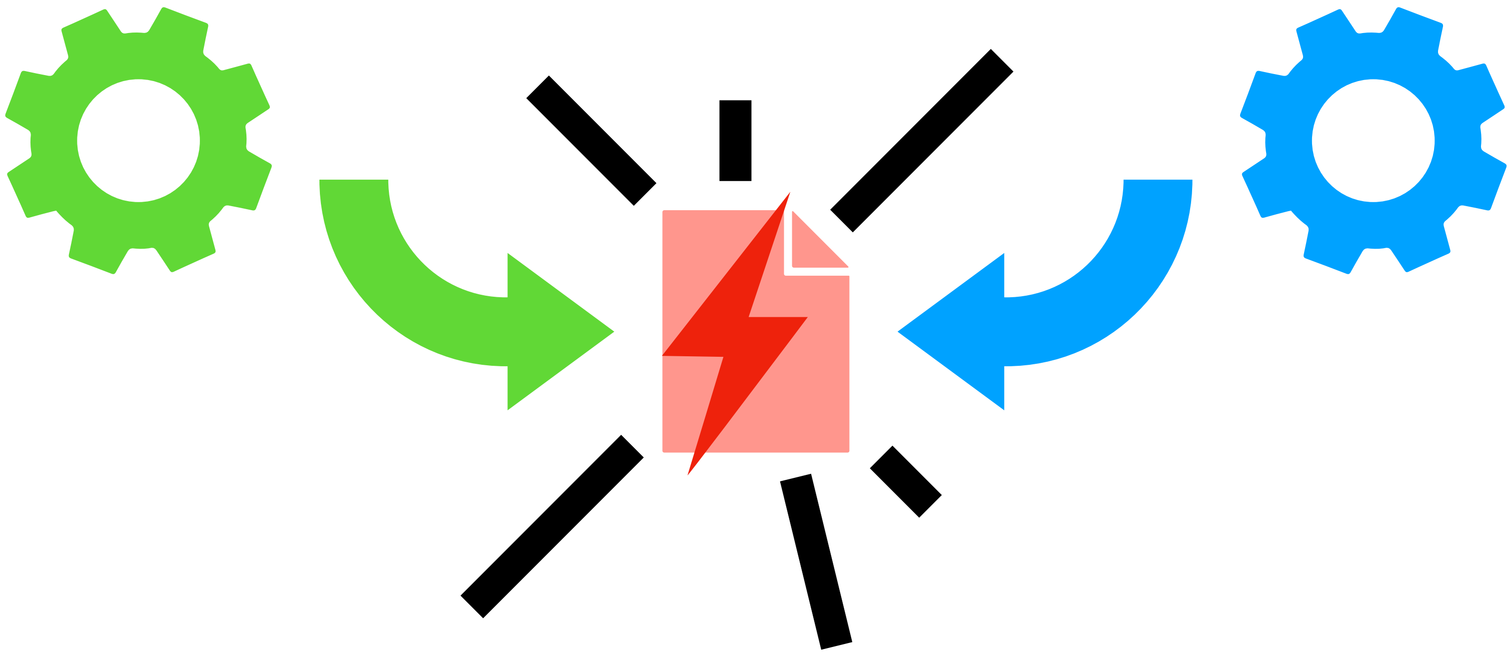
Linguaggi di Programmazione



Roberta Gori

5.2 - Teorema di punto fisso di Kleene

funzioni parziali

Funzioni parziali

$D = (A \rightharpoonup B) = \mathbf{Pf}(A, B) = \{f : A \rightharpoonup B\}$ funzioni parziali

$f \sqsubseteq g$ se $f(a)$ e' definita, $g(a)$ e' definita e $g(a) = f(a)$

ma $g(a)$ puo' essere definita quando $f(a)$ non lo e'

se vediamo le funzioni parziali come relazioni

$$\{(x, f(x)) \mid f(x) \neq \bot\} \subseteq A \times B$$

$f \sqsubseteq g$ significa essenzialmente $f \subseteq g$

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f = \{ \quad \begin{array}{l} \overset{n}{(0}, \overset{f(n)}{0)}, \\ (2, 1), \\ (4, 2), \\ (6, 3), \\ \ldots \\ (2k, k), \\ \ldots \end{array} \quad \}$$

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ 2 \cdot n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g = \{ \quad & (0,0), (1,2), \\ & (2,1), (3,6), \\ & (4,2), (5,10), \\ & (6,3), (7,14), \\ & ... \\ & (2k,k), (1+2k, 2+4k), \\ & ... \qquad \} \end{aligned}$$

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ 2 \cdot n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g = \{ \begin{array}{l} (0,0), (1,2), \\ (2,1), (3,6), \\ (4,2), (5,10), \\ (6,3), (7,14), \\ \ldots \\ (2k,k), (1+2k, 2+4k), \\ \ldots \end{array} \}$$

$f \sqsubseteq g$? ✓

$g \sqsubseteq f$? ✗

$$f = \{ \begin{array}{l} (0,0), \\ (2,1), \\ (4,2), \\ (6,3), \\ \ldots \\ (2k,k), \\ \ldots \end{array} \}$$

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N},\mathbb{N})$

$\emptyset \sqsubseteq$ { (0,0) } $\sqsubseteq$ { (0,0), (1,1) } $\sqsubseteq \ \cdots$

quale funzione stiamo approssimando?

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{ (0,0) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1), (2,2) \} \sqsubseteq \cdots$$

quale funzione stiamo approssimando?

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N},\mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{\ (0,0)\ \} \sqsubseteq \left\{ \begin{array}{l} (0,0), \\ (1,1) \end{array} \right\} \sqsubseteq \left\{ \begin{array}{l} (0,0), \\ (1,1), \\ (2,2) \end{array} \right\} \sqsubseteq \left\{ \begin{array}{l} (0,0), \\ (1,1), \\ (2,2), \\ (3,3) \end{array} \right\} \sqsubseteq \ \ldots$$

quale funzione stiamo approssimando?

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N},\mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{\ (0,0)\ \} \sqsubseteq \{\ (0,0),\ (1,1)\ \} \sqsubseteq \{\ (0,0),\ (1,1),\ (2,2)\ \} \sqsubseteq \{\ (0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3)\ \} \sqsubseteq \{\ (0,0),\ (1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\ \} \sqsubseteq \dots$$

quale funzione stiamo approssimando?

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N},\mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{\ (0,1)\ \} \sqsubseteq \left\{ \begin{array}{l} (0,1), \\ (1,1) \end{array} \right\} \sqsubseteq \left\{ \begin{array}{l} (0,1), \\ (1,1), \\ (2,2) \end{array} \right\} \sqsubseteq \ \ldots$$

quale funzione stiamo approssimando?

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{ (0,1) \} \sqsubseteq \left\{ \begin{array}{l} (0,1), \\ (1,1) \end{array} \right\} \sqsubseteq \left\{ \begin{array}{l} (0,1), \\ (1,1), \\ (2,2) \end{array} \right\} \sqsubseteq \left\{ \begin{array}{l} (0,1), \\ (1,1), \\ (2,2), \\ (3,6) \end{array} \right\} \sqsubseteq \dots$$

quale funzione stiamo approssimando?

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N},\mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{ (0,1) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1), (2,2) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1), (2,2), (3,6) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1), (2,2), (3,6), (4,24) \} \sqsubseteq \ldots$$

quale funzione stiamo approssimando?

Proprieta' funzionale

$\mathbf{Pf}(A, B) = \{f : A \rightharpoonup B\}$ funzioni parziali

$$\mathbf{Pf}(A, B) = \{f \subseteq A \times B \mid \boxed{\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2}\}$$

proprieta' funzionale

$f(a) \downarrow \triangleq \exists b \in B.\ (a, b) \in f$ la funzione f e' definita su a

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow (\forall a \in A. \quad f(a) \downarrow \Rightarrow g(a) \downarrow \wedge f(a) = g(a))$$
$$\Leftrightarrow f \subseteq g$$

$(\mathbf{Pf}(A, B), \sqsubseteq)$ è un OP con bottom

quale e' il bottom?

la relazione vuota
(la funzione sempre indefinita)

è completo?

E' Pf completo?

$(\mathbf{Pf}(A,B),\sqsubseteq)$

completo?

Data una catena $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ consideriamo $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i \subseteq A\times B$

vogliamo provare che $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i \in \mathbf{Pf}(A,B)$

cioe' che $f = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ soddisfa la proprieta' funzionale

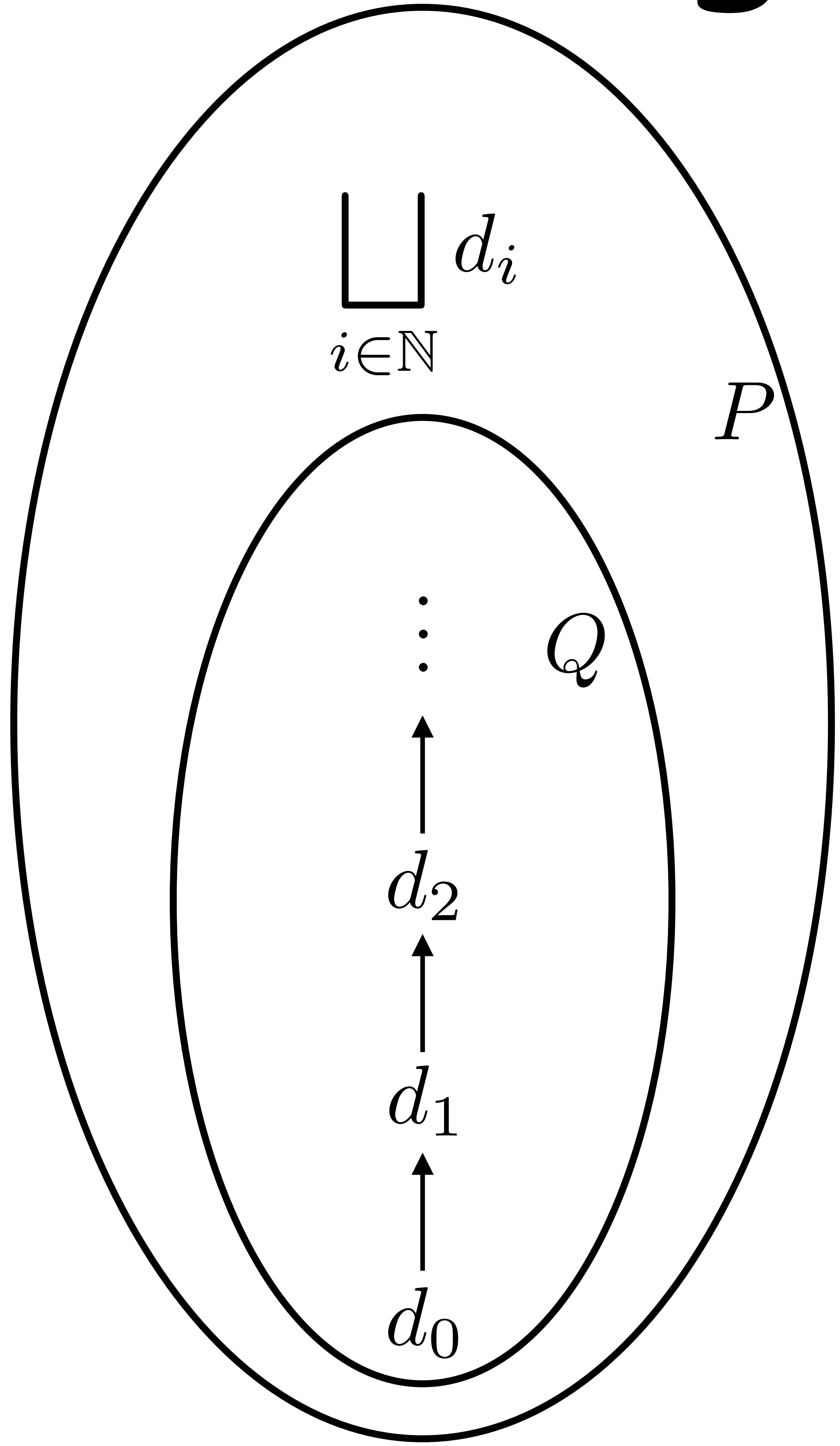
sappiamo che ogni f_i e' funzionale

$$\forall i\in\mathbb{N}.\forall a\in A.\forall b_1,b_2\in B.(a,b_1)\in f_i \wedge (a,b_2)\in f_i \Rightarrow b_1=b_2$$

dobbiamo provare f e' funzionale

$$\forall a\in A.\forall b_1,b_2\in B.(a,b_1)\in f \wedge (a,b_2)\in f \Rightarrow b_1=b_2$$

in un disegno



e' il limite in Q ?

Pf e'completo

dobbiamo provare f e' funzionale

$$\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2$$

prendiamo

$a \in A, b_1, b_2 \in B$ tali che $(a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f$

dobbiamo provare $b_1 = b_2$

$$(a, b_1) \in f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}. (a, b_1) \in f_k$$

$$m \triangleq \max\{k, h\}$$

$$(a, b_2) \in f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N}. (a, b_2) \in f_h$$

Chiaramente

$f_k \subseteq f_m$ $\quad$ $f_h \subseteq f_m$ $\quad$ f_m e' funzionale

$$(a, b_1) \in f_m \qquad (a, b_2) \in f_m \qquad \Rightarrow \qquad b_1 = b_2$$

Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N},\mathbb{N})$

$$
\begin{aligned}
f_0 \ \emptyset \quad & \subseteq \quad \{(0,1)\} \ f_1 \\
& \subseteq \quad \{(0,1),(1,1)\} \ f_2 \\
& \subseteq \quad \{(0,1),(1,1),(2,2)\} \ f_3 \\
& \subseteq \quad \{(0,1),(1,1),(2,2),(3,6)\} \ f_4 \\
& \subseteq \quad \{(0,1),(1,1),(2,2),(3,6),(4,24)\} \ f_5 \\
& \subseteq \quad \cdots
\end{aligned}
$$

$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} f_i$ e' (forse) la funzione fattoriale

nota: il limite di funzioni parziali puo' essere una funzione totale

Funzioni

$\mathbf{Tf}(A,B) = (A \to B)$ funzioni totali

$\mathbf{Pf}(A,B) \equiv \mathbf{Tf}(A,B_\perp)$ $B_\perp \triangleq B \uplus \{\perp\}$

$\sqsubseteq_{B_\perp} \triangleq$ ordine piatto

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall a \in A.\ f(a) \sqsubseteq_{B_\perp} g(a)$$

OP? immediato da controllare

bottom? $f_\perp(a) = \perp$ per ogni $a \in A$

completo? lo proveremo piu' tardi
(come istanza di un risultato piu' generale)

$$(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i)(a) \triangleq \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(a)$$

(ordering piatto,esiste il limite)

Funzioni monotone

Funzioni monotone

$(D, \sqsubseteq_D)$ OP $\quad$ $(E, \sqsubseteq_E)$ OP $\quad$ $f : D \to E$

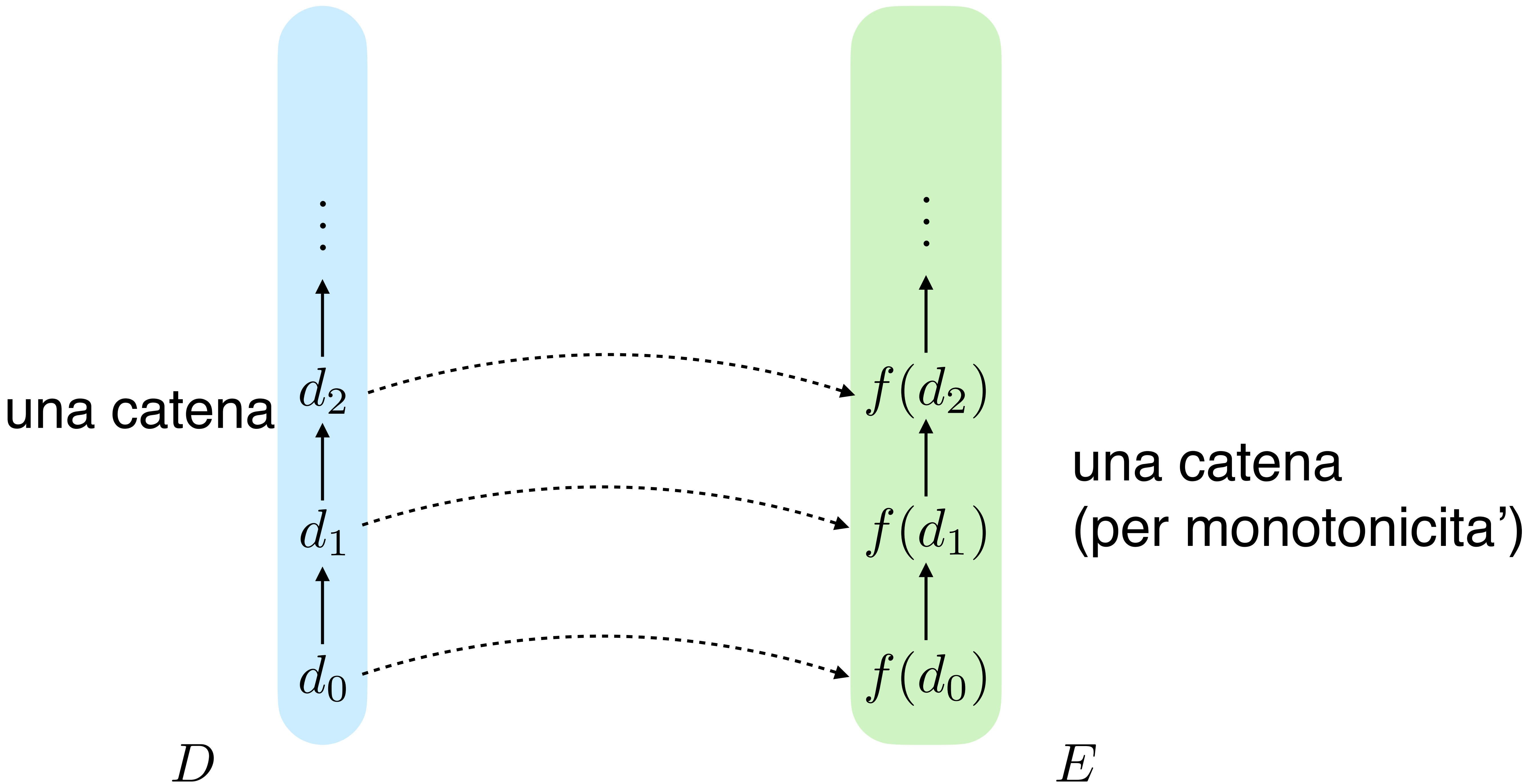
f e' monotona se $\forall d_1, d_2 \in D.\ d_1 \sqsubseteq_D d_2 \Rightarrow f(d_1) \sqsubseteq_E f(d_2)$

Monotona = preserva l'ordine

$$\left.\begin{array}{l} \{d_i\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ una catena } D \\ f \text{ monotona} \end{array}\right\} \Rightarrow \{f(d_i)\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ una catena in } E$$

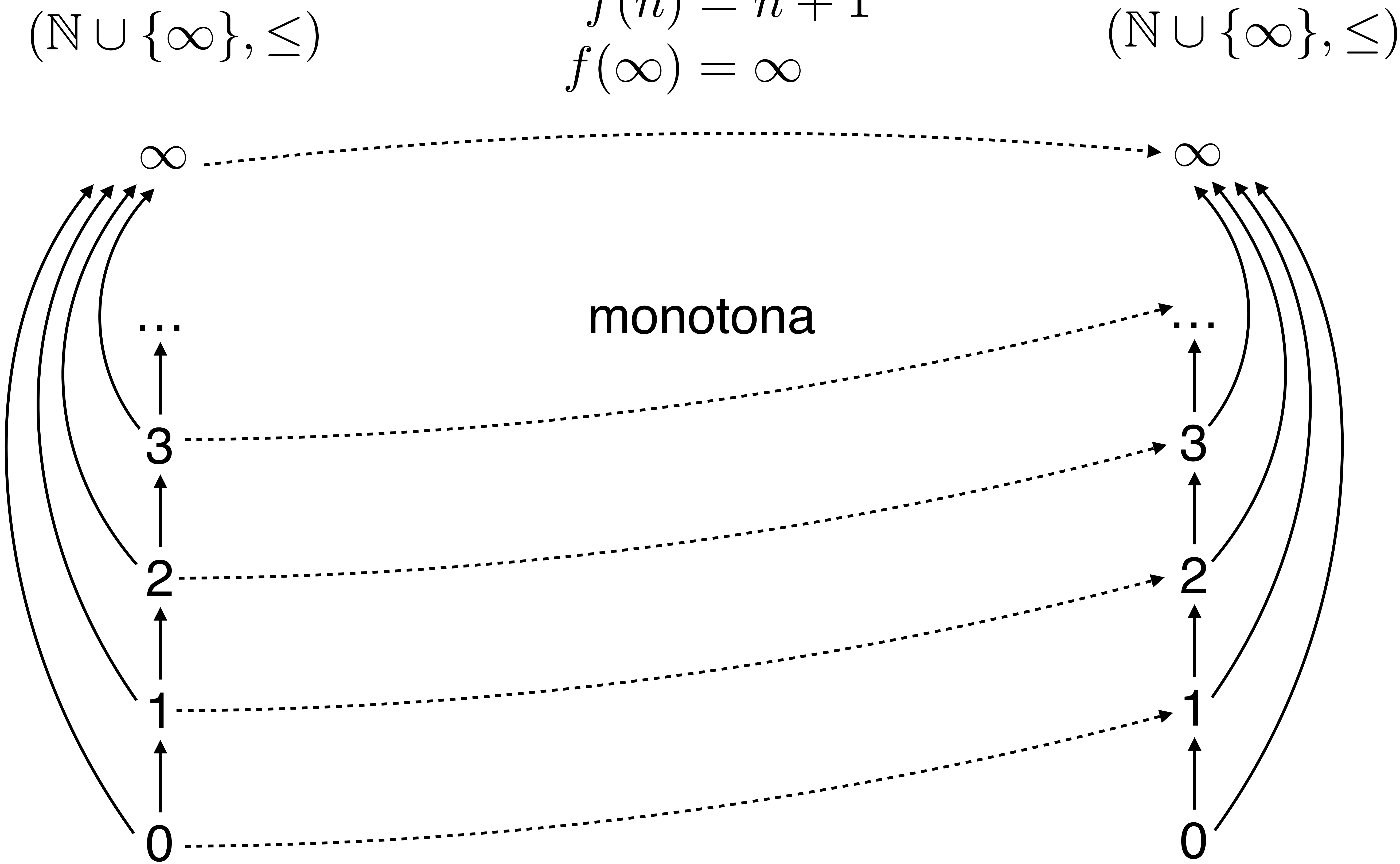
Quando $D = E$ diciamo $f : D \to D$ e' una funzione su D

Monotonicita'



Esempio

$$f(n) = n + 1$$
$$f(\infty) = \infty$$

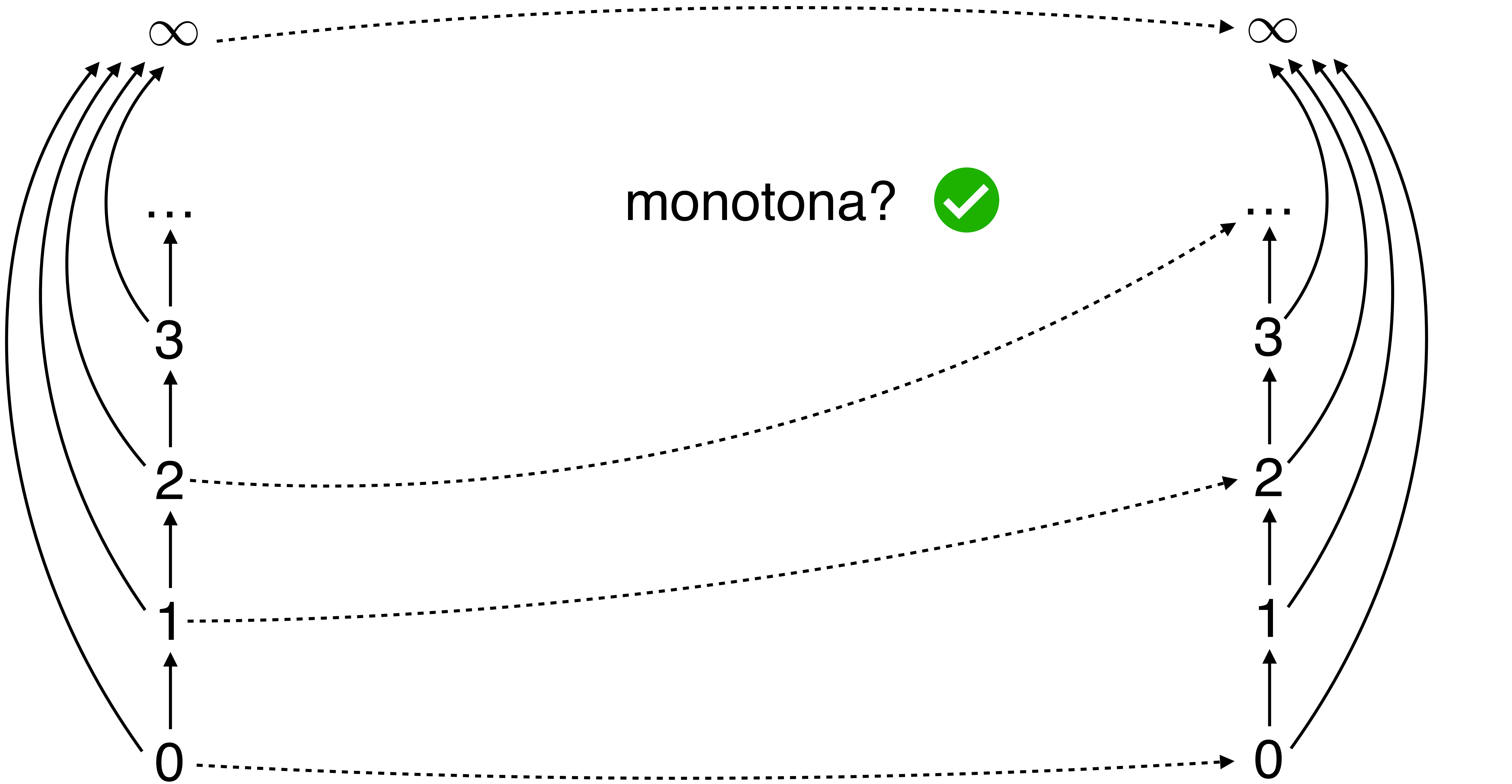


Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

$$f(n) = 2 \cdot n$$
$$f(\infty) = \infty$$

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$



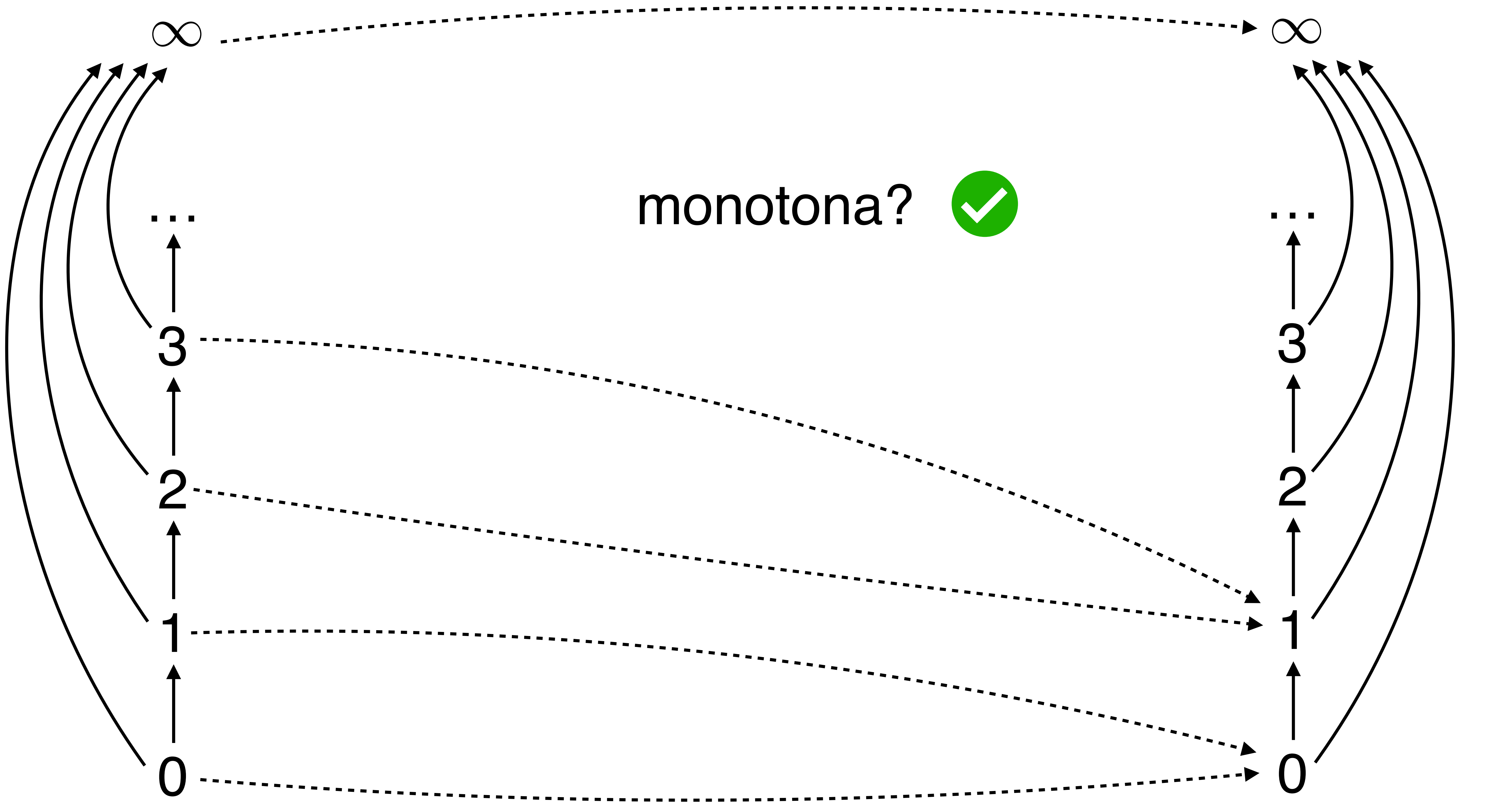
monotona? ✅

Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

$$f(n) = n/2$$
$$f(\infty) = \infty$$

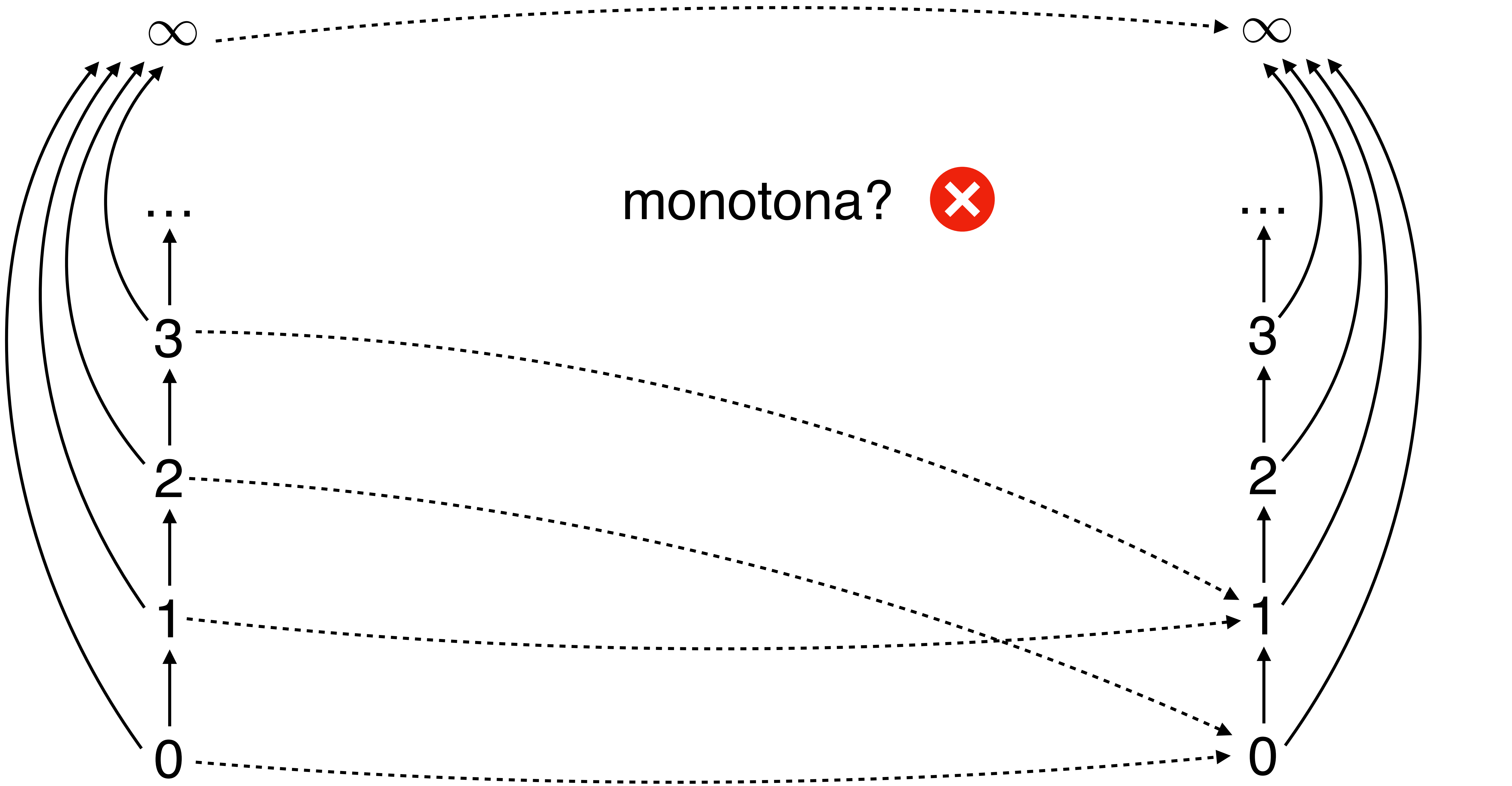
$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$



Esercizio

$$f(n) = n \ \% \ 2$$
$$f(\infty) = \infty$$

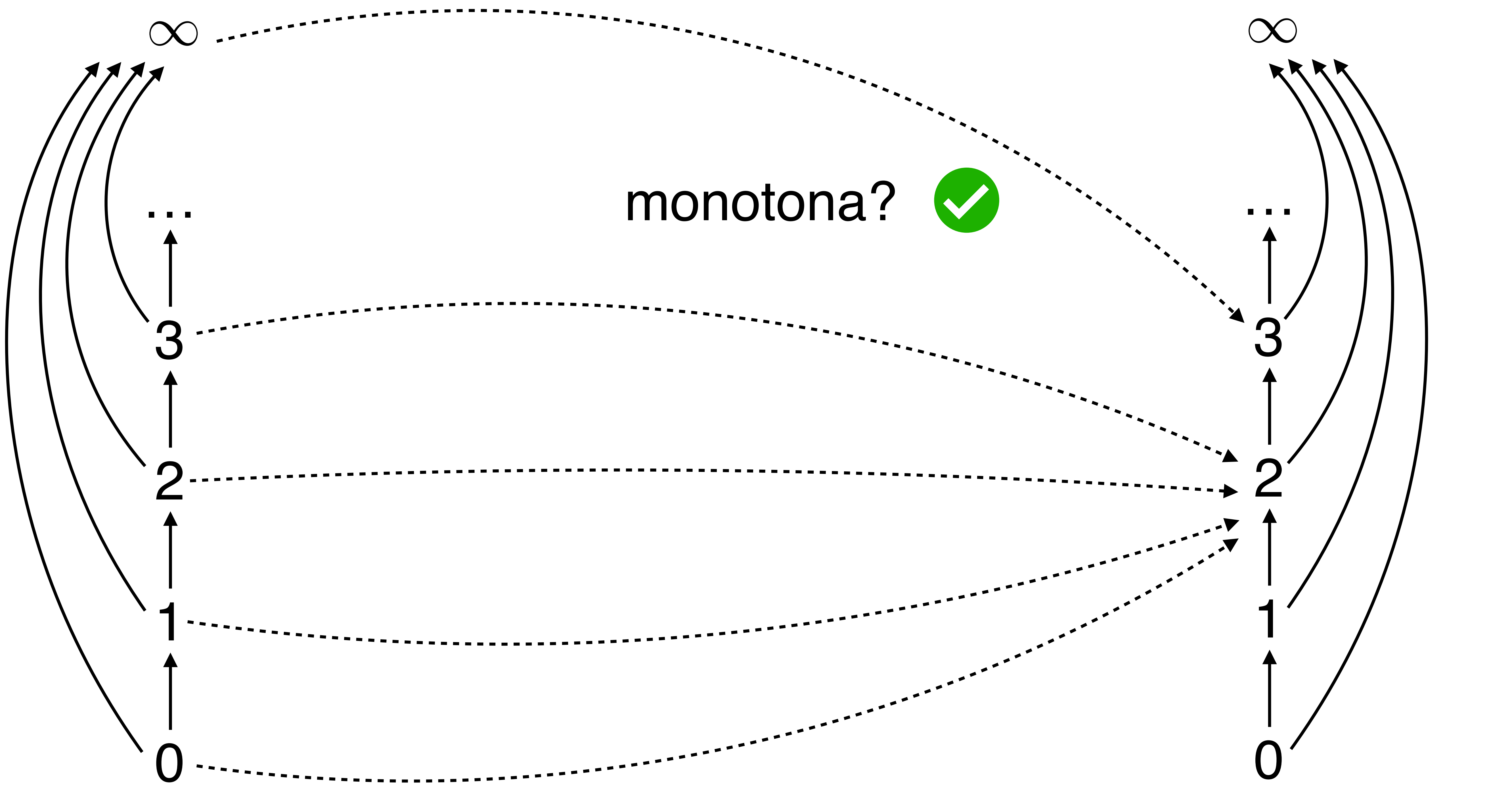
$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$



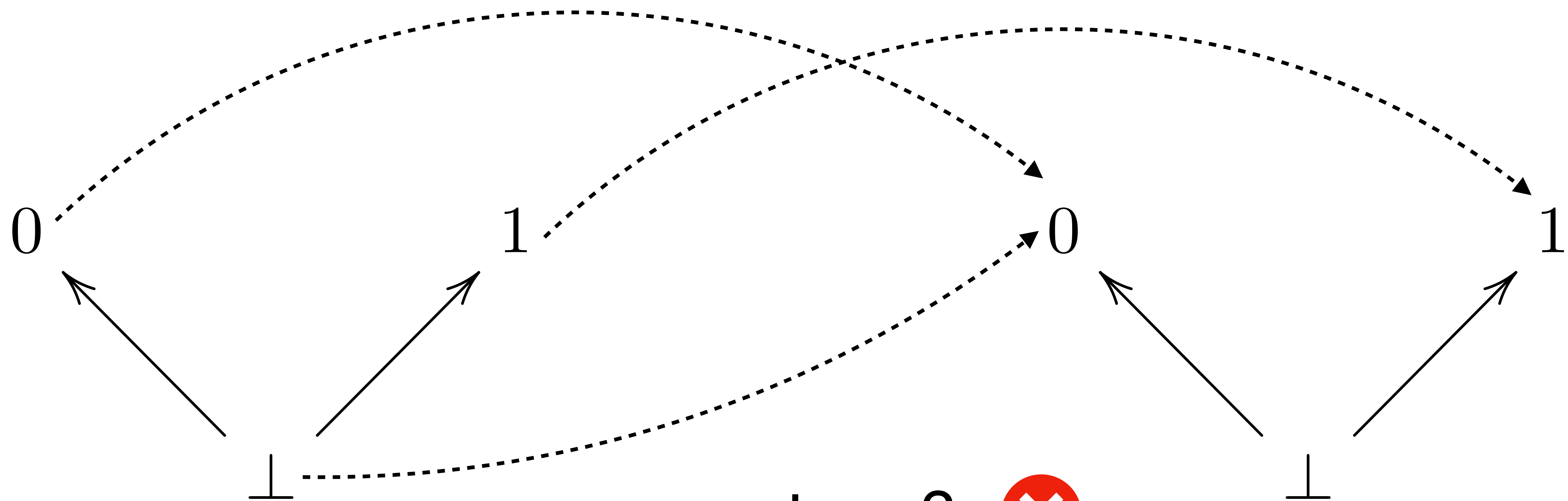
Esercizio

$$f(n) = 2$$
$$f(\infty) = 3$$

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$



Esercizio



monotona? ❌

D $\qquad f : D \to D \qquad$ D

$$f(\perp) = f(0) = 0$$
$$f(1) = 1$$

$\perp \sqsubseteq 1$ $\qquad\qquad$ $f(\perp) = 0 \not\sqsubseteq 1 = f(1)$

Composizione

TH. Ogni composizione di funzioni monotone e' monotona

$(D, \sqsubseteq_D)$ OP
$(E, \sqsubseteq_E)$ OP
$(F, \sqsubseteq_F)$ OP

$f : D \to E$ monotona
$g : E \to F$ monotona

$\Rightarrow$ $h = g \circ f : D \to F$ monotona

proof. vogliamo provare $\forall x, y \in D.\ x \sqsubseteq_D y \Rightarrow h(x) \sqsubseteq_F h(y)$

prendiamo $x \sqsubseteq_D y$

vogliamo provare $h(x) \sqsubseteq_F h(y)$

allora $f(x) \sqsubseteq_E f(y)$ perche' f e' monotona

allora $\underbrace{g(f(x))}_{= h(x)} \sqsubseteq_F \underbrace{g(f(y))}_{= h(y)}$ perche' g e' monotona

Funzioni continue

Funzioni continue

$(D, \sqsubseteq_D)$ OPC $(E, \sqsubseteq_E)$ OPC $f : D \to E$ monotona

f e' continua se $\forall \{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}.\ f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i\right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i)$

catena

limite in D

limite in E

Continua = preserva il limite

Continuita'

lub | u.b. (per monotonia)

$$
\begin{tikzcd}
\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i \arrow[rr, dashed] & & f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right) \\
& & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d_i) \arrow[u, "=?"'] \\
\vdots & & \vdots \\
d_2 \arrow[u] \arrow[rr, dashed] & & f(d_2) \arrow[u] \\
d_1 \arrow[u] \arrow[rr, dashed] & & f(d_1) \arrow[u] \\
d_0 \arrow[u] \arrow[rr, dashed] & & f(d_0) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

lub

una catena | una catena (per monotonia)

Continuita'

$$
\begin{tikzcd}
\text{lub} & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i \arrow[r, dashed] & f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right) \\
 & & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d_i) \arrow[u, "=?"'] \\
 & \vdots & \vdots \\
 & d_2 \arrow[u] \arrow[r, dashed] & f(d_2) \arrow[u] \\
\text{una catena} & d_1 \arrow[u] \arrow[r, dashed] & f(d_1) \arrow[u] \\
 & d_0 \arrow[u] \arrow[r, dashed] & f(d_0) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d_i) \sqsubseteq_E f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right)$$

segue per monotonia (e OPC)

Continuita'

$$
\begin{tikzcd}
\text{lub} & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i \arrow[rr, dashed, bend left] & & f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right) \\
 & & & \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d_i) \arrow[u, "=?"'] \\
 & \vdots & & \vdots \\
 & d_2 \arrow[u] \arrow[rr, dashed, bend left] & & f(d_2) \arrow[u] \\
\text{una catena} & d_1 \arrow[u] \arrow[rr, dashed, bend left] & & f(d_1) \arrow[u] \\
 & d_0 \arrow[u] \arrow[rr, dashed, bend left] & & f(d_0) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$$\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} f(d_i) \stackrel{?}{\sqsupseteq}_E f\left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i\right)$$

continuita'

Lemma

$(D, \sqsubseteq_D)$ OPC
no catene infinite

$(E, \sqsubseteq_E)$ OPC

$f : D \to E$
monotona
$\Rightarrow$
f
continua

prova. prendiamo una catena $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e' finita $\Rightarrow$ $\exists k \in \mathbb{N}. \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i = d_k$

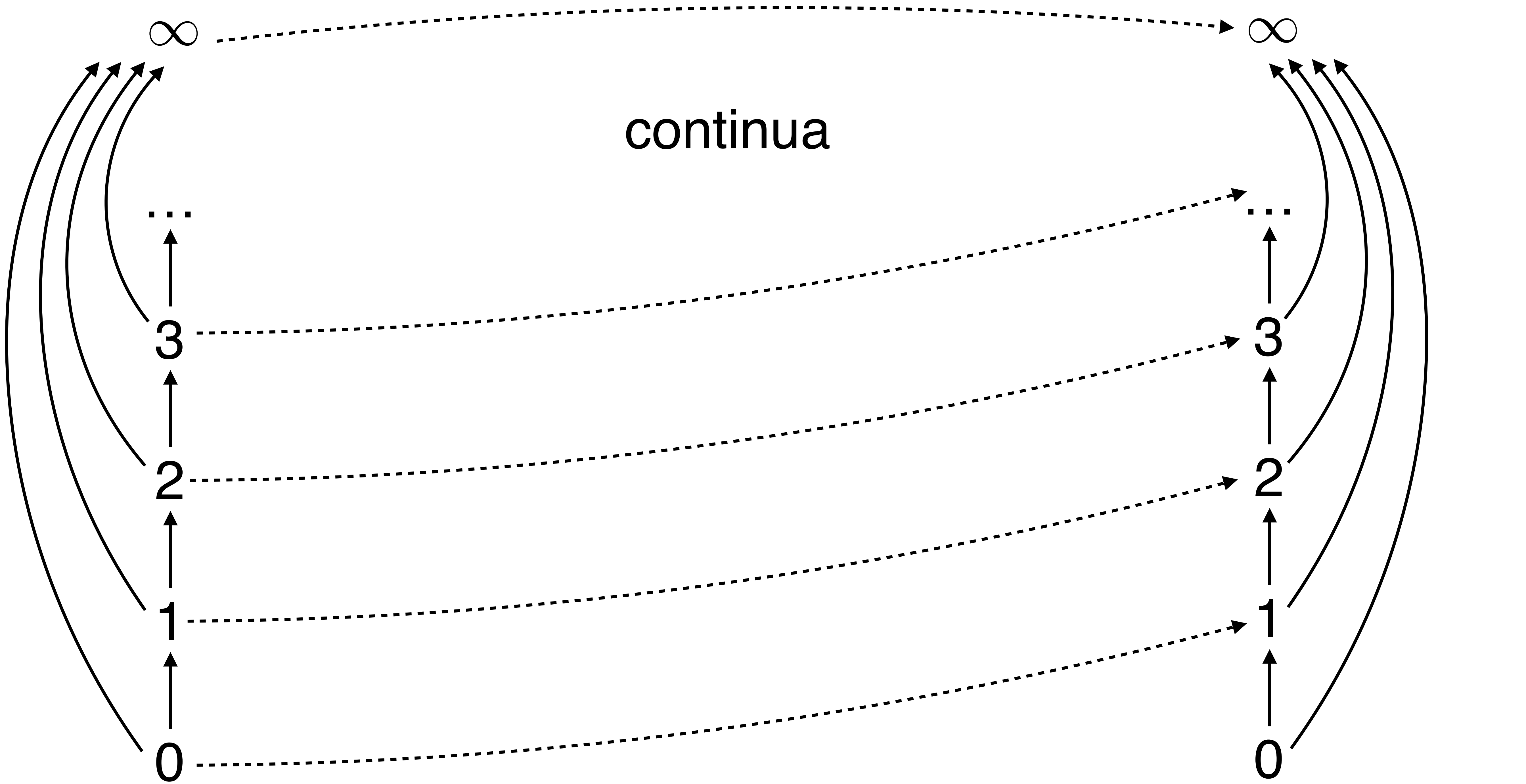
$\Downarrow$

$\{f(d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ e' finita $\Rightarrow$ $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i) = f(d_k) = f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i\right)$

Esempio

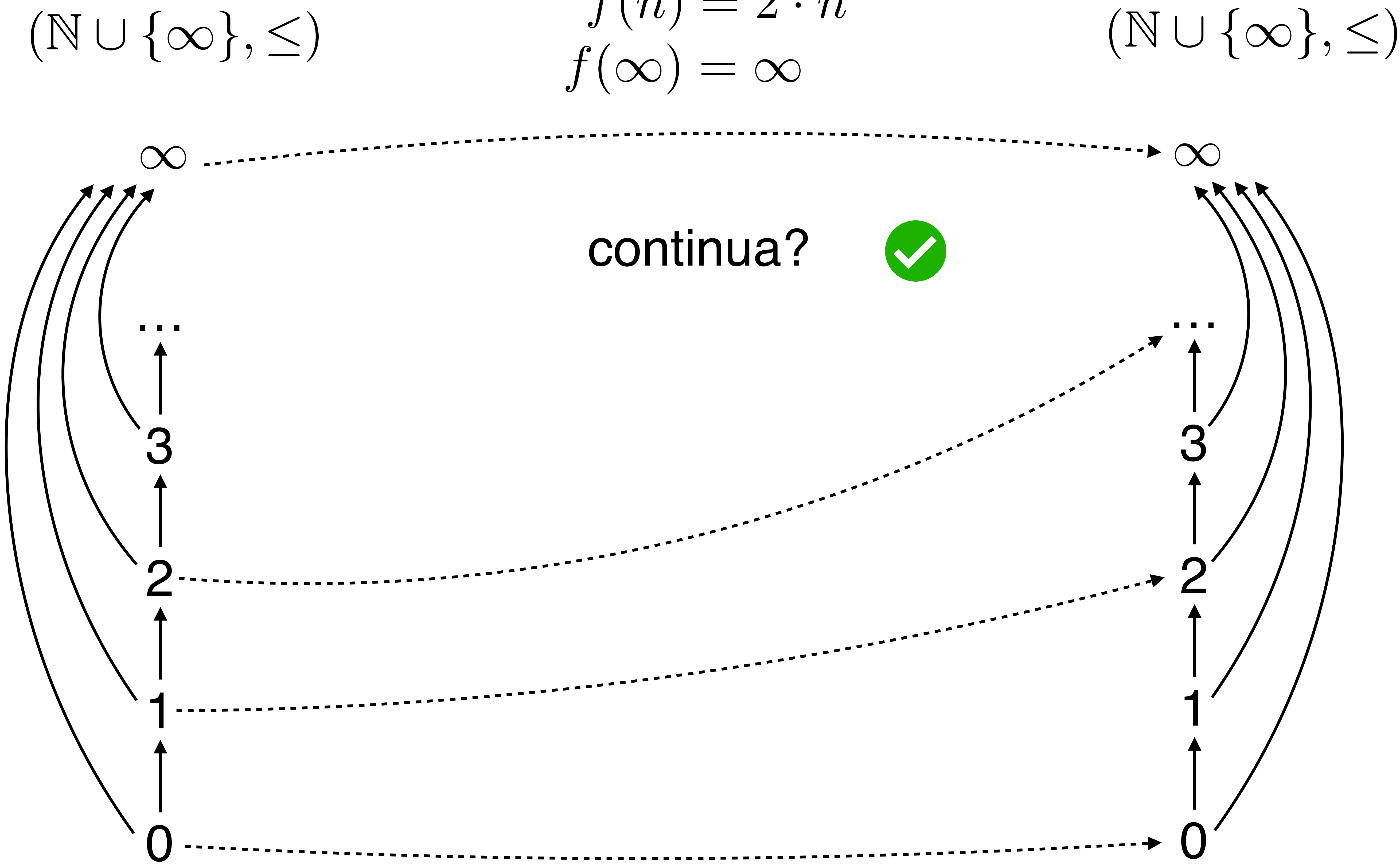
$$f(n) = n + 1$$
$$f(\infty) = \infty$$

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$



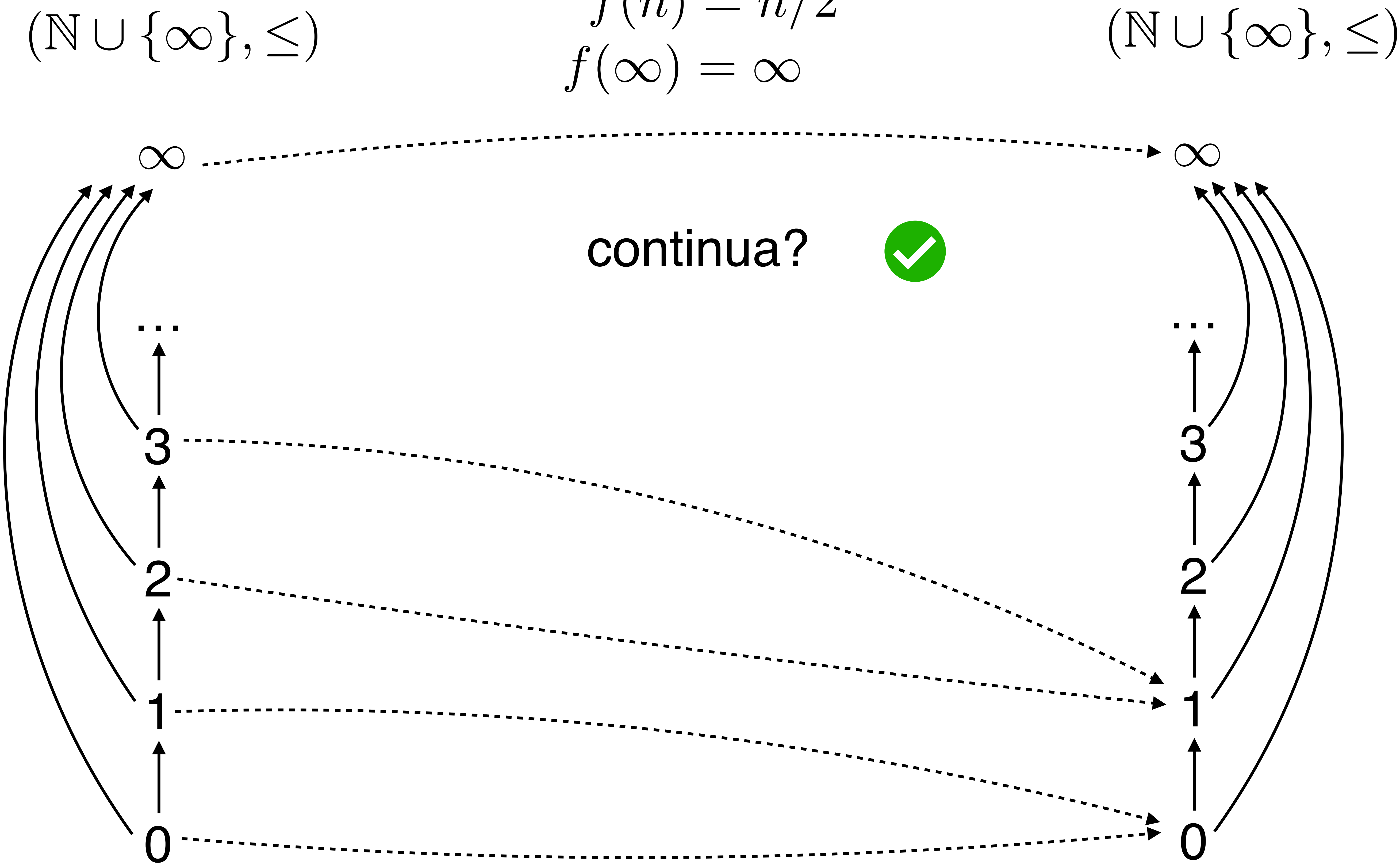
Esercizio

$$f(n) = 2 \cdot n$$
$$f(\infty) = \infty$$



Esempio

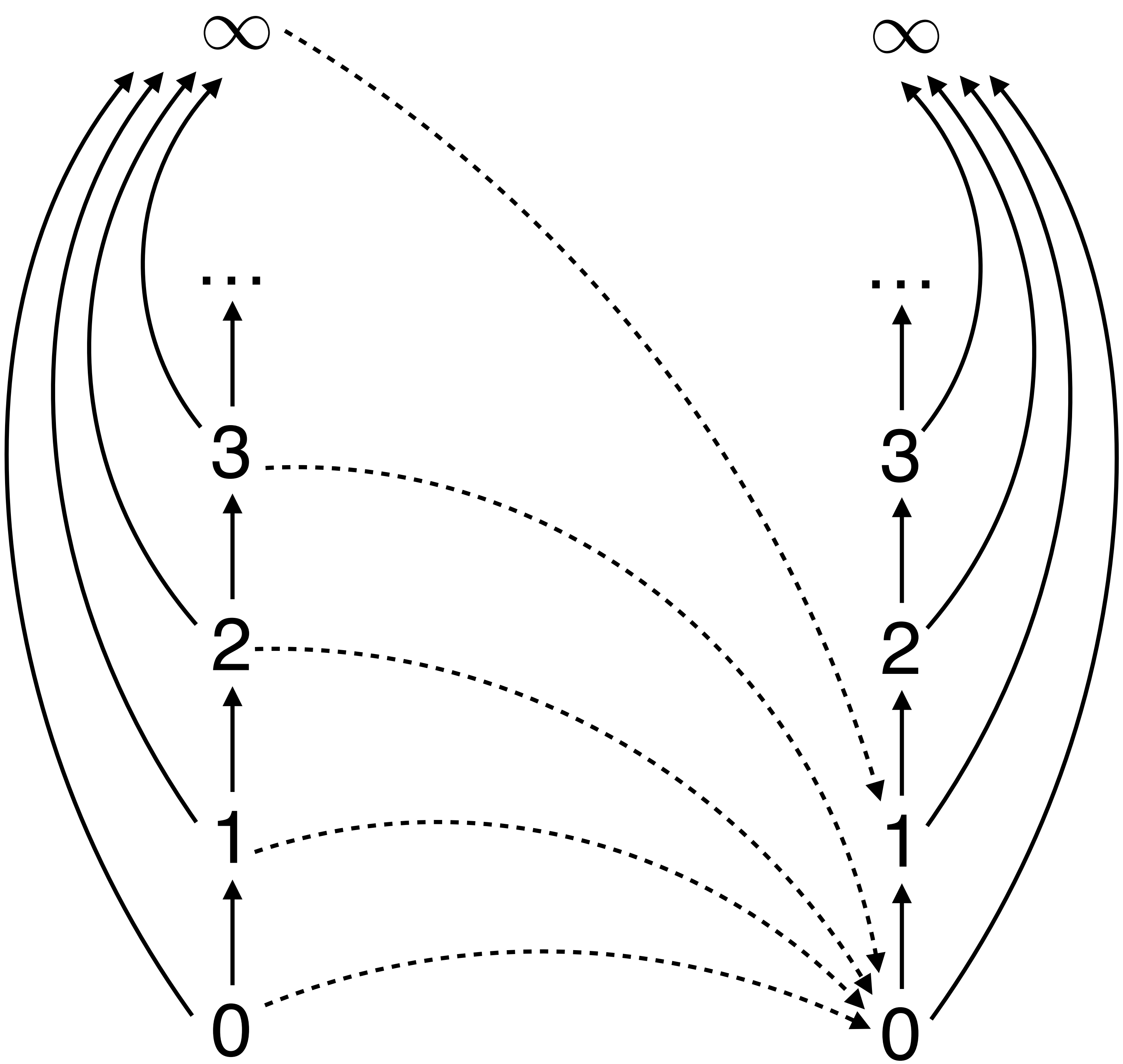
$$f(n) = n/2$$
$$f(\infty) = \infty$$



Esempio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

funzione monotona ma non continua



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{if } x = \infty \end{cases}$$

$$d_i = 2 \cdot i \qquad \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i = \infty$$

$$f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i\right) = f(\infty) = 1$$

$$f(d_i) = 0$$

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} 0 = 0$$

Composizione

TH. ogni composizione di funzioni continue e' continua

$(D, \sqsubseteq_D)$ OPC
$(E, \sqsubseteq_E)$ OPC
$(F, \sqsubseteq_F)$ OPC

$f : D \to E$ continua
$g : E \to F$ continua
$\Rightarrow$ $h = g \circ f : D \to F$ continua

prova. prendiamo una catena $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare $h\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i\right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} h(d_i)$

$$h\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i\right) = g\left(f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i\right)\right) = g\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i)\right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} g(f(d_i))$$

$$= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} h(d_i)$$

Teorema di punto fisso di Kleene

Applicazioni ripetute

$$f : D \to D$$

$$f^0(d) \triangleq d$$

$$f^{n+1}(d) \triangleq f(f^n(d))$$

$$f^n(d) = \overbrace{f(\cdots(f}^{n\ \text{volte}}(d))\cdots)$$

$$f^n : D \to D$$

Lemma

$(D, \sqsubseteq)$ $\mathrm{PO}_\perp$ $\quad f : D \to D$ monotona $\Rightarrow$ $\{f^n(\perp)\}_{n\in\mathbb{N}}$ e' una catena

prova. abbiamo bisogno di provare $\forall n \in \mathbb{N}.\ f^n(\perp) \sqsubseteq f^{n+1}(\perp)$

per induzione matematica $\quad P(n) \triangleq f^n(\perp) \sqsubseteq f^{n+1}(\perp)$

$P(0) \triangleq f^0(\perp) \sqsubseteq f^1(\perp)$ $\qquad f^0(\perp) = \perp \sqsubseteq f^1(\perp)$

$\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ $\quad$ prendiamo un generico n

assumiamo $P(n) \triangleq f^n(\perp) \sqsubseteq f^{n+1}(\perp)$

vogliamo provare $P(n+1) \triangleq f^{n+1}(\perp) \sqsubseteq f^{n+2}(\perp)$

$$f^n(\perp) \sqsubseteq f^{n+1}(\perp)$$

$$\Downarrow$$

$$f^{n+1}(\perp) = f(f^n(\perp)) \sqsubseteq f(f^{n+1}(\perp)) = f^{n+2}(\perp)$$

Verso il teo. di Kleene

quando $(D, \sqsubseteq)$ e' un $\mathrm{OPC}_\perp$

$\{f^n(\perp)\}_{n\in\mathbb{N}}$ che sappiamo essere una catena deve
avere un limite

Attenzione :

$\{f^n(d)\}_{n\in\mathbb{N}}$

Non e' necessariamente una catena! Es. $\forall n, f(n) = 5$ e d=7
$f^0(7) = 7, f^1(7) = 5, f^2(7) = 5, \ldots$

Il teorema del punto fisso di Kleene afferma che
se f è continua, allora il limite della catena che parte
con $\perp$ è il minimo punto fisso di f

Pre-punti fissi

$(D, \sqsubseteq)$ OP $\qquad f : D \to D$ monotona

punto fisso $\quad p \in D \qquad f(p) = p$

pre-punto fisso $\quad p \in D \qquad f(p) \sqsubseteq p$

ogni punto fisso e' anche un pre-punto fisso

Teorema di Kleene

$(D, \sqsubseteq)$ $\text{OPC}_\perp$ $\quad f : D \to D$ continua

consideriamo $\quad \mathit{fix}(f) \triangleq \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$

1. $\mathit{fix}(f)$ e' un punto fisso di f

$$f(\mathit{fix}(f)) = \mathit{fix}(f)$$

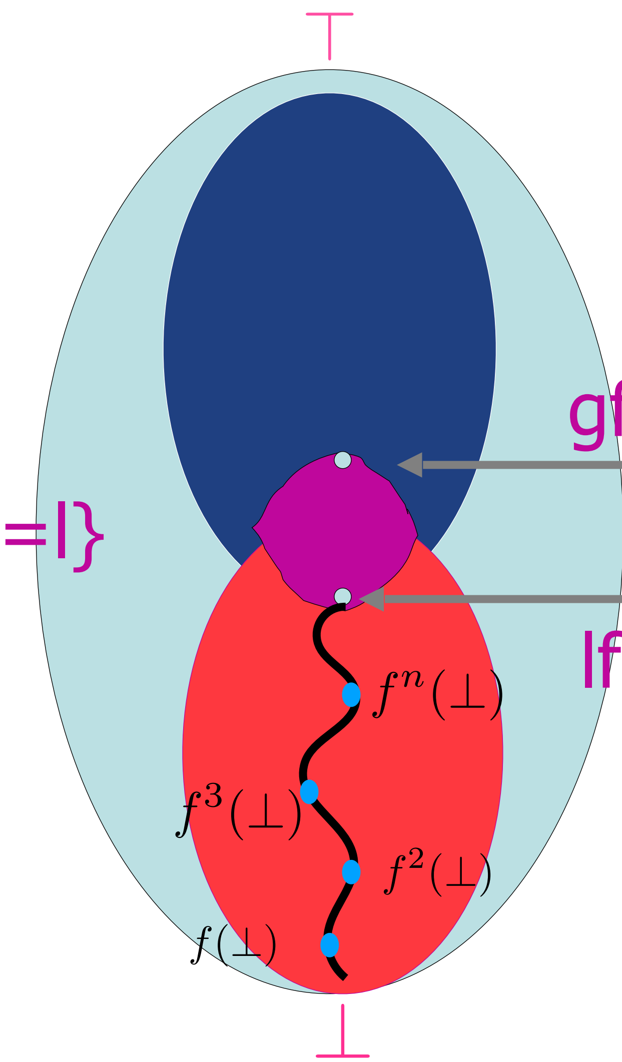
2. $\mathit{fix}(f)$ e' il minimo punto fisso di f

$$\forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq d \Rightarrow \mathit{fix}(f) \sqsubseteq d$$

se d e' un pre-punto fisso allora $\mathit{fix}(f)$ e' piu' piccolo di d

Kleene's Theorem

$\mathrm{Fix}(f) = \{\, l \in L \;\mid\; f(l) = l \,\}$



$\mathrm{gfp}(f) = \sqcap_n f^n(\top)$

$\mathrm{lfp}(f) = \sqcup_n f^n(\perp)$

Teorema di Kleene: 1

prova.

1. $f(\mathit{fix}(f)) = \mathit{fix}(f)$

$$f(\mathit{fix}(f)) = f\left(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\bot)\right)$$ per def di fix

$$= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f(f^n(\bot))$$ per continuita'

$$= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^{n+1}(\bot)$$ per def di f^n

$$= \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} f^n(\bot)$$ per indipendenza dei prefissi dei limiti

$$= \mathit{fix}(f)$$ per def di fix

Teorema di Kleene: 2

prova. 2. $\forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq d \Rightarrow \mathit{fix}(f) \sqsubseteq d$

dimostriamo che ogni pre-punto fisso è un limite superiore della catena

$$\{f^n(\bot)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

per definizione $\mathit{fix}(f)$ e' il lub della stessa catena

e percio' piu' piccolo di ogni altro upper bound

Teorema di Kleene: 2

2. $\forall d \in D.\ f(d) \sqsubseteq d \Rightarrow \mathit{fix}(f) \sqsubseteq d$

prendiamo $d \in D$ tale che $f(d) \sqsubseteq d$

proviamo $\forall n \in \mathbb{N}.\ f^n(\bot) \sqsubseteq d$ (d e'un upper bound)

$P(n) \triangleq f^n(\bot) \sqsubseteq d$ per induzione matematica

$P(0) \triangleq f^0(\bot) \sqsubseteq d$ $\quad f^0(\bot) = \bot \sqsubseteq d$

$\forall n \in \mathbb{N}.\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ prendiamo un generico n

assumiamo $P(n) \triangleq f^n(\bot) \sqsubseteq d$

vogliamo provare $P(n+1) \triangleq f^{n+1}(\bot) \sqsubseteq d$

$$f^n(\bot) \sqsubseteq d$$

(per def) (monot.) $\Downarrow$ (pre-punto fisso)

$$f^{n+1}(\bot) = f(f^n(\bot)) \sqsubseteq f(d) \sqsubseteq d$$

Esempio

$n = 2 \cdot n$ $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ $\perp = 0$ $\mathrm{OPC}_\perp$

$$f(n) = 2 \cdot n$$
$$f(\infty) = \infty$$

monotona? ok
continua? ok

$$f^0(0) = 0$$

$$f^1(0) = f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

punto fisso raggiunto !

Esempio

$n = n + 1$ $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$ $\bot = 0$ $\mathrm{OPC}_\bot$

$$f(n) = n + 1$$
$$f(\infty) = \infty$$

monotona? ok
continua? ok

$$f^0(0) = 0$$
$$f^1(0) = f(0) = 0 + 1 = 1$$
$$f^2(0) = f(f^1(0)) = f(1) = 1 + 1 = 2$$
$$f^3(0) = f(f^2(0)) = f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(0) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} n = \infty$$ punto fisso

Esempio

$X = X \cap \{1\}$ $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ $\bot = \emptyset$ $\mathrm{OPC}_\bot$

$$f(X) = X \cap \{1\}$$

monotona? ok
continua? ok

$$f^0(\emptyset) = \emptyset$$
$$f^1(\emptyset) = f(\emptyset) = \emptyset \cap \{1\} = \emptyset$$

punto fisso raggiunto!

Esempio

$X = \mathbb{N} \setminus X$ $\qquad (\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ $\qquad \bot = \emptyset$ $\qquad \mathrm{OPC}_\bot$

$$f(X) = \mathbb{N} \setminus X$$

monotona? NO

piu' grande X piu' piccolo $f(X)$

$$f^0(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^1(\emptyset) = f(\emptyset) = \mathbb{N} \setminus \emptyset = \mathbb{N}$$

$$f^2(\emptyset) = f(f^1(\emptyset)) = f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \emptyset$$

non una catena!

Esempio

$X = X \cup \{1\}$ $(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$ $\bot = \emptyset$ $\mathrm{OPC}_\bot$

$f(X) = X \cup \{1\}$

monotona? ok
continua? ok

$$f^0(\emptyset) = \emptyset$$
$$f^1(\emptyset) = f(\emptyset) = \emptyset \cup \{1\} = \{1\}$$
$$f^2(\emptyset) = f(f^1(\emptyset)) = f(\{1\}) = \{1\} \cup \{1\} = \{1\}$$

punto fisso raggiunto!

Esercizio (da consegnare)

Sia D un OPC

sia $\{d_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una catena in D

sia $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una catena infinita in $(\mathbb{N},\leq)$

1. Proviamo che $\{d_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e' una catena in D

2. Provare o confutare $\displaystyle\bigsqcup_{j\in\mathbb{N}} d_{k_j} = \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} d_i$