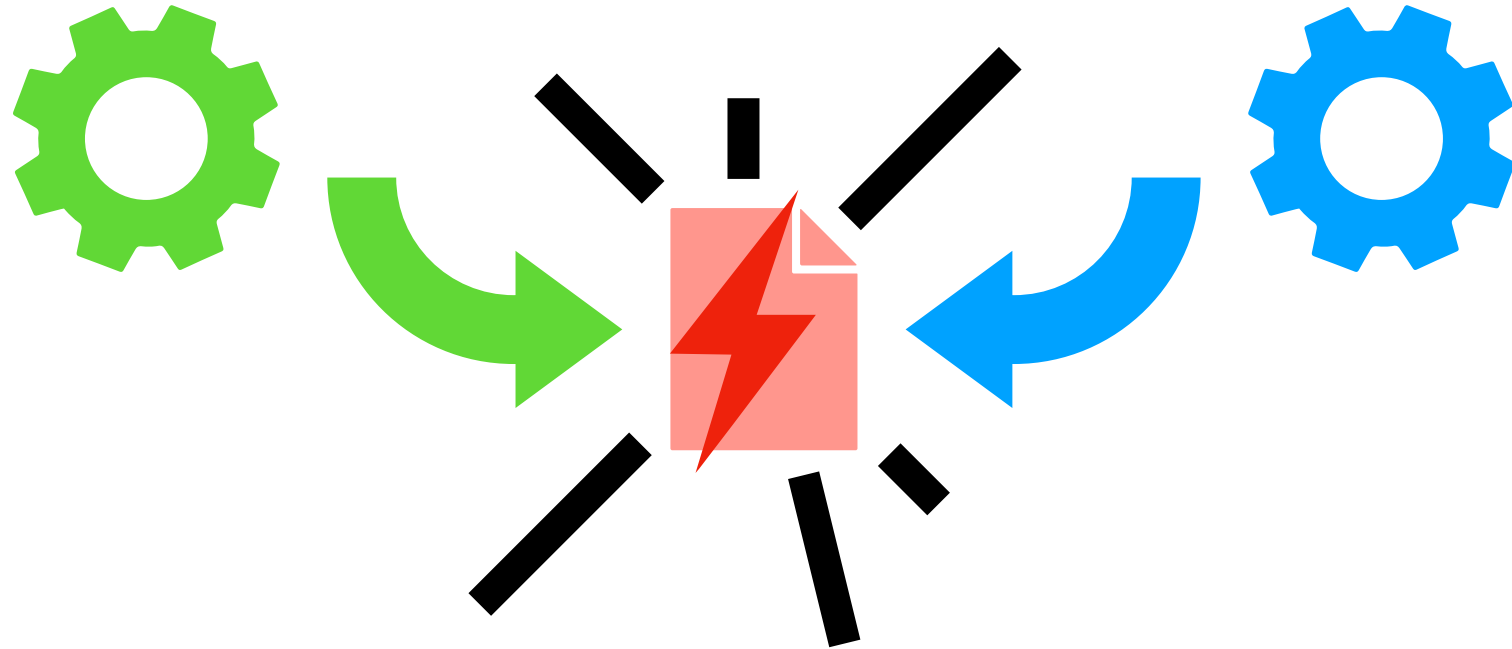


Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori



5.1 - Ordini parziali completi

Ordini parziali

Insieme parzialmente ordinati

un insieme

una relazione binaria

$$(P, \sqsubseteq) \quad \sqsubseteq \subseteq P \times P$$

riflessiva

$$\forall p \in P. \quad p \sqsubseteq p$$

antisimmetrica

$$\forall p, q \in P. \quad p \sqsubseteq q \wedge q \sqsubseteq p \Rightarrow p = q$$

transitiva

$$\forall p, q, r \in P. \quad p \sqsubseteq q \wedge q \sqsubseteq r \Rightarrow p \sqsubseteq r$$

q
 $\uparrow$
 p

$p \sqsubseteq q$ significa che p e q sono **confrontabili**
e che p e' minore (o uguale) di q

$p \sqsubset q$ significa $p \sqsubseteq q \wedge p \neq q$

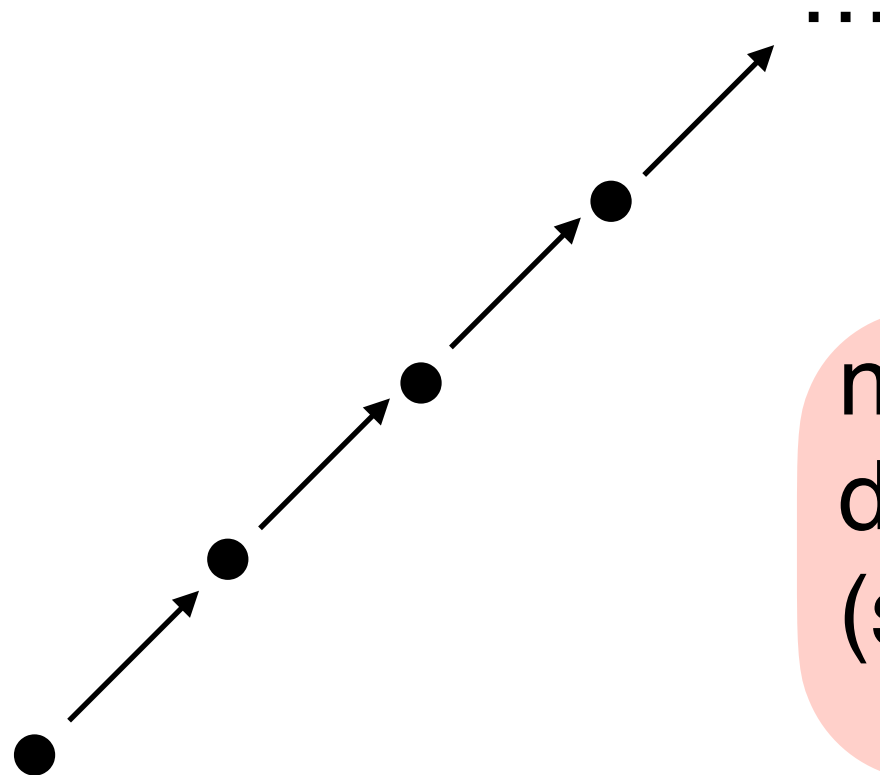
Ordini totali

$(P, \sqsubseteq)$ OP

totale

$$\forall p, q \in P. \quad p \sqsubseteq q \vee q \sqsubseteq p$$

un OP dove ogni due elementi sono **confrontabili**



notazione con
diagramma di Hasse
(si omettono gli archi
transitivi e riflessivi)

Ordini discreti

$(P, \sqsubseteq)$ OP

discreto

$$\forall p, q \in P. \quad p \sqsubseteq q \Leftrightarrow p = q$$

ogni elemento e' **confrontabile** solo con se stesso

• • • • ...

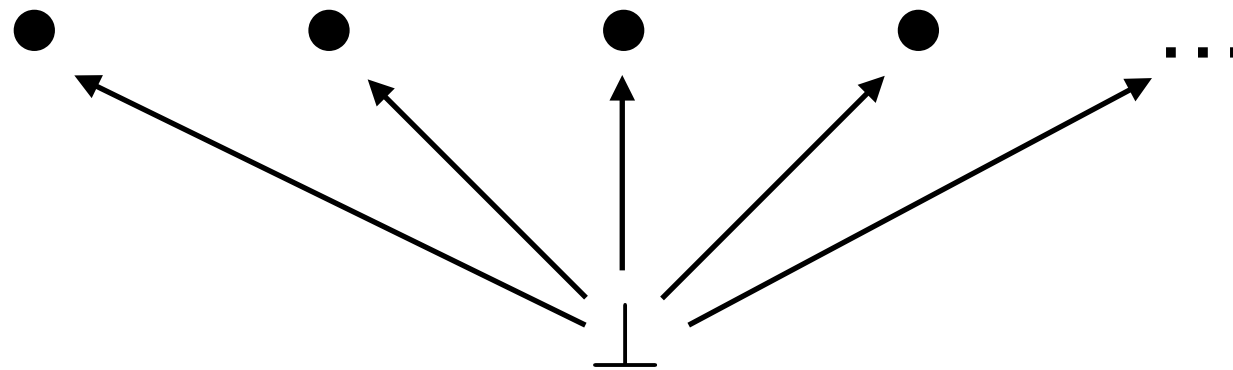
Ordini piatti

$(P, \sqsubseteq)$ OP

piatto

$$\forall p, q \in P. \quad p \sqsubseteq q \Leftrightarrow p = q \vee p = \perp$$

ogni elemento e' **confrontabile** solo con se stesso e con un elemento (piu' piccolo) particolare $\perp$



Esercizio

$(\mathbb{N}, \leq)$

OP?



Totale?



Discreto?



Piatto?



...



3



2



1



0

Esercizio

$(\wp(S), \subseteq)$

esempio: $S = \{a, b, c\}$

OP?



Totale?

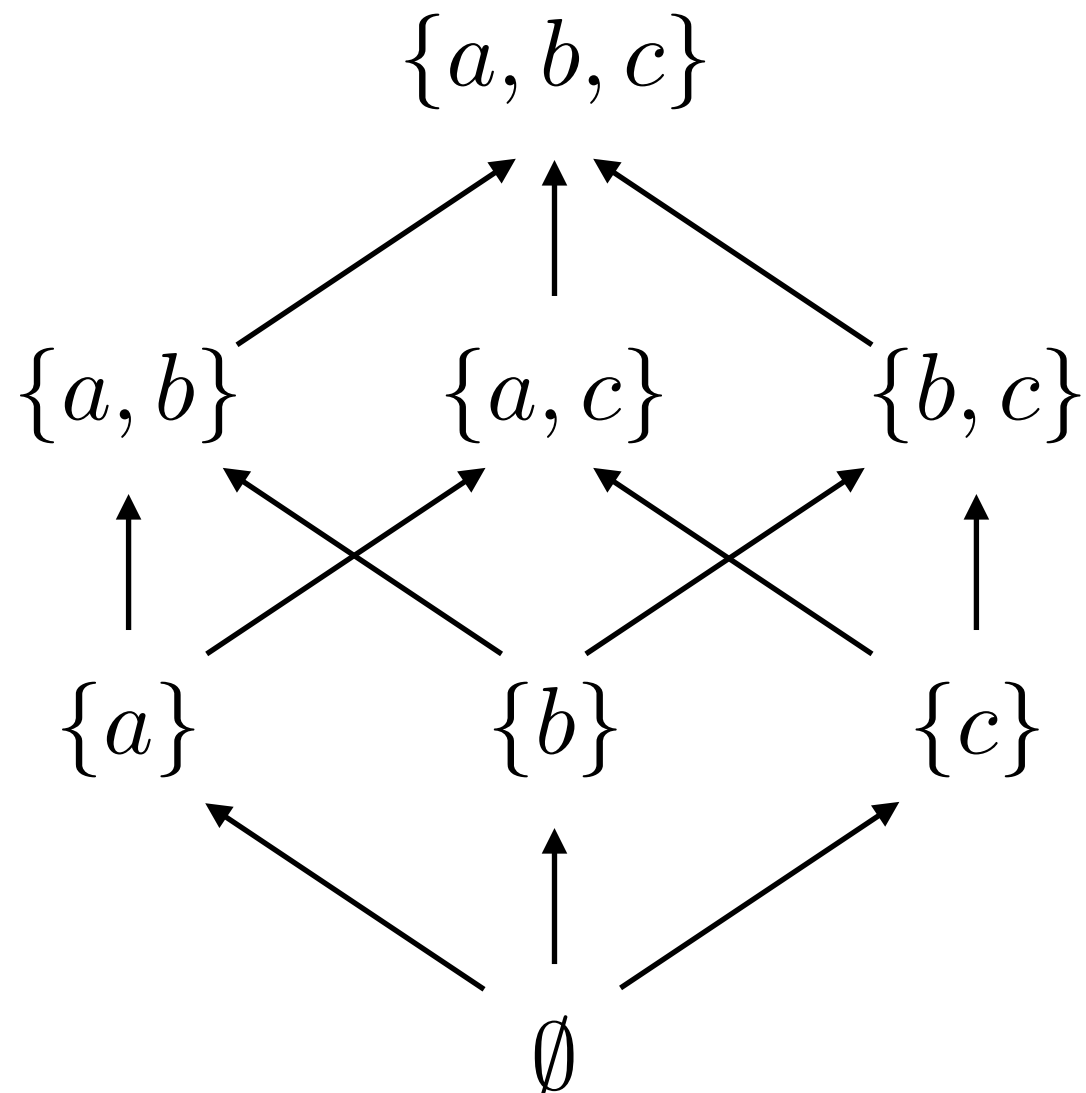
$$|S| < 2$$

Discreto?

$$S = \emptyset$$

Piatto?

$$|S| < 2$$



$$\{a, b\} \not\subseteq \{b, c\}$$

$$\{a\} \not\subseteq \{b\}$$

Esercizio

$(\mathbb{N}, =)$

OP?



Totale?



Discreto?



Piatto?



0

1

2

3

...

Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\perp\}, \forall n \in \mathbb{N}. \perp \sqsubseteq n)$

OP?



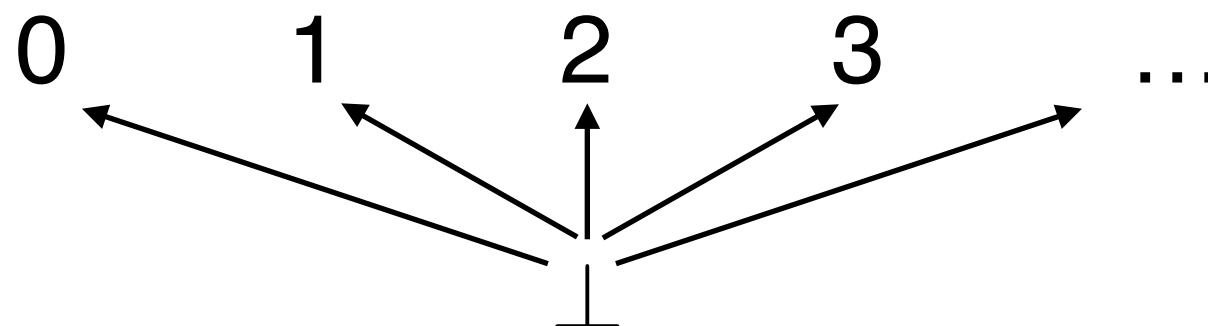
Totale?



Discreto?



Flat?



Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

OP?



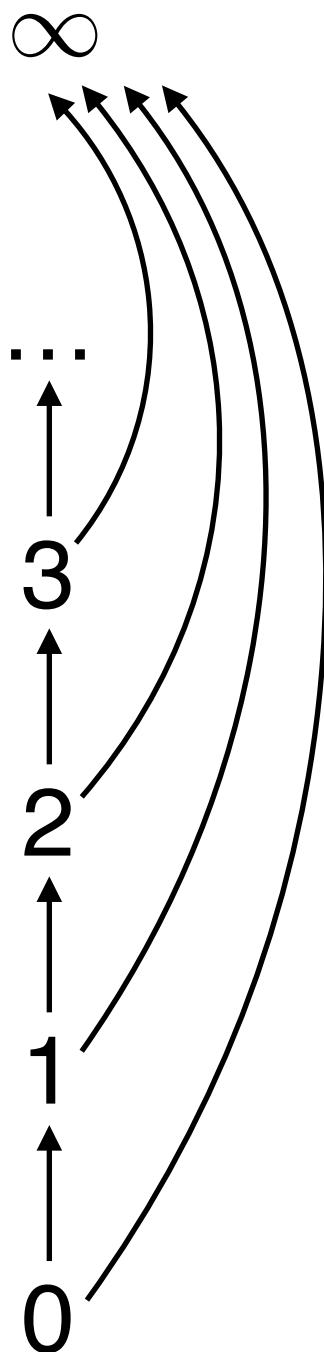
Totale?



Discreto?



Piatto?



Esercizio

	OP?	Totale?	Discreto?	Piatto?
$(\mathbb{N}, <)$				
$(\mathbb{Z}, \leq)$				
$(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}, \leq)$				
$(T_\Sigma, \prec)$				
$(\mathbb{N}, \neq)$				

OP $\sqsubseteq$

b.f. $\prec$

riflessivo

non riflessivo (altrimenti non b.f.)

antisimmetrico

antisimmetrico

$p \prec q \wedge q \prec p$ e' sempre falso

transitivo

puo' essere transitivo ($\prec^+$ b.f.)

puo' avere catene discendenti infinite

non ha catene discendenti infinite

$\sqsubseteq$ puo' essere b.f.

$\prec^*$ e' sempre un OP

Proprieta'

Elemento minimo

$(P, \sqsubseteq)$ OP $Q \subseteq P$ $\ell \in Q$

ℓ e' il **minimo** elemento di Q se $\forall q \in Q. \ell \sqsubseteq q$

TH. (unicita' dell' elemento minimo)

$(P, \sqsubseteq)$ OP $Q \subseteq P$ ℓ_1, ℓ_2 elementi minimi di Q implica $\ell_1 = \ell_2$

$$\left. \begin{array}{l} \ell_1 \text{ minimo elemento di } Q \Rightarrow \ell_1 \sqsubseteq \ell_2 \\ \ell_2 \text{ minimo elemento di } Q \Rightarrow \ell_2 \sqsubseteq \ell_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$$

per antisimmetria

Bottom

$(P, \sqsubseteq)$ OP il minimo elemento di P
(se esiste) e' chiamato **bottom** e denotato $\perp$

talvolta scritto $\perp_P$

Esempi

OP	bottom?
$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$	0
$(\wp(S), \subseteq)$	$\emptyset$
$(\mathbb{Z}, \leq)$	

Elemento minimale

$(P, \sqsubseteq)$ OP $Q \subseteq P$ $m \in Q$

m e' un elemento **minimale** di Q se $\forall q \in Q. \quad q \sqsubseteq m \Rightarrow q = m$

minimo $\forall q \in Q. \quad \ell \sqsubseteq q$

unico

minimale

minimale $\forall q \in Q. \quad q \sqsubseteq m \Rightarrow q = m$

non necessariamente unico

no necessariamente minimo
puo' essere minimo

Ordine inverso

TH. $(P, \sqsubseteq)$ OP implica $(P, \sqsupseteq)$ OP

prova. E' immediato controllare che $\sqsupseteq$

e' riflessiva

e' antisimmetrica

e' transitiva

$(P, \sqsubseteq)$ OP $Q \subseteq P$

elemento **massimo di Q in $(P, \sqsubseteq)$** : elemento minimo di Q in $(P, \sqsupseteq)$

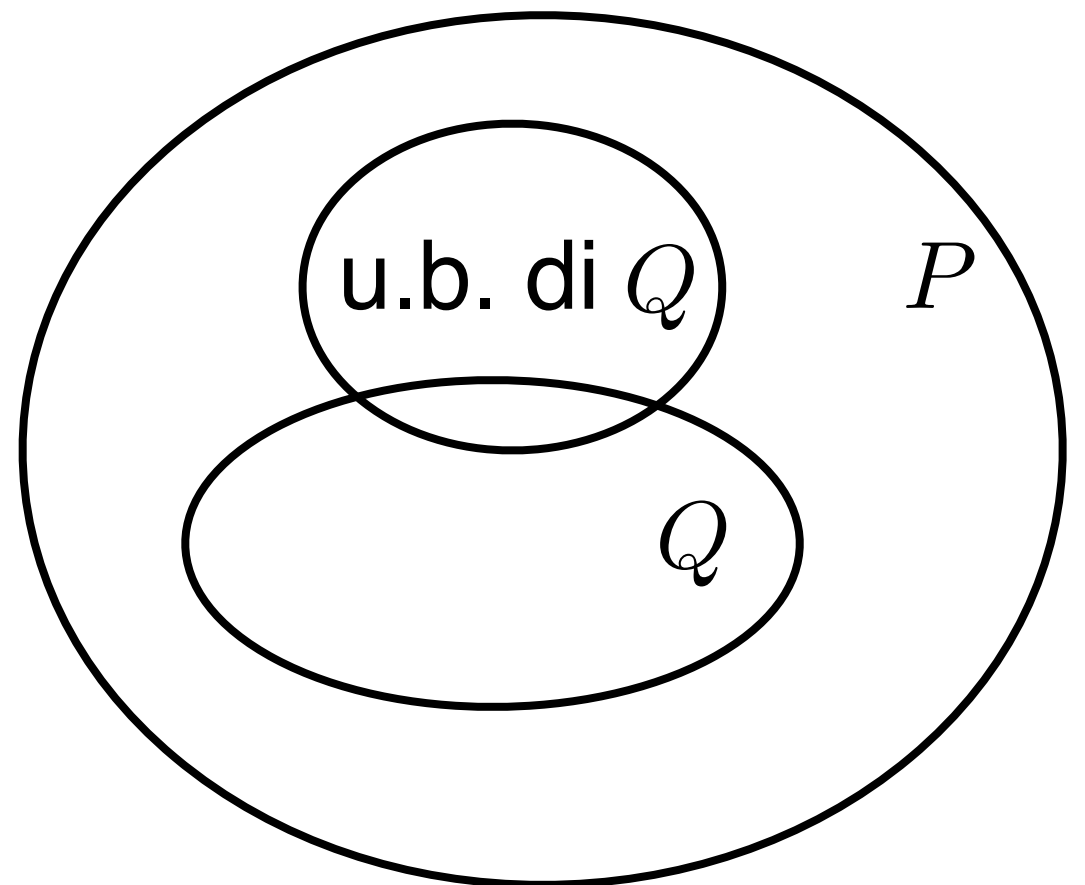
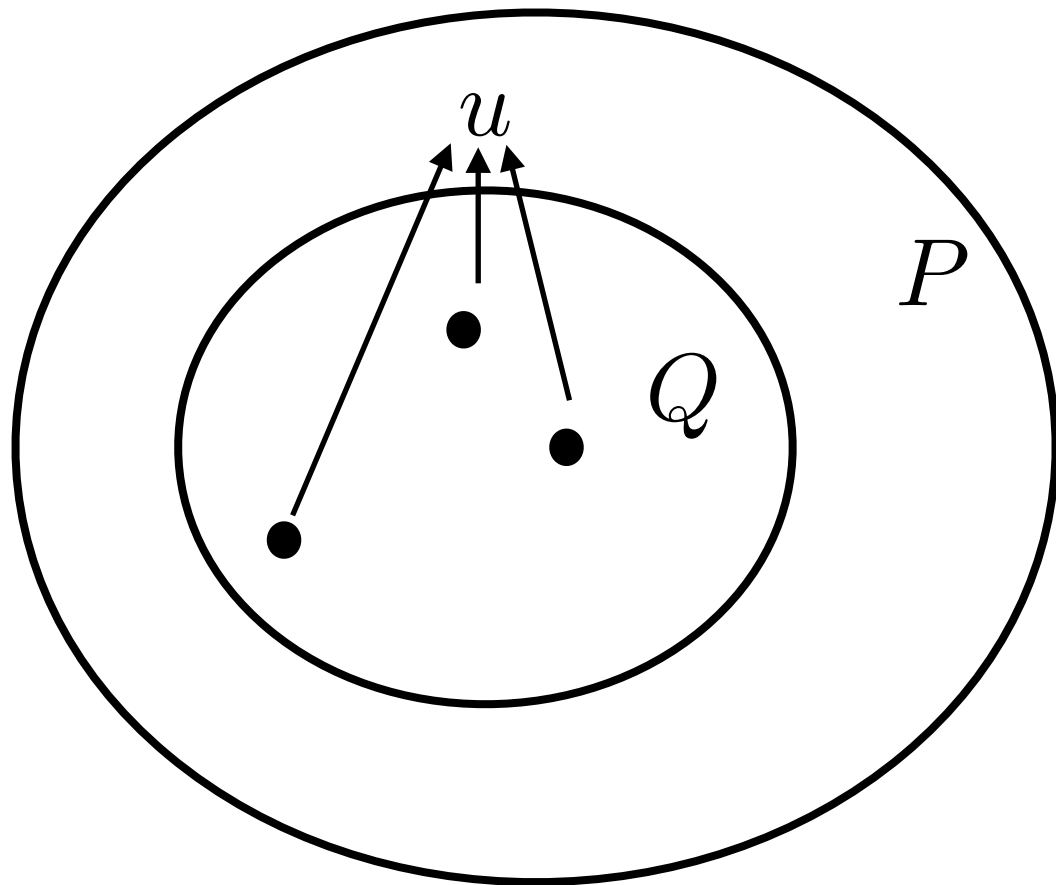
elemento **minimo di Q in $(P, \sqsubseteq)$** : elemento massimo di Q in $(P, \sqsupseteq)$

Upper bound

$(P, \sqsubseteq)$ OP $Q \subseteq P$ $u \in P$

u e' un **upper bound** di Q se $\forall q \in Q. q \sqsubseteq u$
(tutti gli elementi di Q sono piu' piccoli di u)

Q puo' avere tanti upper bound



Minimo upper bound

$(P, \sqsubseteq)$ PO $Q \subseteq P$ $p \in P$

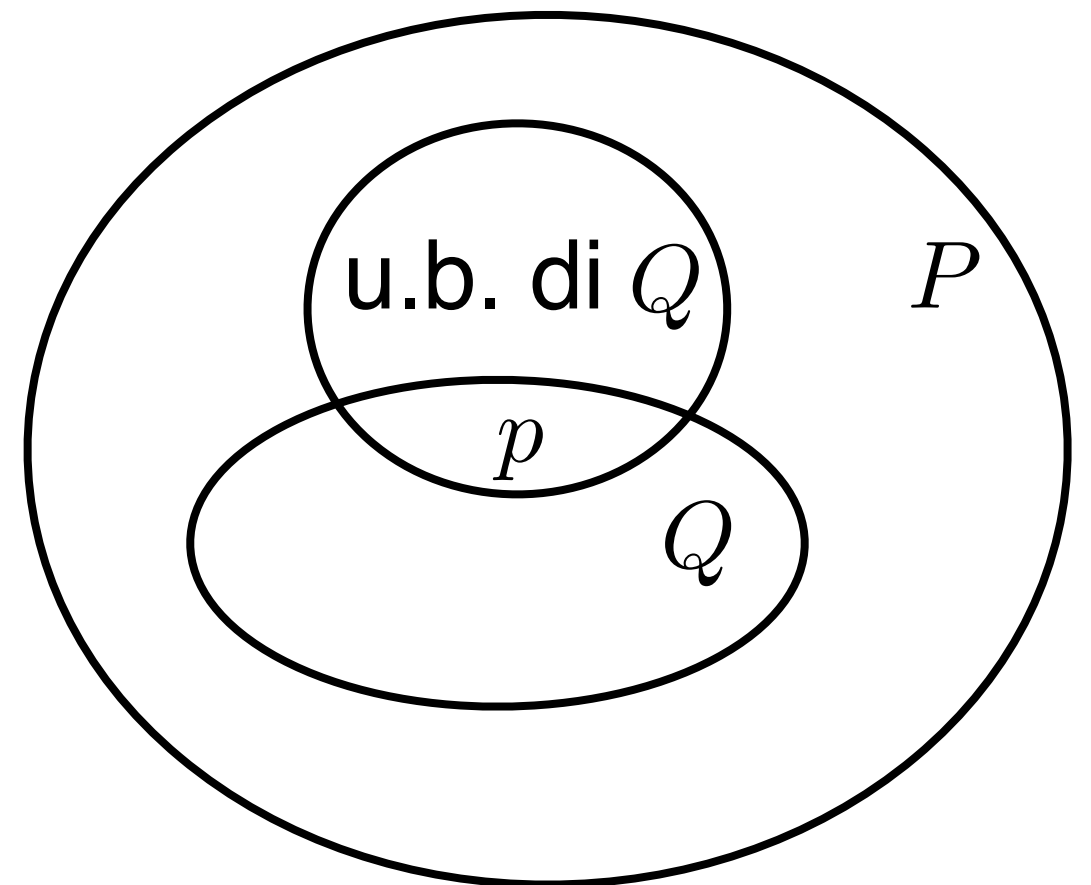
p e' un **minimo upper bound (lub)** of Q if

1. se e' un upper bound di Q e $\forall q \in Q. q \sqsubseteq p$
2. se e' piu' piccolo di ogni altro upper bound di Q
 $\forall u \in P. (\forall q \in Q. q \sqsubseteq u) \Rightarrow p \sqsubseteq u$

scriviamo $p = \text{lub } Q$

intuitivamente, e' il minimo elemento che rappresenta tutti quelli di Q

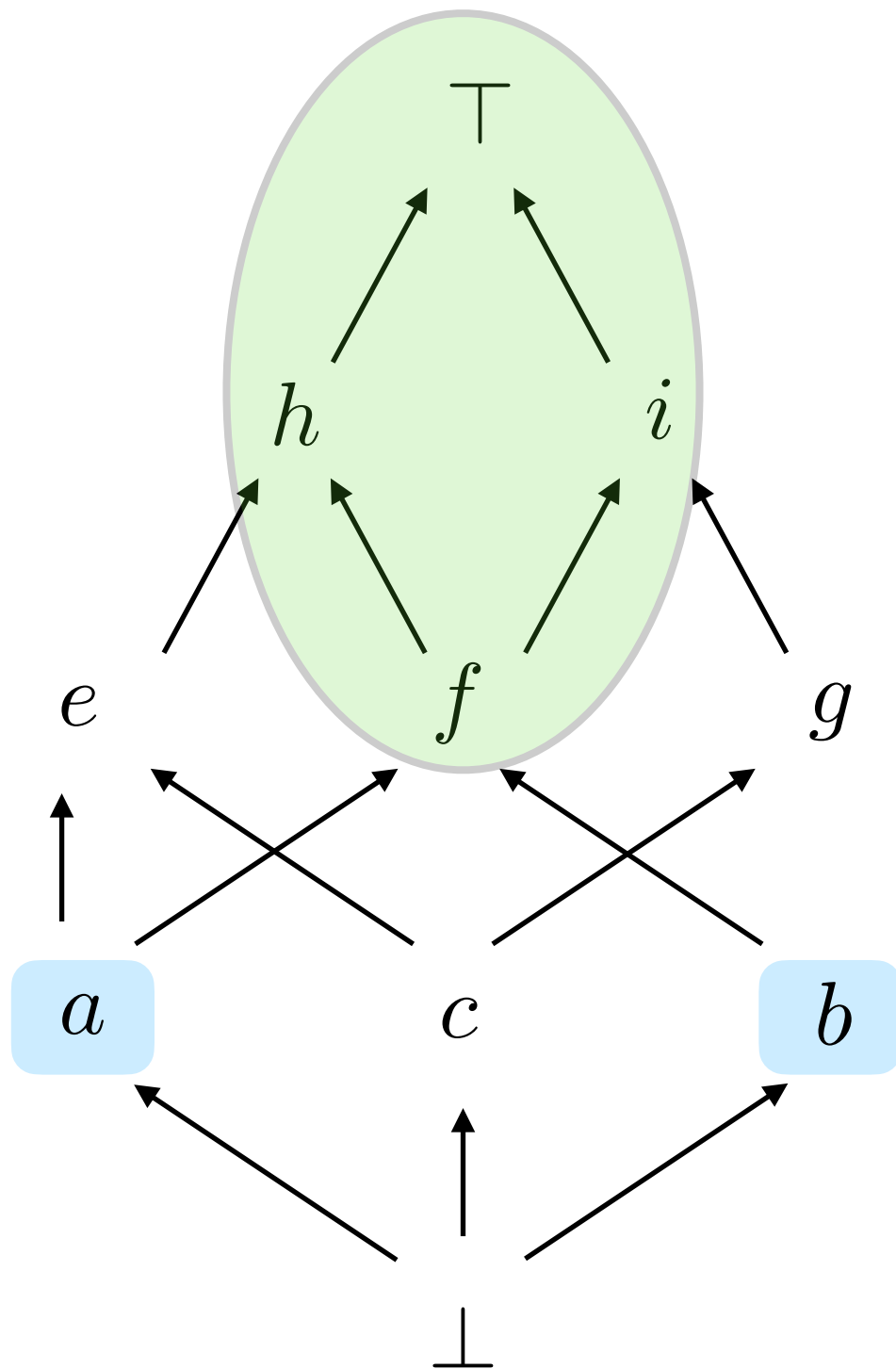
p non e' necessariamente un elemento di Q



Esercizio

Upper bound di $\{a, b\}$? $\{f, h, i, \top\}$

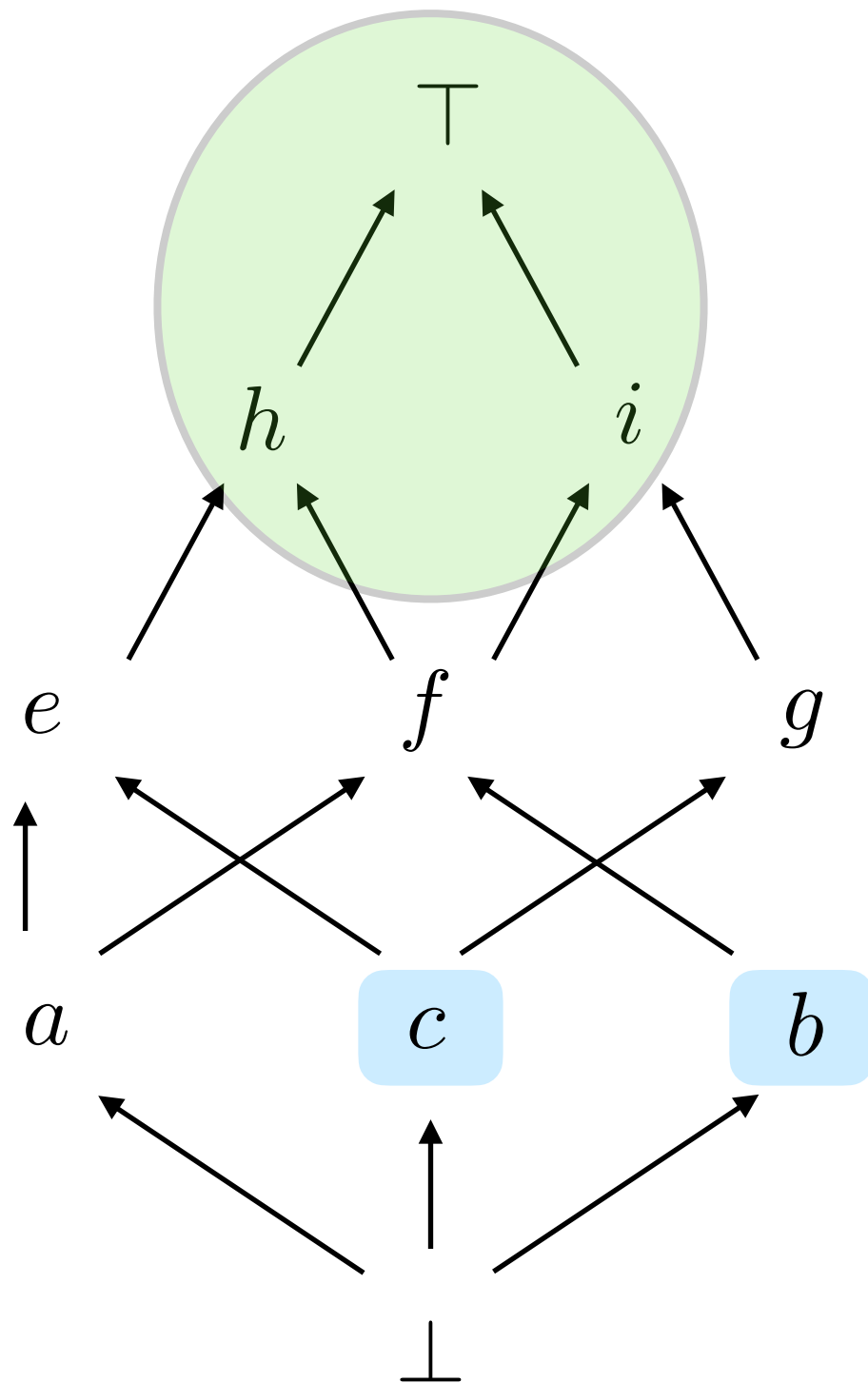
lub? f



Esercizio

Upper bounds of $\{b, c\}$? $\{h, i, \top\}$

lub? no lub!



Esercizio

$(\mathbb{N}, \leq)$

$Q \subseteq \mathbb{N}$

lub?

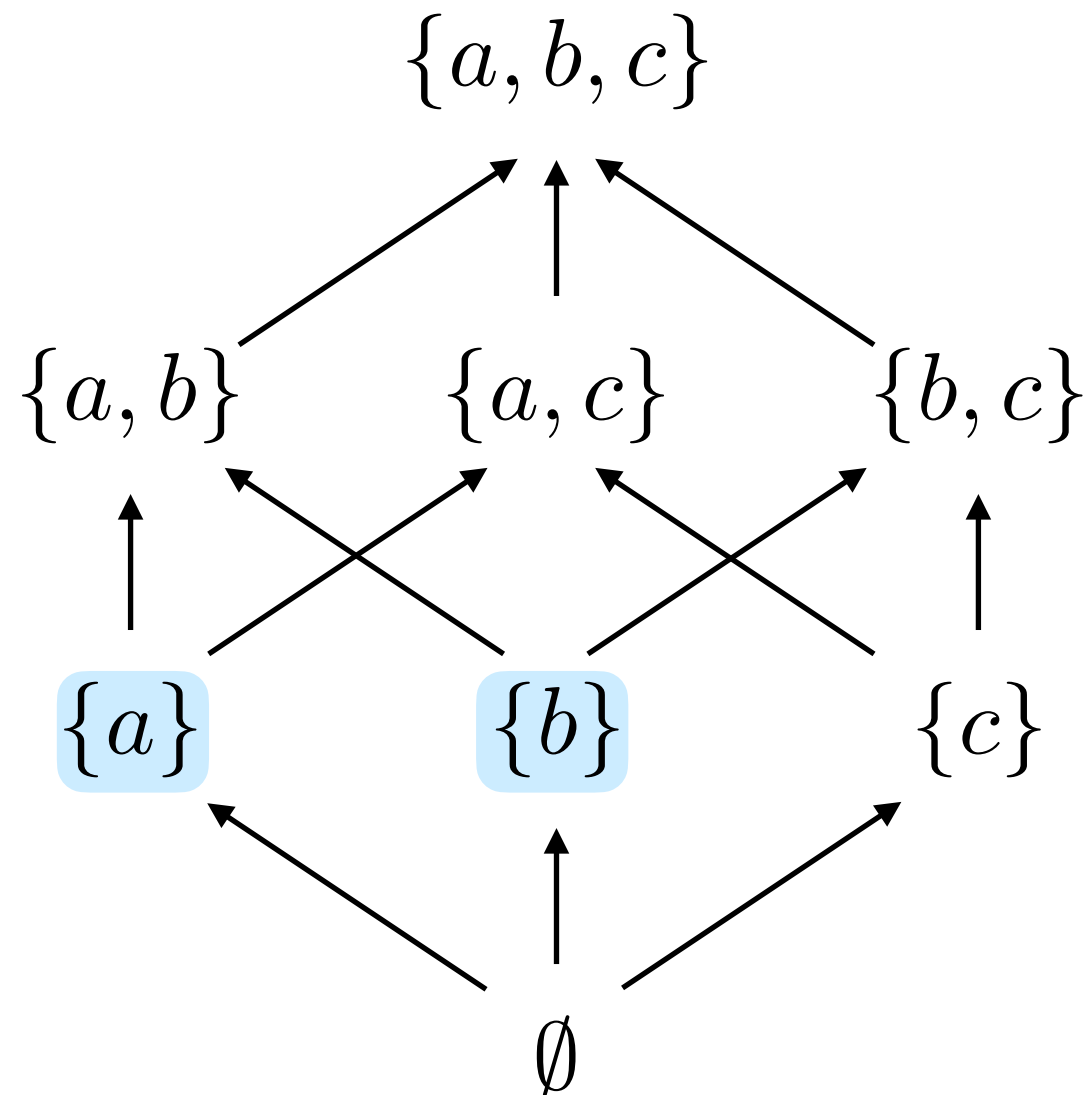
se Q finito $\text{lub } Q = \max Q$
altrimenti no lub



Esercizio

$(\wp(S), \subseteq)$ $Q \subseteq \wp(S)$ lub?

$$\text{lub } Q = \bigcup_{T \in Q} T$$



$$\text{lub } \{\{a\}, \{b\}\} = \{a, b\}$$

Ordini parziali completi (CPO)

Completezza: l'idea

D un dominio
 $\sqsubseteq$ un modo per confrontare gli elementi
 $x \sqsubseteq y$ x e' un' approssimazione di y ma meno precisa

} PO

x e y sono consistenti,
ma y e' piu' accurata di x

$$x_0 \sqsubseteq x_1 \sqsubseteq x_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq x_n \sqsubseteq \cdots$$

↑
prima approssimazione

↑
seconda approssimazione

↑
terza approssimazione

↑
(n+1)esima approssimazione

ogni sequenza di approssimazioni tende ad un limite?

Catene

$(P, \sqsubseteq)$ PO $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e' una **catena** se $\forall i \in \mathbb{N}. d_i \sqsubseteq d_{i+1}$

$$d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq d_n \sqsubseteq \cdots$$

ogni catena e' una lista infinita

catena **finita**: ci sono solo un numero finito di elementi distinti

$$\exists k \in \mathbb{N}. \forall i \geq k. d_i = d_{i+1}$$

o equivalentemente

$$\exists k \in \mathbb{N}. \forall i \geq k. d_i = d_k$$

Esempio

$(\mathbb{N}, \leq)$

$0 \leq 2 \leq 4 \leq \dots \leq 2n \leq \dots$ e' una catena infinita

$0 \leq 1 \leq 3 \leq 3 \leq 5 \leq \dots \leq 5 \leq \dots$ e' una catena finita

ogni catena ha una lunghezza infinita

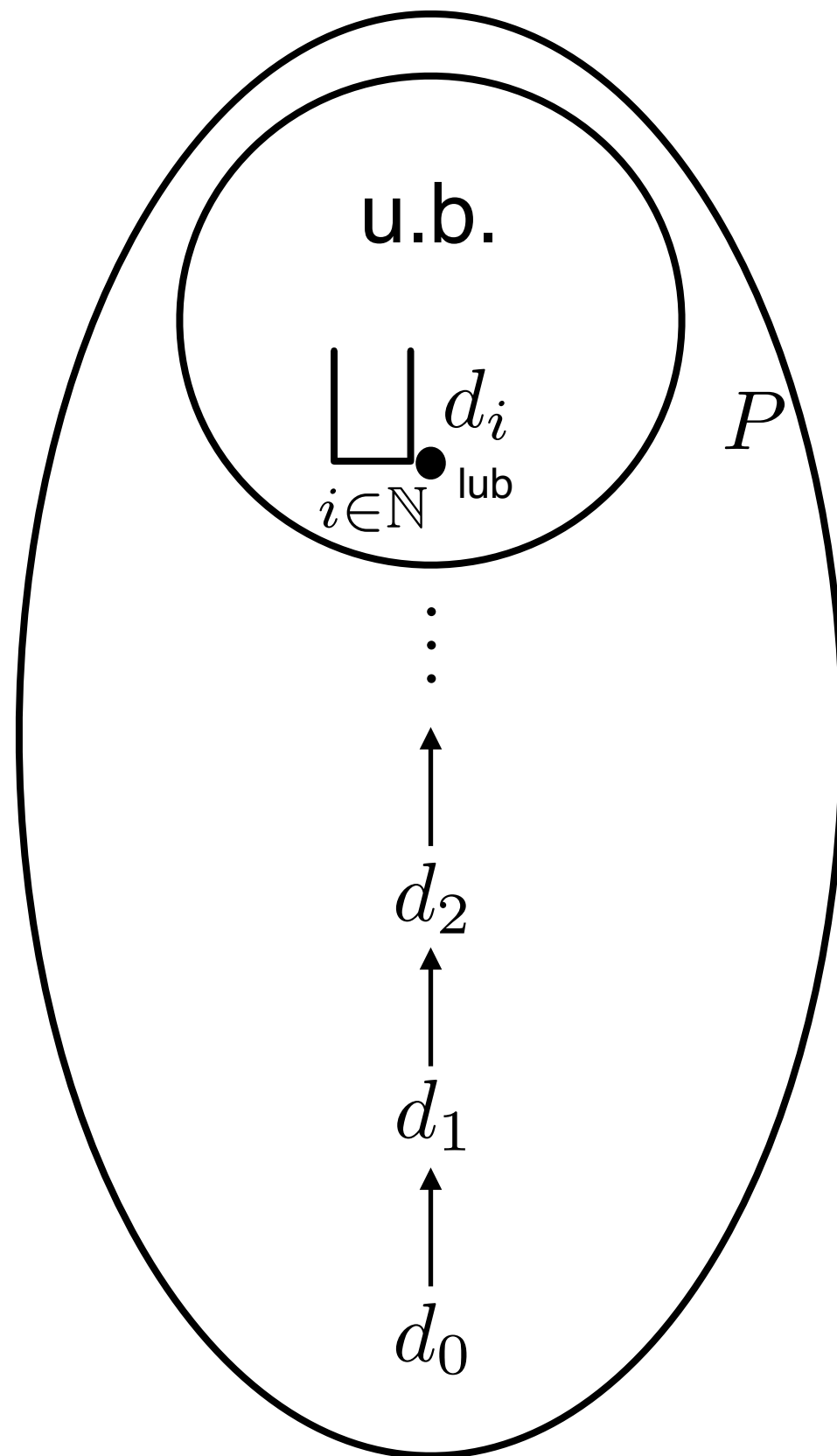
Limite di una catena

$(P, \sqsubseteq)$ OP $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una catena

denotiamo con $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i$ il lub di $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ se esiste

e lo chiamiamo il **limite** della catena

Limite



Esempio

$(\mathbb{N}, \leq)$

$$0 \leq 2 \leq 4 \leq \dots \leq 2n \leq \dots$$

non ha lub

(l'insieme degli upper bound e' vuoto)

$$0 \leq 1 \leq 3 \leq 3 \leq 5 \leq \dots \leq 5 \leq \dots$$

ha lub 5

(quali upper bound?)

Lemma su catene finite

Lemma (ogni catena finita ha un limite)

$(P, \sqsubseteq)$ OP $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una catena finita $\Rightarrow \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i$ esiste

prova.

$\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ finita $\Rightarrow \exists k. \forall i. d_{i+k} = d_k$

gli elementi della catena sono ordinati totalmente

d_k e' il piu' grande elemento della catena

d_k e' un upper bound $\forall i. d_i \sqsubseteq d_k$

d_k e' il minimo upper bound

prendiamo u tale che $\forall i. d_i \sqsubseteq u$ allora $d_k \sqsubseteq u$

Indipendenza dei prefissi

Lemma (indipendenza dei prefissi) $(P, \sqsubseteq)$ OP $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una catena

$$\text{se } \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \text{ esiste } \Rightarrow \forall k. \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_{i+k} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i$$

$$\begin{array}{ccc} d_0 \sqsubseteq d_1 \sqsubseteq d_2 \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq d_k \sqsubseteq d_{k+1} \sqsubseteq \cdots & \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i & \\ & = & \\ & d_k \sqsubseteq d_{k+1} \sqsubseteq \cdots & \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_{i+k} \end{array}$$

Indipendenza dei prefissi

Lemma (indipendenza dei prefissi) $(P, \sqsubseteq)$ OP $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una catena

$$\text{se } \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \text{ esiste } \Rightarrow \forall k. \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_{i+k} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i$$

prova.

prendiamo generico k

proviamo che $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e $\{d_{i+k}\}_{i \in \mathbb{N}}$ hanno gli stessi u.b.

(e quindi lo stesso lub)

1. se u e' un u.b. di $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ allora e' un u.b. di $\{d_{i+k}\}_{i \in \mathbb{N}}$

perche' $\{d_{i+k}\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

2. se u e' un u.b. di $\{d_{i+k}\}_{i \in \mathbb{N}}$ mostriamo che $\forall j. d_j \sqsubseteq u$

per $j \geq k$ e' ovvio

se $j < k$, $d_j \sqsubseteq d_k \sqsubseteq u$ perche' $d_k \in \{d_{i+k}\}_{i \in \mathbb{N}}$

Ordini parziali completi

$(P, \sqsubseteq)$ OP P e' **completo** se ogni catena ha un limite (lub)

TH. Qualsiasi catena finita ha un limite
(l'ultimo elemento della sequenza)

Se P ha solo catene finite è completo

Se P è finito è completo

Qualsiasi ordine discreto è completo

Qualsiasi ordine piatto è completo

Esempio

$(\mathbb{N}, \leq)$ non è completo
(è sufficiente esporre una catena senza limite)

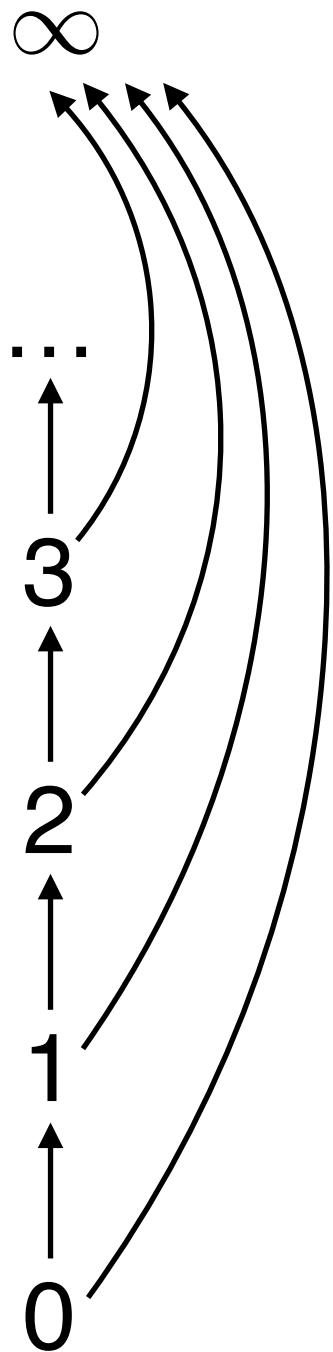
$0 \leq 2 \leq 4 \leq \dots \leq 2n \leq \dots$ non ha lub
(l'insieme dei u.b. e' vuoto)

Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

completo? 

ogni catena infinita ha limite ∞
(insieme u.b. = $\{\infty\}$)



Esercizio

$(\wp(S), \subseteq)$

completo? 

$\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} S_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i = \{x \mid \exists k \in \mathbb{N}. x \in S_k\}$$

Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty_1, \infty_2\}, \leq)$ complete? ✗

ogni catena infinita non ha limite
(insieme di u.b. $\{\infty_1, \infty_2\}$)

