}{\overline{N \longrightarrow n}}, \frac{\overline{E_0 \longrightarrow n_0} \quad \overline{E_1 \longrightarrow n_1}}{\overline{E_0 \oplus E_1 \longrightarrow n_0 + n_1}}, \frac{\overline{E_0 \longrightarrow n_0} \quad \overline{E_1 \longrightarrow n_1}}{\overline{E_0 \otimes E_1 \longrightarrow n_0 \cdot n_1}} \right\}$$

$$\frac{\overline{2 \longrightarrow 2}}{\overline{2 \longrightarrow 2}} \quad \prec^+ \quad \frac{\frac{\overline{1 \longrightarrow 1} \quad \overline{2 \longrightarrow 2}}{\overline{(1 \oplus 2) \longrightarrow 3}} \quad \frac{\overline{3 \longrightarrow 3} \quad \overline{4 \longrightarrow 4}}{\overline{(3 \oplus 4) \longrightarrow 7}}}{\overline{(1 \oplus 2) \otimes (3 \oplus 4) \longrightarrow 21}}$$

Induzione sulle regole

Tipiche proprietà

Molto spesso accade che la proprietà di una derivazione riguardi solo la conclusione della derivazione

$$d \Vdash_R y \quad \Rightarrow \quad P(d) \Leftrightarrow Q(y)$$

$$P\left(\frac{d_1, \dots, d_n}{y}\right) \stackrel{\Delta}{=} Q(y)$$

in questi casi possiamo evitare di menzionare le derivazioni

Principio di induzione sulle regole

supponiamo che esistano delle derivazioni e che possiamo costruirle ma puo' non essere necessario menzionare questo

$$\frac{\forall \frac{x_1, \dots, x_n}{y} \in R. (\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq I_R \wedge P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n)) \Rightarrow P(y)}{\forall x \in I_R. P(x)}$$

$$I_R \triangleq \{y \mid \vdash_R y\}$$

Principio di induzione sulle regole semplificato

supporre che le premesse siano teoremi può
non essere necessario

$$\frac{\forall \frac{x_1, \dots, x_n}{y} \in R. (P(x_1) \wedge \dots \wedge P(x_n)) \Rightarrow P(y)}{\forall x \in I_R. P(x)}$$

Schemi di induzione

proprietà dei numeri

$P(n)$

induzione matematica

due proof obligations: $P(0)$ and $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$

proprietà dei termini

$P(t)$

induzione strutturale

una proof obligation per ogni simbolo di funzione

proprietà delle formule

$P(F)$

induzione sulle regole

una proof obligation per ogni regola di inferenza

Determinismo: 2 modi

proprietà dei termini $P(t)$ induzione strutturale

$$P(c) \stackrel{\Delta}{=} \forall \sigma, \sigma_1, \sigma_2. \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1 \wedge \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

proprietà delle formule $P(F)$ induzione sulle regole

$$P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1) \stackrel{\Delta}{=} \forall \sigma_2. \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

Determinismo dei comandi

$c ::= \text{skip} \mid x := a \mid c; c \mid \text{if } b \text{ then } c \text{ else } c \mid \text{while } b \text{ do } c$

$$\frac{}{\langle \text{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma} \quad \frac{\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[n/x]} \quad \frac{\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle c_0; c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \text{ff} \quad \langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'} \quad \frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \text{tt} \quad \langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \text{if } b \text{ then } c_0 \text{ else } c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \text{ff}}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma} \quad \frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \text{tt} \quad \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \text{while } b \text{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

$$P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1) \stackrel{\Delta}{=} \forall \sigma_2. \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

Ci chiediamo:

$$\forall c, \sigma, \sigma_1. P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1) ?$$

Caso Base

$$\frac{}{\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma) \stackrel{\Delta}{=} \forall \sigma_2. \langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma = \sigma_2$$

Consideriamo σ_2 t.c. $\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Vogliamo provare $\sigma = \sigma_2$

Consideriamo il goal $\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

solo la regola $\frac{}{\langle \mathbf{skip}, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$ è applicabile, per cui $\sigma_2 = \sigma$

Base case

$$\frac{\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[n/x]}$$

Assumiamo $\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n$

Vogliamo provare

$$P(\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[n/x]) \stackrel{\Delta}{=} \forall \sigma_2. \langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma[n/x] = \sigma_2$$

Prendiamo σ_2 t.c. $\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Vogliamo provare $\sigma[n/x] = \sigma_2$

Consideriamo il goal $\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Solo la regola $\frac{\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n}{\langle x := a, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma[n/x]}$ e' applicabile, per cui $\sigma_2 = \sigma[m/x]$
con $\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow m$

dal momento che abbiamo assunto $\langle a, \sigma \rangle \longrightarrow n$

Per il determinismo di Aexp abbiamo che $n = m$ e per questo $\sigma_2 = \sigma[m/x] = \sigma[n/x]$

Caso Induttivo

$$\frac{\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle c_0 ; c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

Assumiamo (ipotesi induttiva)

$$P(\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'') \triangleq \forall \sigma_2''. \langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2'' \Rightarrow \sigma'' = \sigma_2''$$

$$P(\langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2'. \langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma_2' \Rightarrow \sigma' = \sigma_2'$$

Vogliamo provare

$$P(\langle c_0 ; c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2. \langle c_0 ; c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma_2$$

Prendiamo σ_2 t.c. $\langle c_0 ; c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Vogliamo provare $\sigma' = \sigma_2$

Caso induttivo (cont.)

$$P(\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'') \triangleq \forall \sigma''_2. \langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma''_2 \Rightarrow \sigma'' = \sigma''_2$$

$$P(\langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma'_2. \langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma'_2$$

Consideriamo il goal $\langle c_0 ; c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Solo la regola
$$\frac{\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle c_0 ; c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$
 e' applicabile

quindi $\sigma_2 = \sigma'_2$ con $\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma''_2$ e $\langle c_1, \sigma''_2 \rangle \longrightarrow \sigma'_2$

Per ipotesi induttiva $P(\langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'')$, abbiamo $\sigma'' = \sigma''_2$

e percio' $\langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'_2$

Per ipotesi induttiva $P(\langle c_1, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma')$, quindi abbiamo $\sigma' = \sigma'_2$

Caso Induttivo

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff} \quad \langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{if } b \mathbf{ then } c_0 \mathbf{ else } c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

Assumiamo

$$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff} \quad (\text{ipotesi induttiva})$$

$$P(\langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2. \langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma_2$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{if } b \mathbf{ then } c_0 \mathbf{ else } c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2. \langle \mathbf{if } b \mathbf{ then } c_0 \mathbf{ else } c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma_2$$

$$\text{Prendiamo } \sigma_2 \text{ t.c. } \langle \mathbf{if } b \mathbf{ then } c_0 \mathbf{ else } c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$$

$$\text{Vogliamo provare } \sigma' = \sigma_2$$

Caso Induttivo (con.)

$$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

$$P(\langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \stackrel{\Delta}{=} \forall \sigma_2. \langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma_2$$

Consideriamo il goal $\langle \mathbf{if } b \mathbf{ then } c_0 \mathbf{ else } c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Per il determinismo di Bexp

Solo la regola
$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff} \quad \langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{if } b \mathbf{ then } c_0 \mathbf{ else } c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$
 e' applicabile

quindi $\sigma_2 = \sigma'_2$ con $\langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'_2$

Per ipotesi induttiva $P(\langle c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma')$, abbiamo $\sigma' = \sigma'_2 = \sigma_2$

Caso induttivo

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c_0, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{if } b \mathbf{ then } c_0 \mathbf{ else } c_1, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

Analogo al precedente

Caso base

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}}{\langle \mathbf{while } b \mathbf{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$$

Assumiamo

$$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{while } b \mathbf{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma) \stackrel{\Delta}{=} \forall \sigma_2. \langle \mathbf{while } b \mathbf{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma = \sigma_2$$

Prendiamo σ_2 t.c. $\langle \mathbf{while } b \mathbf{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Vogliamo provare $\sigma = \sigma_2$

Caso induttivo (con.)

$$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}$$

Consideriamo il goal $\langle \mathbf{while } b \mathbf{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Per la determinismo di Bexp

Solo la regola $\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{ff}}{\langle \mathbf{while } b \mathbf{ do } c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma}$ e' applicabile e quindi $\sigma_2 = \sigma$

Caso induttivo

$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$

Assumiamo

$$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad (\text{ipotesi induttiva})$$

$$P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'') \triangleq \forall \sigma_2''. \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2'' \Rightarrow \sigma'' = \sigma_2''$$

$$P(\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2'. \langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma_2' \Rightarrow \sigma' = \sigma_2'$$

Vogliamo provare

$$P(\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma_2. \langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma_2$$

$$\text{Prendiamo } \sigma_2 \text{ t.c. } \langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$$

Vogliamo provare $\sigma' = \sigma_2$

Caso induttivo (con.)

$\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt}$

$P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'') \triangleq \forall \sigma''_2. \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma''_2 \Rightarrow \sigma'' = \sigma''_2$

$P(\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma') \triangleq \forall \sigma'_2. \langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'_2 \Rightarrow \sigma' = \sigma'_2$

Consideriamo il goal $\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2$

Per la determinismo di Bexp

Solo la regola
$$\frac{\langle b, \sigma \rangle \longrightarrow \mathbf{tt} \quad \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'' \quad \langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'}{\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'}$$
 e' applicabile

quindi $\sigma_2 = \sigma'_2$ con $\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma''_2$ and $\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma''_2 \rangle \longrightarrow \sigma'_2$

Per ipotesi induttiva $P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma'')$, abbiamo $\sigma'' = \sigma''_2$

perciò $\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma'_2$

Per ipotesi induttiva $P(\langle \mathbf{while} \ b \ \mathbf{do} \ c, \sigma'' \rangle \longrightarrow \sigma')$

concludiamo $\sigma' = \sigma'_2 = \sigma_2$

Determinismo dei comandi

$$\forall c, \sigma, \sigma_1. P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1)$$

$$P(\langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_1) \triangleq \forall \sigma_2. \langle c, \sigma \rangle \longrightarrow \sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$$

Esercizio 1

[Ex. 1] Definire usando la ricorsione ben fondata una funzione $vars$ tale che data un' espressione aritmetica a ritorna l'insieme degli identificatori che appaiono nell'espressione aritmetica a . Poi provare per induzione sulle regole che

$$\forall a \in Aexp, \forall \sigma \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\langle a, \sigma \rangle \rightarrow n \quad \text{implica} \quad (\forall y \in vars(a). \sigma(y) = \sigma'(y)) \Rightarrow \langle a, \sigma' \rangle \rightarrow n .$$

se due memorie coincidono su tutte le variabili che appaiono in un'espressione, allora valutando l'espressione nelle due memorie dà lo stesso risultato

Esercizio 2

Ex. 2] Definire usando la ricorsione ben fondata una funzione `vars` tale che data un comando `c` ritorna l'insieme degli identificatori che appaiono a sinistra degli assegnamenti.
Poi provare per induzione sulle regole che

$$\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \quad \text{implica} \quad \forall x \notin \text{vars}(c). \sigma(x) = \sigma'(x).$$

se una variabile non appare in un'assegnamento allora il suo valore iniziale viene conservato nello store finale

Esercizio (da consegnare)

Supponiamo di estendere la sintassi delle espressioni aritmetiche

$$a ::= x \mid n \mid a \text{ op } a \mid x++$$

dove $x++$ valuta il valore corrente di x ma poi incrementa x come effetto collaterale

1. Ridefinire la semantica operativa di A_{exp} , B_{exp} e Com per prendere in considerazione gli effetti collaterali e discutere tutte le problematiche e le conseguenti scelte progettuali
2. Trova due espressioni aritmetiche a_0 e a_1 tali che la valutazione di a_0+a_1 sia diversa da a_1+a_0 , se possibile