



# Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

## 5.2 - Teorema di punto fisso di Kleene

funzioni parziali

# Funzioni parziali

$D = (A \rightarrow B) = \mathbf{Pf}(A, B) = \{f : A \rightarrow B\}$  funzioni parziali

$f \sqsubseteq g$  se  $f(a)$  e' definita,  $g(a)$  e' definita e  $g(a) = f(a)$

ma  $g(a)$  puo' essere definita quando  $f(a)$  non lo e'

se vediamo le funzioni parziali come relazioni

$$\{(x, f(x)) \mid f(x) \neq \perp\} \subseteq A \times B$$

$f \sqsubseteq g$  significa essenzialmente  $f \subseteq g$

# Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f = \{ \begin{array}{l} \begin{array}{cc} n & f(n) \end{array} \\ (0, 0), \\ (2, 1), \\ (4, 2), \\ (6, 3), \\ \dots \\ (2k, k), \\ \dots \end{array} \}$$

# Esempio

**Pf**( $\mathbb{N}, \mathbb{N}$ )

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ 2 \cdot n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g = \left\{ \begin{array}{l} (0, 0), (1, 2), \\ (2, 1), (3, 6), \\ (4, 2), (5, 10), \\ (6, 3), (7, 14), \\ \dots \\ (2k, k), (1 + 2k, 2 + 4k), \\ \dots \end{array} \right\}$$

# Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{if } n \text{ even} \\ 2 \cdot n & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} n/2 & \text{se } n \text{ pari} \\ \perp & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g = \{ (0, 0), (1, 2), \\ (2, 1), (3, 6), \\ (4, 2), (5, 10), \\ (6, 3), (7, 14), \\ \dots \\ (2k, k), (1 + 2k, 2 + 4k), \\ \dots \}$$

$$f = \{ (0, 0), \\ (2, 1), \\ (4, 2), \\ (6, 3), \\ \dots \\ (2k, k), \\ \dots \}$$

$$f \sqsubseteq g? \quad \checkmark$$

$$g \sqsubseteq f? \quad \times$$

# Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{ (0,0) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1) \} \sqsubseteq \dots$$

quale funzione stiamo approssimando?

# Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{ (0,0) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1), (2,2) \} \sqsubseteq \dots$$

quale funzione stiamo approssimando?



# Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{ (0,0) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1), (2,2) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1), (2,2), (3,3) \} \sqsubseteq \dots$$

quale funzione stiamo approssimando?

# Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{ (0,0) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1), (2,2) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1), (2,2), (3,3) \} \sqsubseteq \{ (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) \} \sqsubseteq \dots$$

quale funzione stiamo approssimando?

# Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{ (0,1) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1), (2,2) \} \sqsubseteq \dots$$

quale funzione stiamo approssimando?

# Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{ (0,1) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1), (2,2) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1), (2,2), (3,6) \} \sqsubseteq \dots$$

quale funzione stiamo approssimando?

# Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$\emptyset \sqsubseteq \{ (0,1) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1), (2,2) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1), (2,2), (3,6) \} \sqsubseteq \{ (0,1), (1,1), (2,2), (3,6), (4,24) \} \sqsubseteq \dots$$

quale funzione stiamo approssimando?

# Proprietà funzionale

$\mathbf{Pf}(A, B) = \{f : A \rightarrow B\}$  funzioni parziali

$\mathbf{Pf}(A, B) = \{f \subseteq A \times B \mid \forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2\}$

proprietà funzionale

$f(a) \downarrow \triangleq \exists b \in B. (a, b) \in f$  la funzione  $f$  è definita su  $a$

$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow (\forall a \in A. f(a) \downarrow \Rightarrow g(a) \downarrow \wedge f(a) = g(a))$   
 $\Leftrightarrow f \subseteq g$

$(\mathbf{Pf}(A, B), \sqsubseteq)$  è un OP con bottom  
quale è il bottom?  
è completo?

la relazione vuota  
(la funzione sempre indefinita)

# E' Pf completo?

$(\mathbf{Pf}(A, B), \sqsubseteq)$

completo?

Data una catena  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  consideriamo  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \subseteq A \times B$

vogliamo provare che  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \in \mathbf{Pf}(A, B)$

cioe' che  $f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i$  soddisfa la proprieta' funzionale

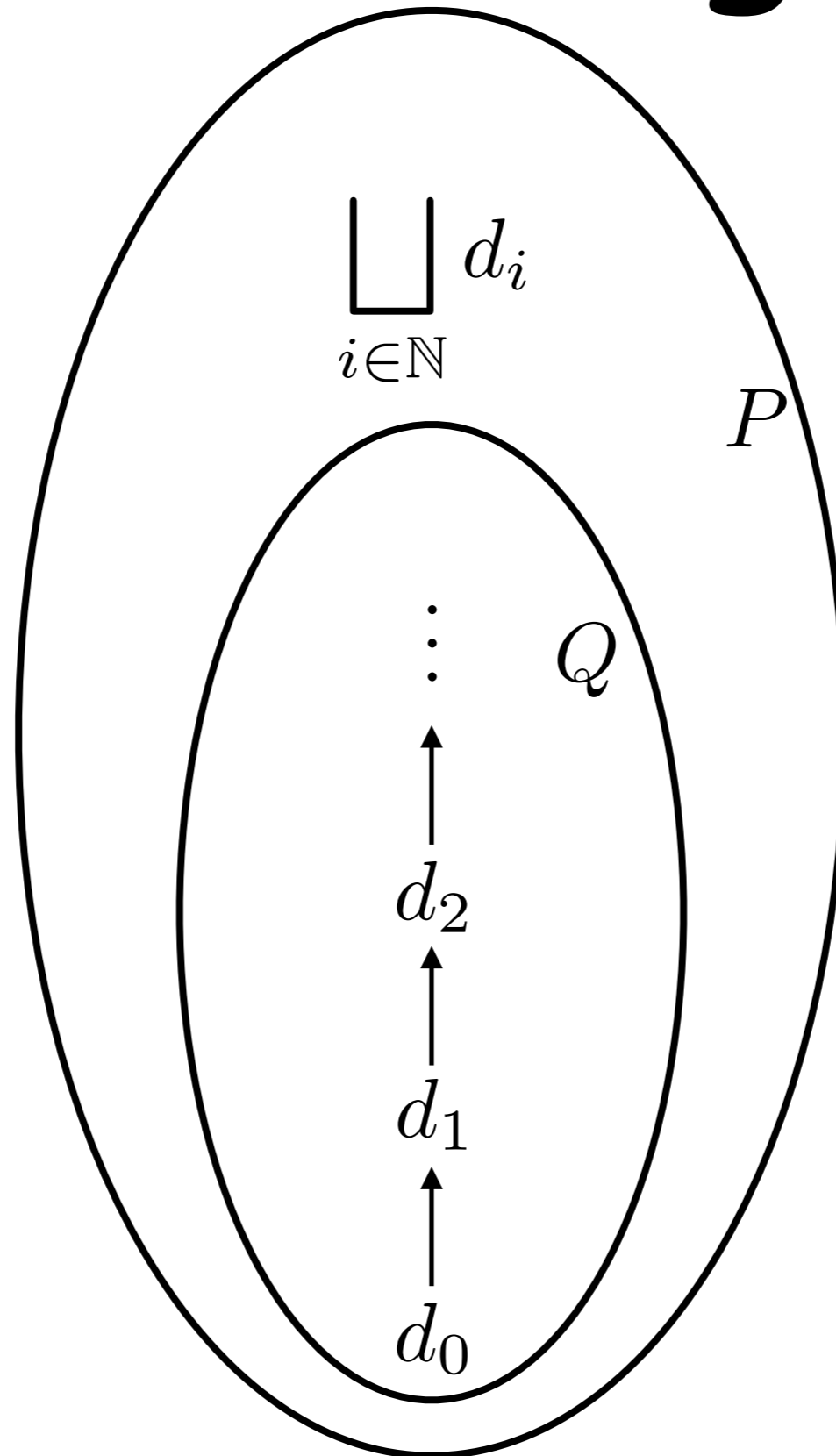
sappiamo che ogni  $f_i$  e' funzionale

$$\forall i \in \mathbb{N}. \forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (a, b_1) \in f_i \wedge (a, b_2) \in f_i \Rightarrow b_1 = b_2$$

dobbiamo provare  $f$  e' funzionale

$$\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2$$

# in un disegno



e' il limite in  $Q$  ?



# Pf e' completo

dobbiamo provare  $f$  e' funzionale

$$\forall a \in A. \forall b_1, b_2 \in B. (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f \Rightarrow b_1 = b_2$$

prendiamo

$$a \in A, b_1, b_2 \in B \text{ tali che } (a, b_1) \in f \wedge (a, b_2) \in f$$

dobbiamo provare  $b_1 = b_2$

$$(a, b_1) \in f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}. (a, b_1) \in f_k$$

$$m \triangleq \max\{k, h\}$$

$$(a, b_2) \in f = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \Leftrightarrow \exists h \in \mathbb{N}. (a, b_2) \in f_h$$

**Chiaramente**

$$f_k \subseteq f_m$$

$$f_h \subseteq f_m$$

$f_m$  e' funzionale

$$(a, b_1) \in f_m \quad (a, b_2) \in f_m \quad \Rightarrow \quad b_1 = b_2$$

# Esempio

$\mathbf{Pf}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$

$$\begin{aligned} f_0 \ \emptyset &\subseteq \{(0, 1)\} \quad f_1 \\ &\subseteq \{(0, 1), (1, 1)\} \quad f_2 \\ &\subseteq \{(0, 1), (1, 1), (2, 2)\} \quad f_3 \\ &\subseteq \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 6)\} \quad f_4 \\ &\subseteq \{(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 6), (4, 24)\} \quad f_5 \\ &\subseteq \dots \end{aligned}$$

$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} f_i$  e' (forse) la funzione fattoriale

nota: il limite di funzioni parziali puo' essere una funzione totale

# Funzioni

$\mathbf{Tf}(A, B) = (A \rightarrow B)$       funzioni totali

$\mathbf{Pf}(A, B) \equiv \mathbf{Tf}(A, B_{\perp})$        $B_{\perp} \triangleq B \uplus \{\perp\}$

$\sqsubseteq_{B_{\perp}} \triangleq$  ordine piatto

$$f \sqsubseteq g \Leftrightarrow \forall a \in A. f(a) \sqsubseteq_{B_{\perp}} g(a)$$

OP? immediato da controllare

bottom?  $f_{\perp}(a) = \perp$  per ogni  $a \in A$

completo? lo proveremo piu' tardi

(come istanza di un risultato piu' generale)

$$\left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i \right)(a) \triangleq \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f_i(a)$$

(ordering piatto, esiste il limite)

# Funzioni monotone

# Funzioni monotone

$(D, \sqsubseteq_D)$  OP     $(E, \sqsubseteq_E)$  OP     $f : D \rightarrow E$

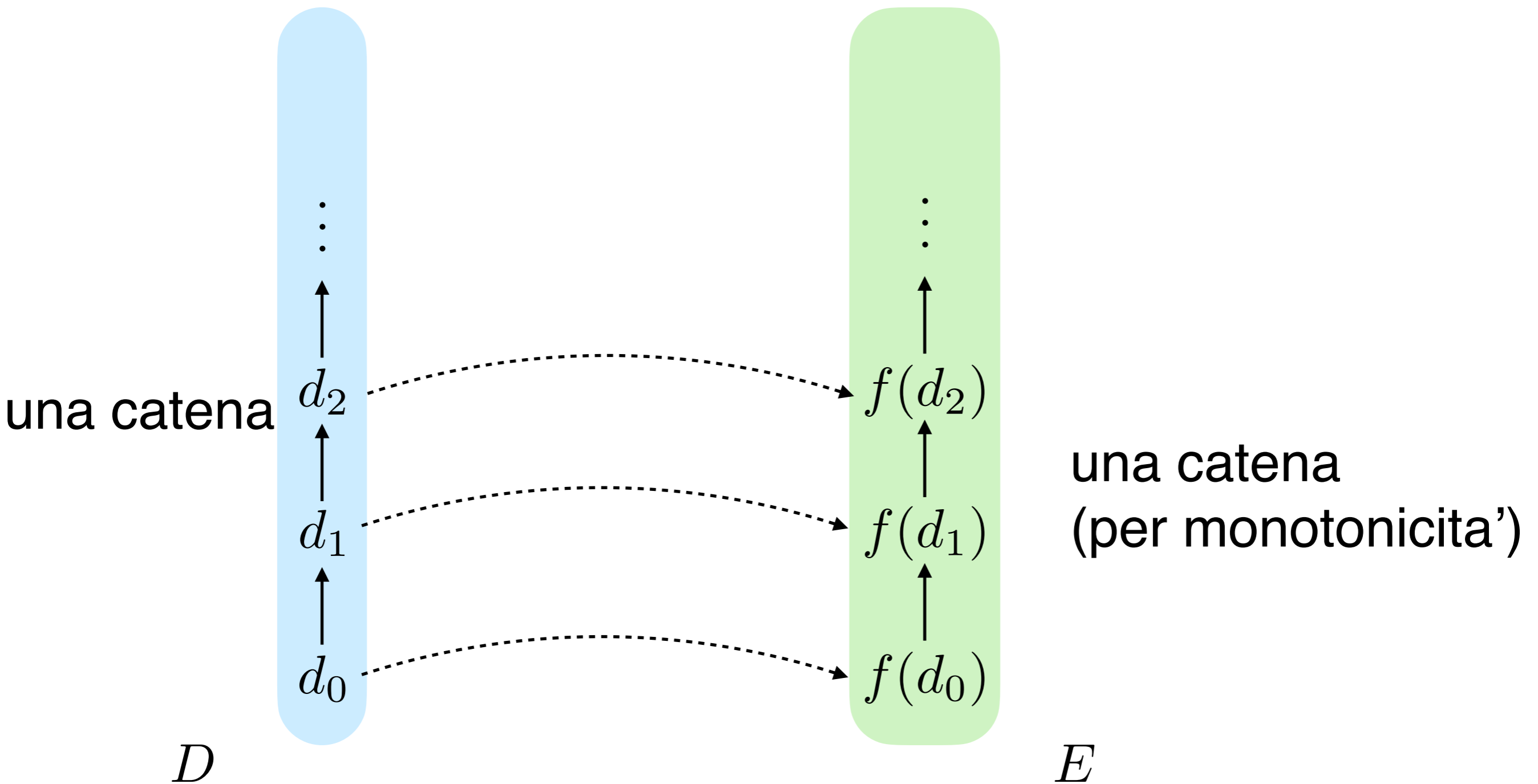
$f$  e' **monotona** se  $\forall d_1, d_2 \in D. d_1 \sqsubseteq_D d_2 \Rightarrow f(d_1) \sqsubseteq_E f(d_2)$

Monotona = preserva l'ordine

$\left. \begin{array}{l} \{d_i\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ una catena } D \\ f \text{ monotona} \end{array} \right\} \Rightarrow \{f(d_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \text{ una catena in } E$

Quando  $D = E$  diciamo  $f : D \rightarrow D$  e' una funzione su  $D$

# Monotonicita'

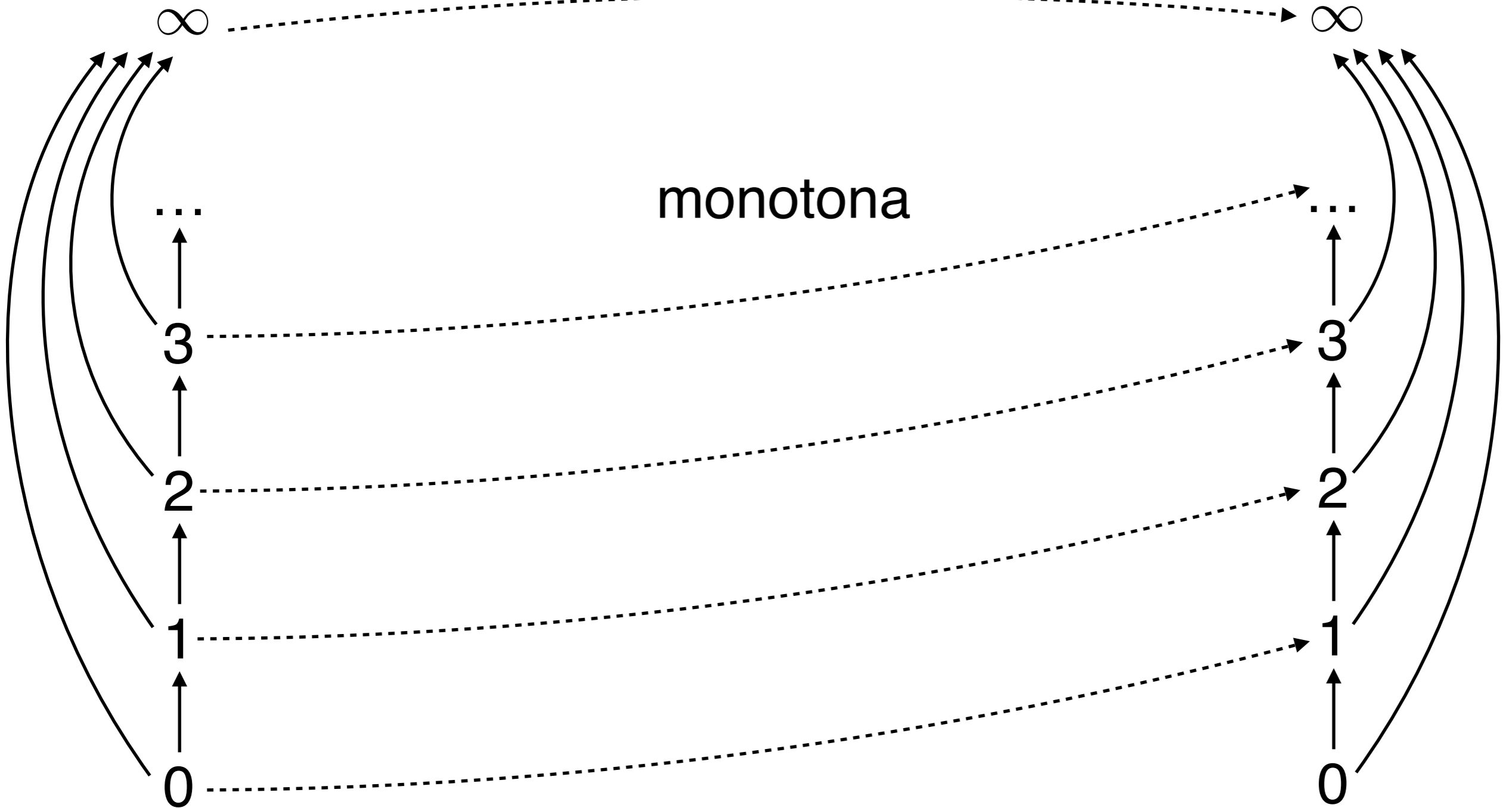


# Esempio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

$$f(n) = n + 1$$
$$f(\infty) = \infty$$

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

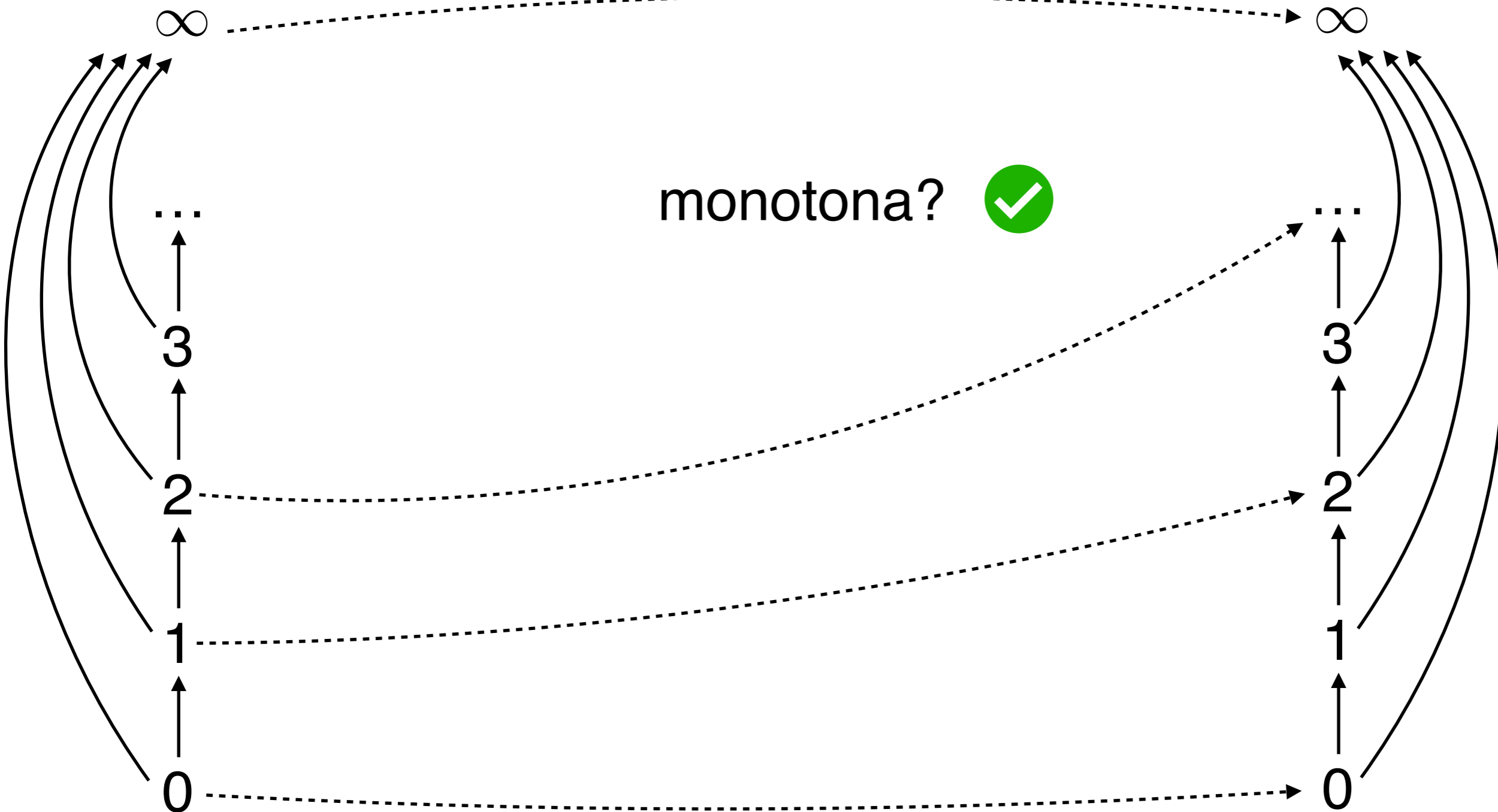


# Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

$$f(n) = 2 \cdot n$$
$$f(\infty) = \infty$$

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$



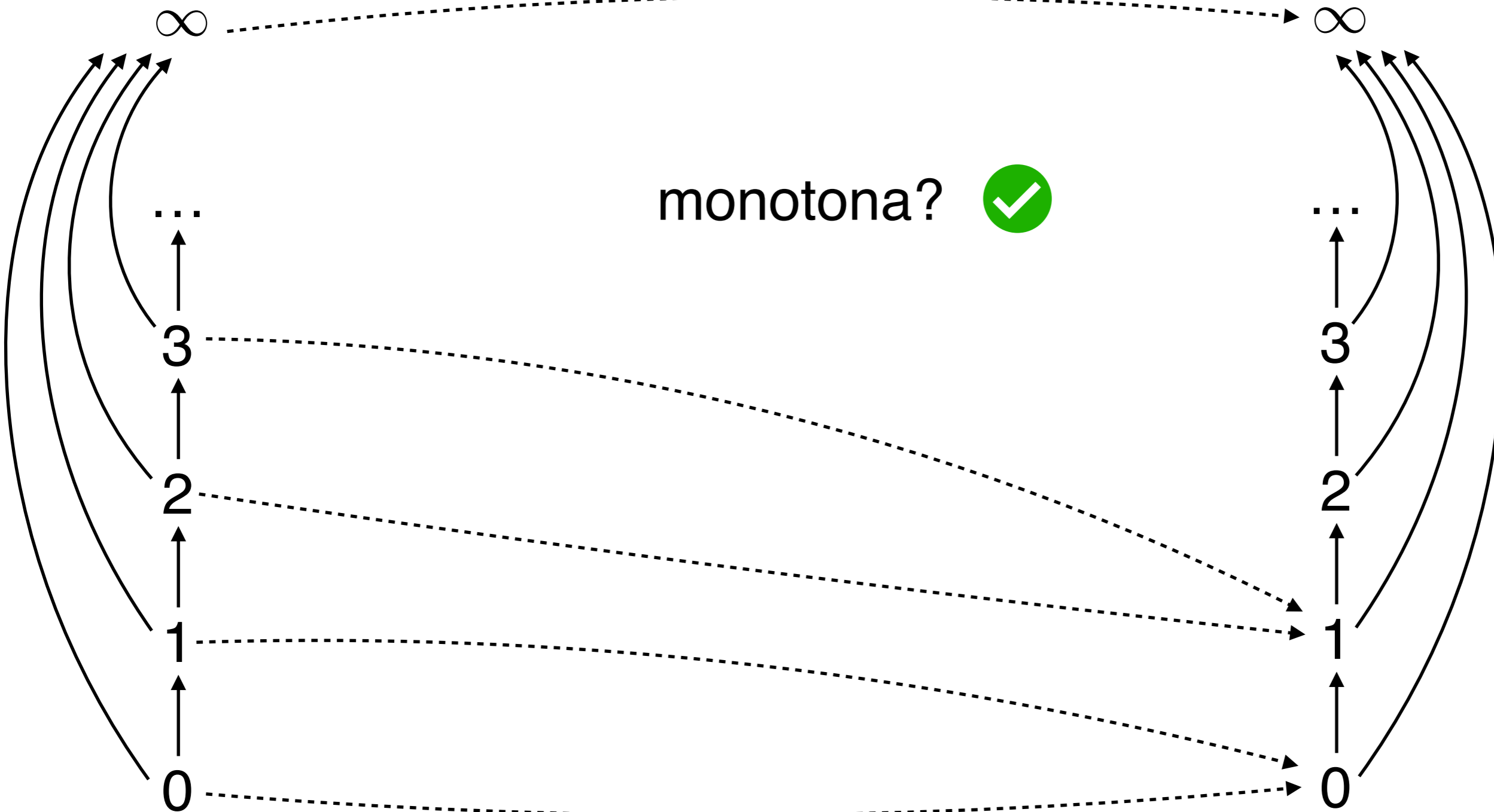


# Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

$$f(n) = n/2$$
$$f(\infty) = \infty$$

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

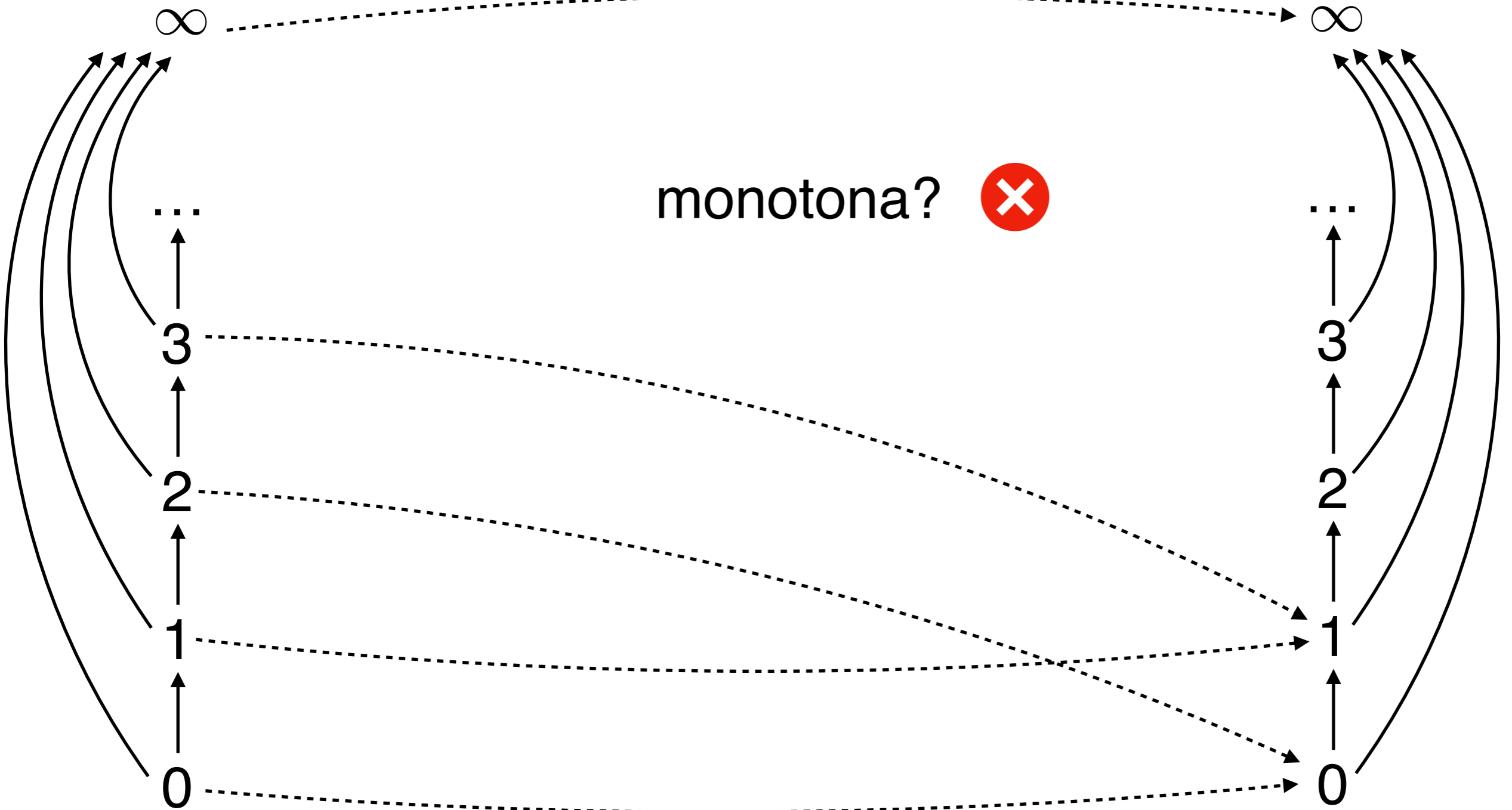


# Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

$$f(n) = n \% 2$$
$$f(\infty) = \infty$$

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

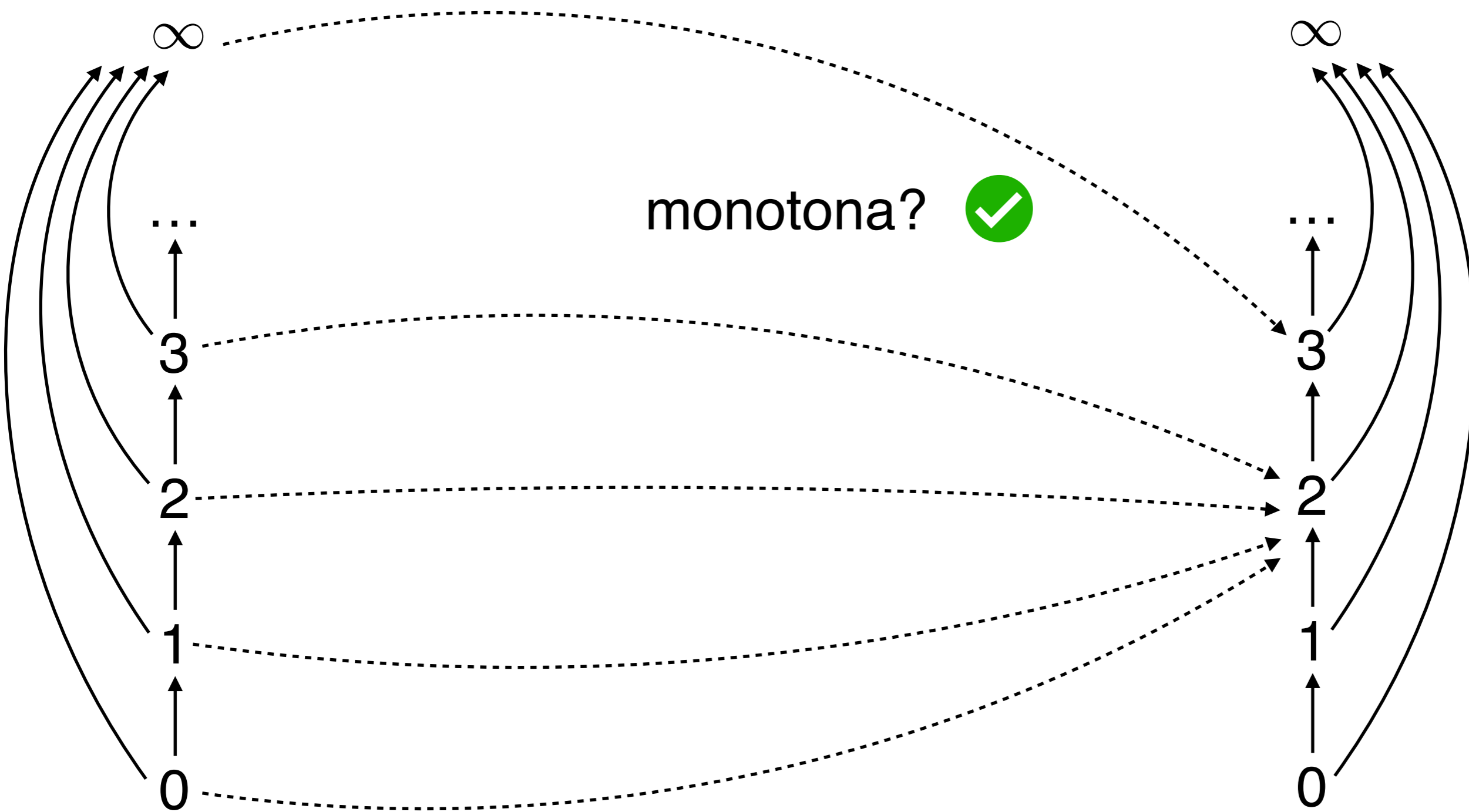


# Esercizio

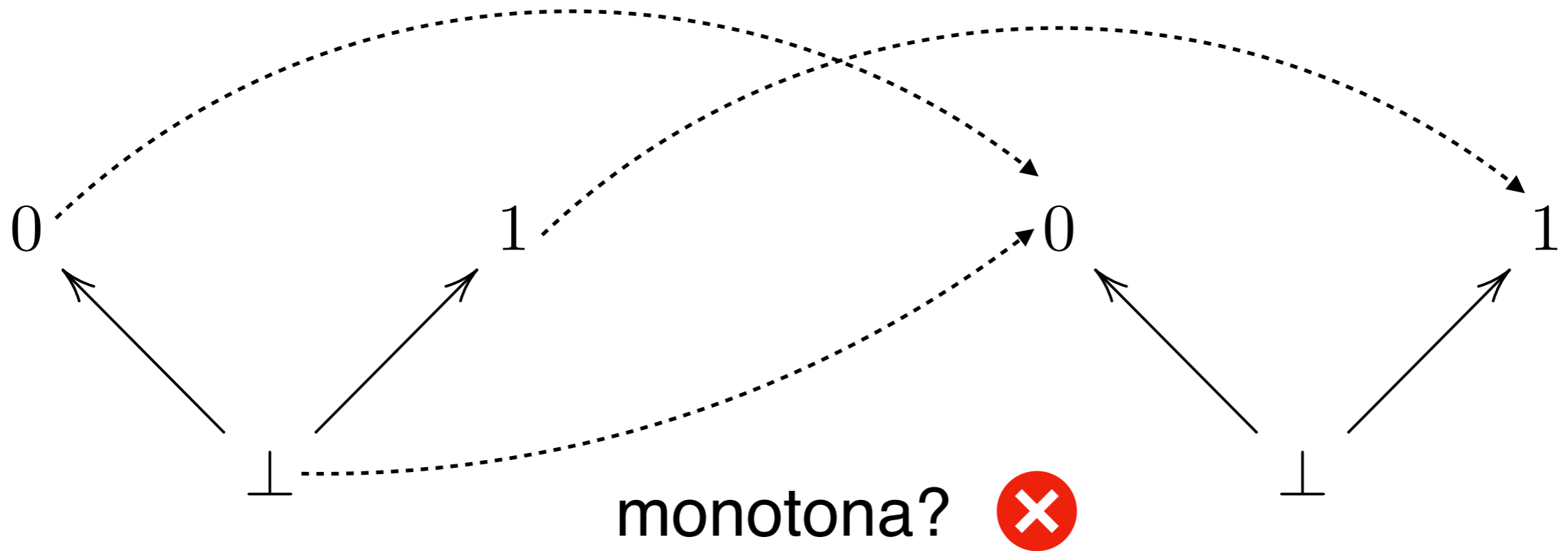
$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

$$f(n) = 2$$
$$f(\infty) = 3$$

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$



# Esercizio



$D$

$f : D \rightarrow D$

$D$

$$f(\perp) = f(0) = 0$$

$$f(1) = 1$$

$$\perp \sqsubseteq 1$$

$$f(\perp) = 0 \not\sqsubseteq 1 = f(1)$$

# Composizione

**TH.** Ogni composizione di funzioni monotone e' monotona

$$\begin{array}{llll} (D, \sqsubseteq_D) & \text{OP} & f : D \rightarrow E & \text{monotona} \\ (E, \sqsubseteq_E) & \text{OP} & g : E \rightarrow F & \text{monotona} \\ (F, \sqsubseteq_F) & \text{OP} & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} h = g \circ f : D \rightarrow F \\ \text{monotona} \end{array}$$

proof. vogliamo provare  $\forall x, y \in D. x \sqsubseteq_D y \Rightarrow h(x) \sqsubseteq_F h(y)$

prendiamo  $x \sqsubseteq_D y$

vogliamo provare  $h(x) \sqsubseteq_F h(y)$

allora  $f(x) \sqsubseteq_E f(y)$  perche'  $f$  e' monotona

allora  $g(f(x)) \sqsubseteq_F g(f(y))$  perche'  $g$  e' monotona

$$\begin{array}{ccc} = & & = \\ h(x) & & h(y) \end{array}$$

# Funzioni continue

# Funzioni continue

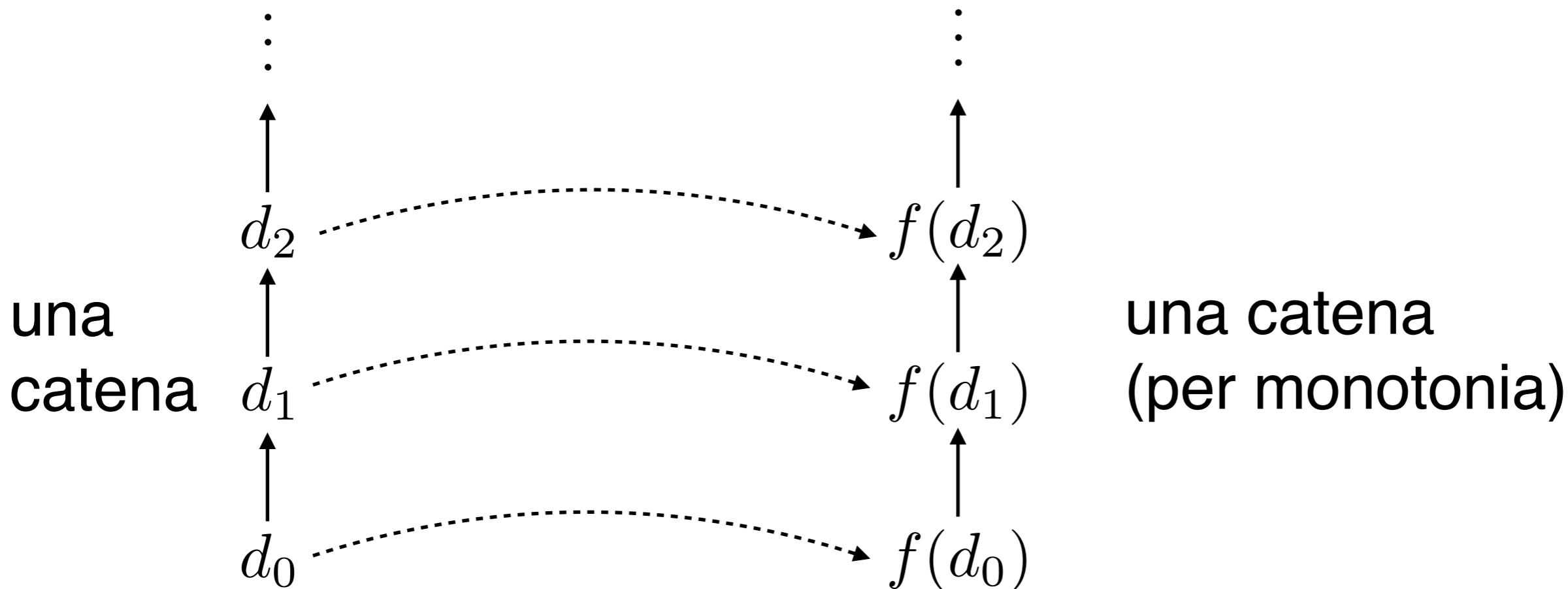
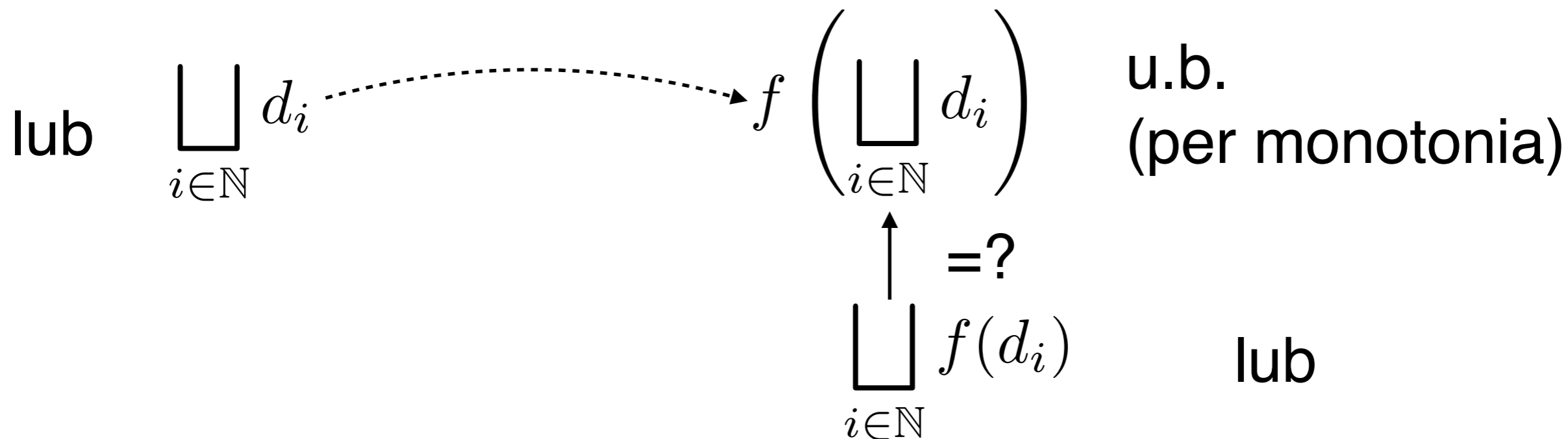
$(D, \sqsubseteq_D)$  OPC  $(E, \sqsubseteq_E)$  OPC  $f : D \rightarrow E$  monotona

$f$  e' continua se  $\forall \{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  catena  $f \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i)$

limite in  $D$       limite in  $E$

Continua = preserva il limite

# Continuita'





# Continuita'

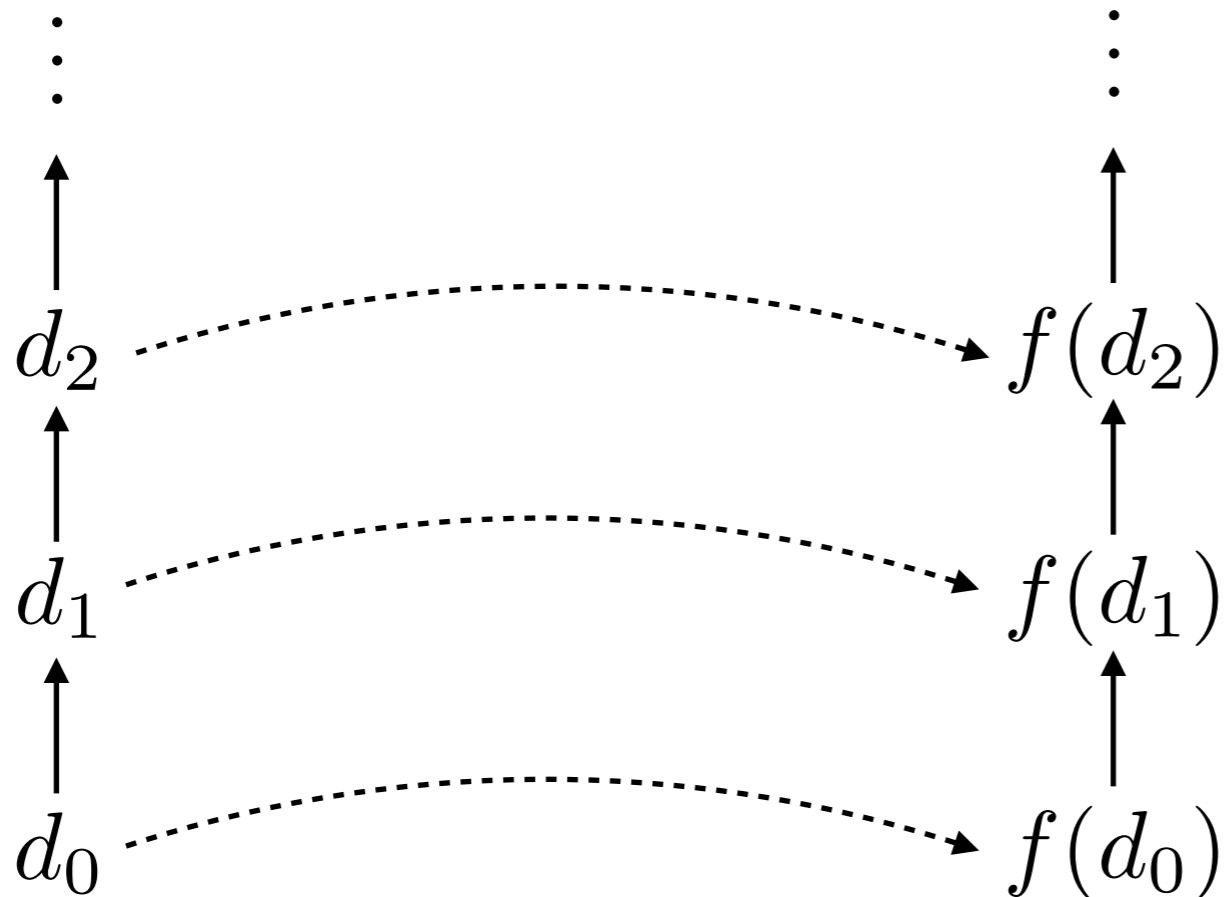
lub  $\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \xrightarrow{\text{dotted arrow}} f \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right)$

$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i) \sqsubseteq_E f \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right)$

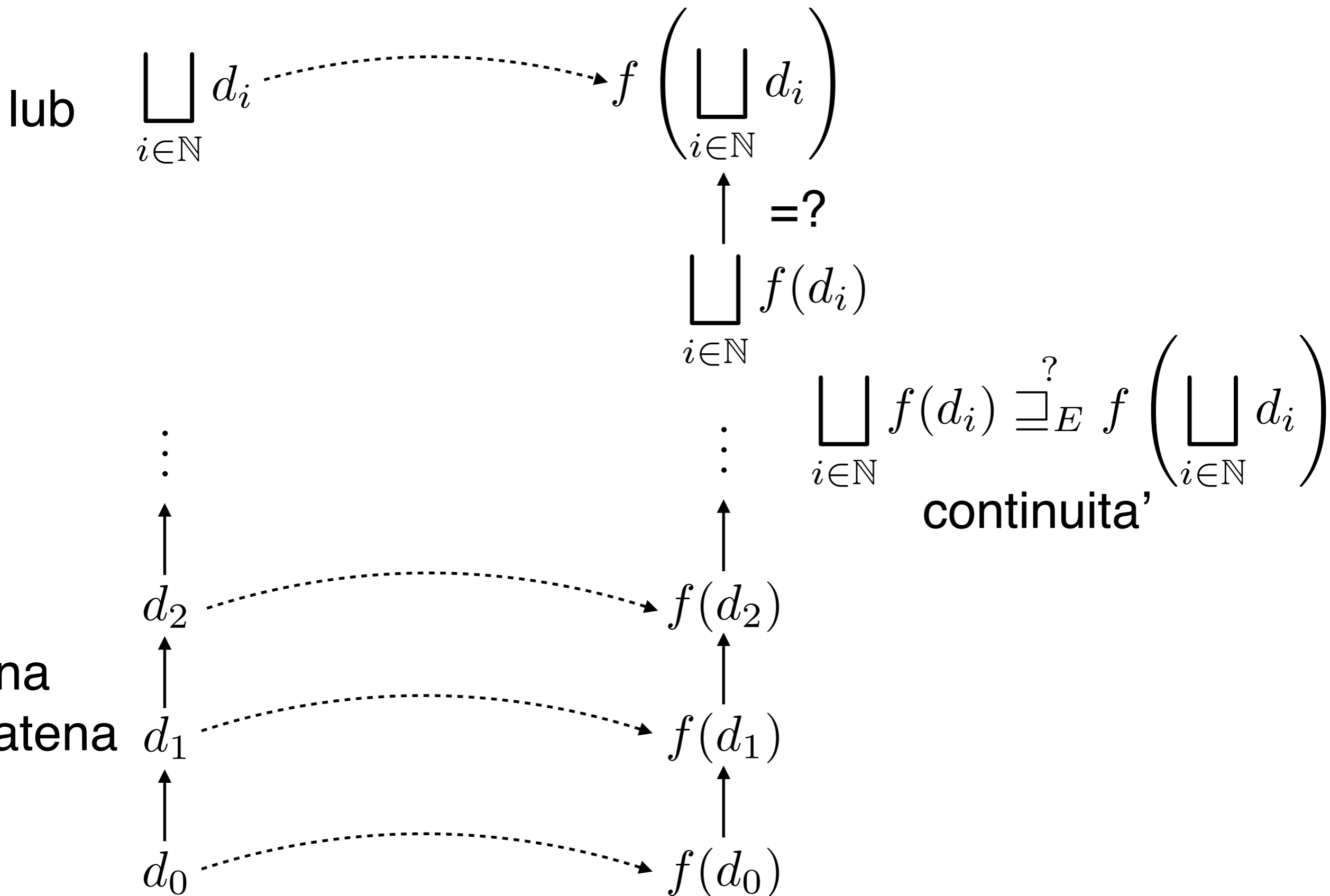
$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i) \xrightarrow{=?} f \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right)$

segue per monotonia (e OPC)

una catena



# Continuita'



# Lemma

$(D, \sqsubseteq_D)$  OPC no catene infinite  $f : D \rightarrow E$   $\Rightarrow$   $f$  continua  
 $(E, \sqsubseteq_E)$  OPC monotona

prendiamo  
prova. una catena  $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

$\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  e' finita  $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}. \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i = d_k$

$\Downarrow$

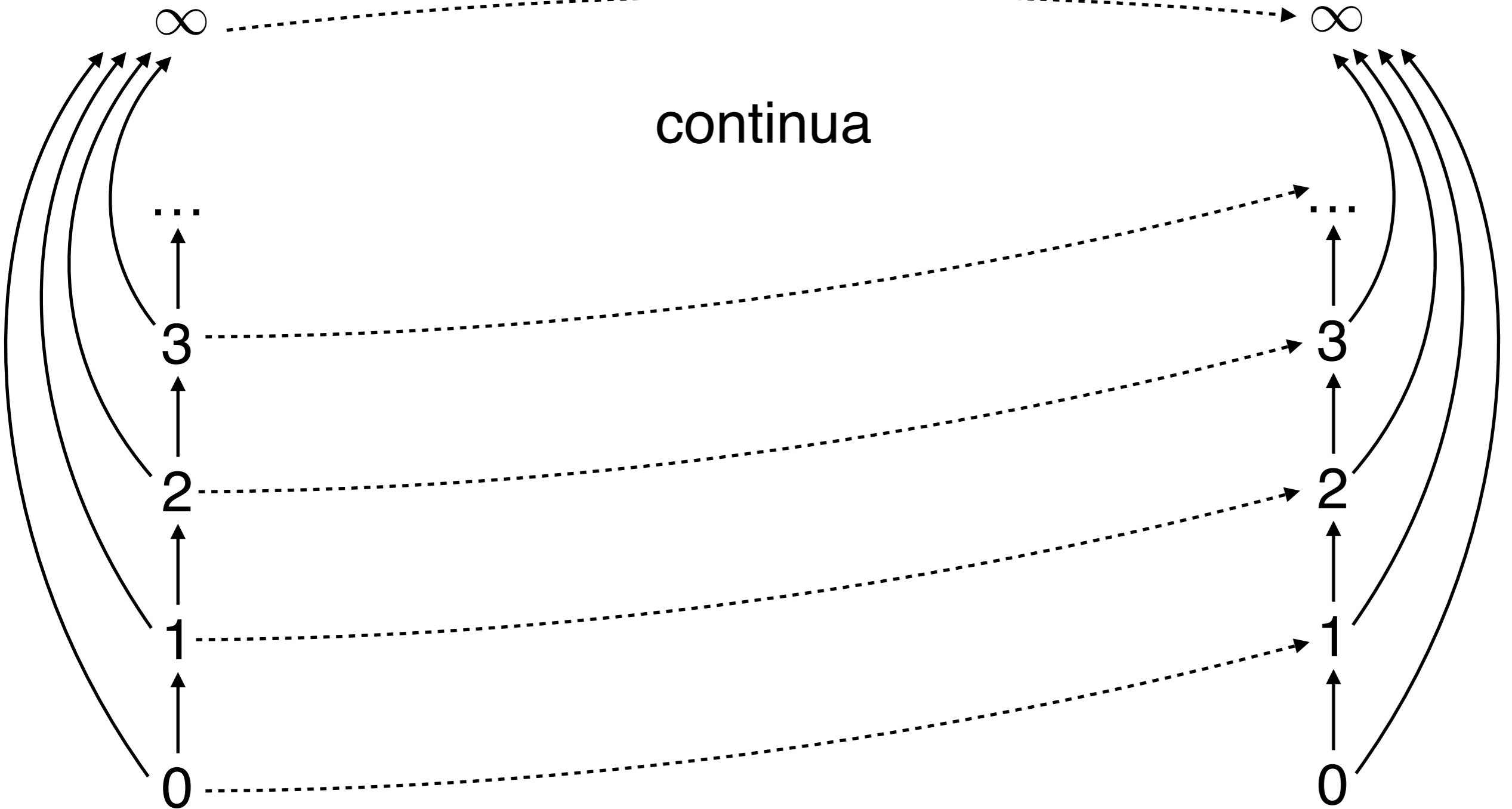
$\{f(d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  e' finita  $\Rightarrow \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i) = f(d_k) = f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i\right)$

# Esempio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

$$f(n) = n + 1$$
$$f(\infty) = \infty$$

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

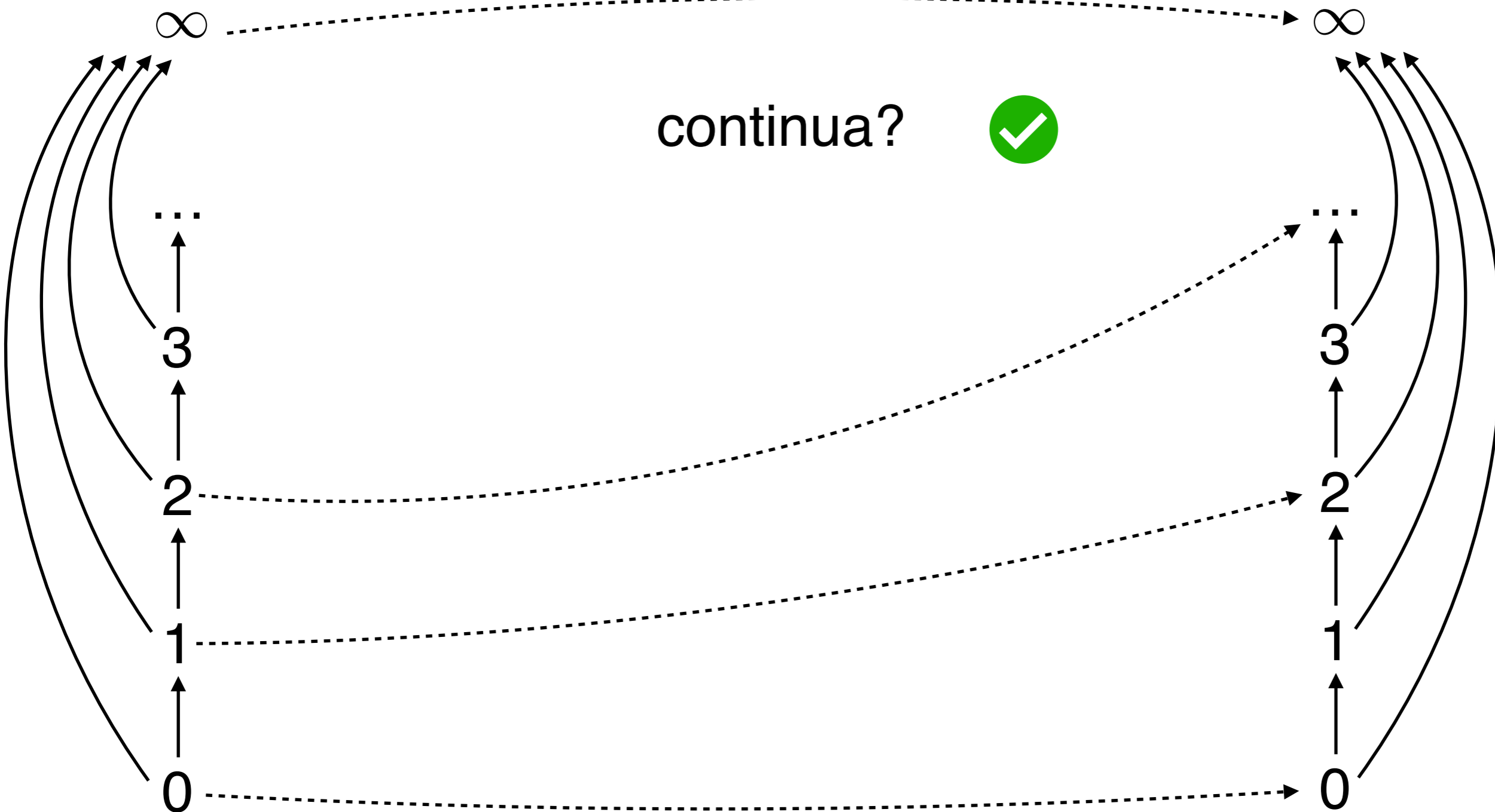


# Esercizio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

$$f(n) = 2 \cdot n$$
$$f(\infty) = \infty$$

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

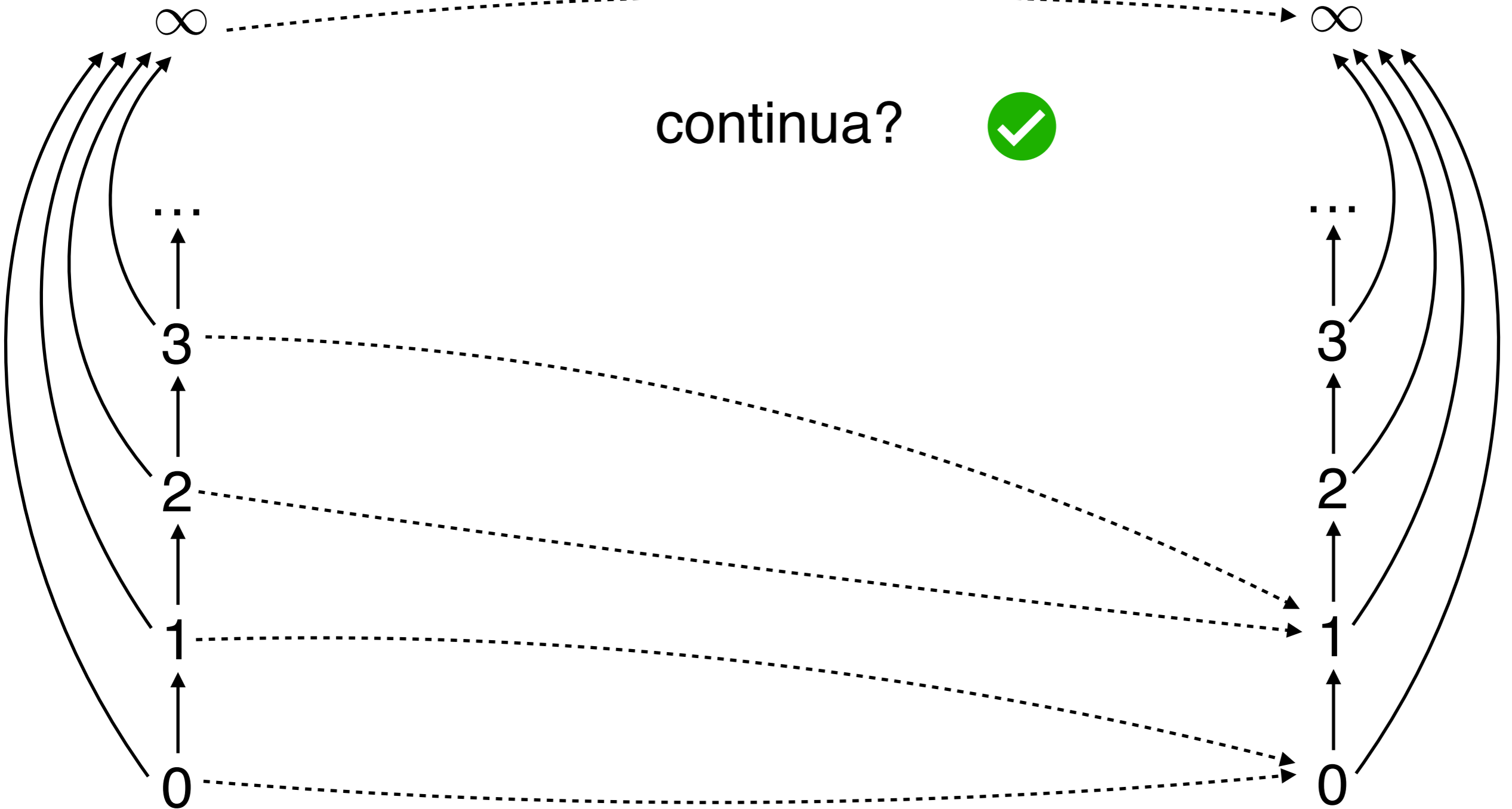


# Esempio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

$$f(n) = n/2$$
$$f(\infty) = \infty$$

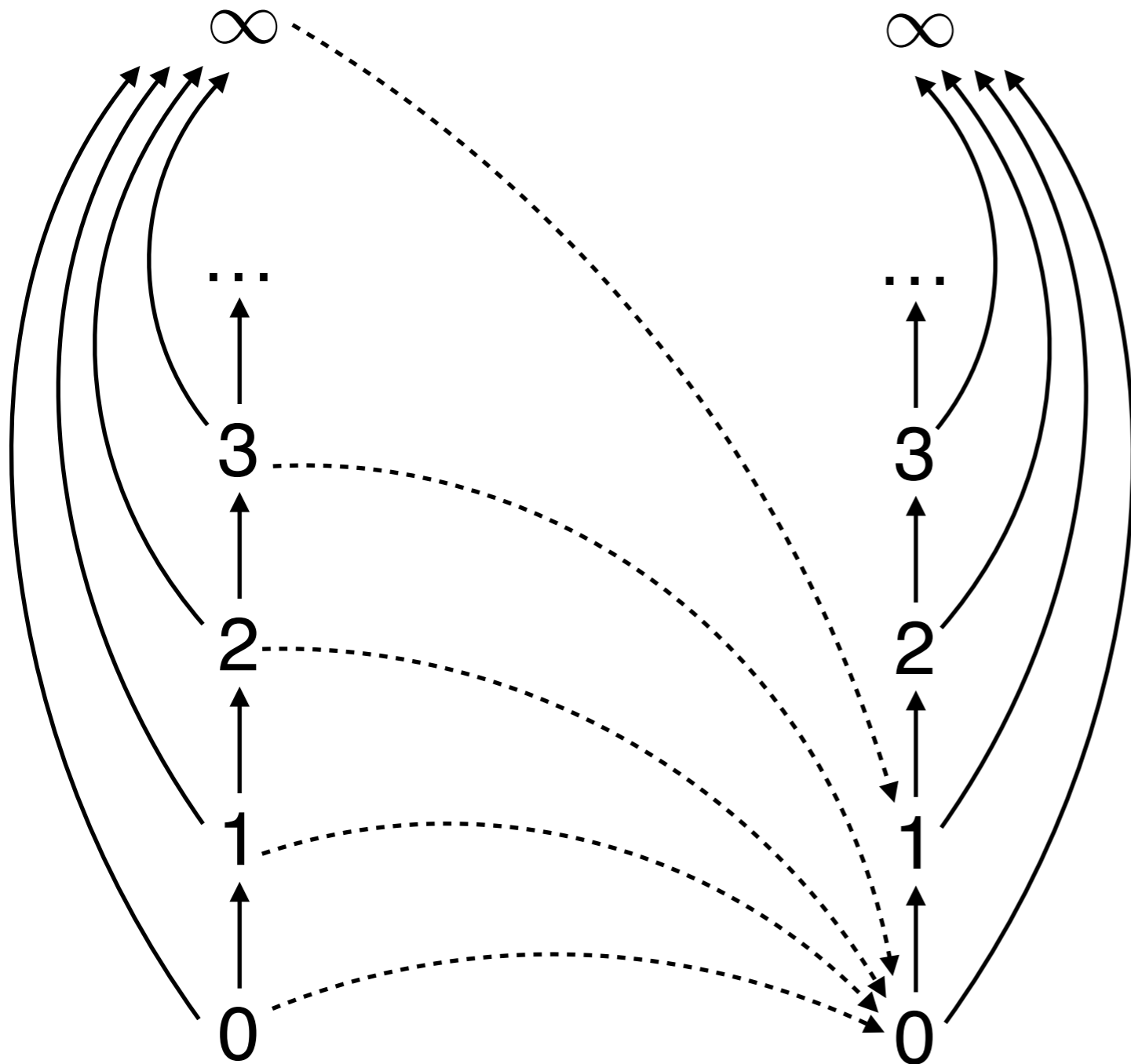
$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$



# Esempio

$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$

funzione monotona ma non continua



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{if } x = \infty \end{cases}$$

$$d_i = 2 \cdot i \quad \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i = \infty$$

$$f\left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i\right) = f(\infty) = 1$$

$$f(d_i) = 0$$

$$\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} 0 = 0$$

# Composizione

**TH.** ogni composizione di funzioni continue e' continua  
( $D, \sqsubseteq_D$ ) OPC  
( $E, \sqsubseteq_E$ ) OPC  
( $F, \sqsubseteq_F$ ) OPC

$$\begin{array}{l} f : D \rightarrow E \text{ continua} \\ g : E \rightarrow F \text{ continua} \end{array} \Rightarrow h = g \circ f : D \rightarrow F \text{ continua}$$

prova. prendiamo una catena  $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

vogliamo provare  $h \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} h(d_i)$

$$\begin{aligned} h \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) &= g \left( f \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i \right) \right) = g \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} f(d_i) \right) = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} g(f(d_i)) \\ &= \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} h(d_i) \end{aligned}$$



# Teorema di punto fisso di Kleene

# Applicazioni ripetute

$$f : D \rightarrow D$$

$$f^0(d) \triangleq d$$

$$f^{n+1}(d) \triangleq f(f^n(d))$$

$$f^n(d) = \overbrace{f(\cdots (f(d)) \cdots)}^{n \text{ volte}}$$

$$f^n : D \rightarrow D$$

# Lemma

$(D, \sqsubseteq)$  PO $_{\perp}$   $f : D \rightarrow D$  monotona  $\Rightarrow \{f^n(\perp)\}_{n \in \mathbb{N}}$   
e' una catena

**prova.** abbiamo bisogno di provare  $\forall n \in \mathbb{N}. f^n(\perp) \sqsubseteq f^{n+1}(\perp)$   
per induzione matematica  $P(n) \triangleq f^n(\perp) \sqsubseteq f^{n+1}(\perp)$

$$P(0) \triangleq f^0(\perp) \sqsubseteq f^1(\perp) \qquad f^0(\perp) = \perp \sqsubseteq f^1(\perp)$$

$\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \Rightarrow P(n+1)$  prendiamo un generico  $n$

assumiamo  $P(n) \triangleq f^n(\perp) \sqsubseteq f^{n+1}(\perp)$

vogliamo provare  $P(n+1) \triangleq f^{n+1}(\perp) \sqsubseteq f^{n+2}(\perp)$

$$f^n(\perp) \sqsubseteq f^{n+1}(\perp)$$

$\Downarrow$

$$f^{n+1}(\perp) = f(f^n(\perp)) \sqsubseteq f(f^{n+1}(\perp)) = f^{n+2}(\perp)$$

# Verso il teo. di Kleene

quando  $(D, \sqsubseteq)$  e' un  $\text{OPC}_\perp$

$\{f^n(\perp)\}_{n \in \mathbb{N}}$  che sappiamo essere una catena deve  
**avere un limite**

**Attenzione :**

$$\{f^n(d)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Non e' necessariamente una catena! Es.  $\forall n, f(n) = 5$  e  $d=7$   
 $f^0(7) = 7, f^1(7) = 5, f^2(7) = 5, \dots$

Il teorema del punto fisso di Kleene afferma che se  $f$  è continua, allora il limite della catena che parte con  $\perp$  è il minimo punto fisso di  $f$

# Pre-punti fissi

$(D, \sqsubseteq)$  OP       $f : D \rightarrow D$  monotona

punto fisso     $p \in D$        $f(p) = p$

pre-punto fisso     $p \in D$        $f(p) \sqsubseteq p$

ogni punto fisso e' anche un pre-punto fisso

# Teorema di Kleene

$(D, \sqsubseteq)$   $\text{OPC}_{\perp}$   $f : D \rightarrow D$  continua

consideriamo  $\text{fix}(f) \triangleq \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$

1.  $\text{fix}(f)$  e' un punto fisso di  $f$

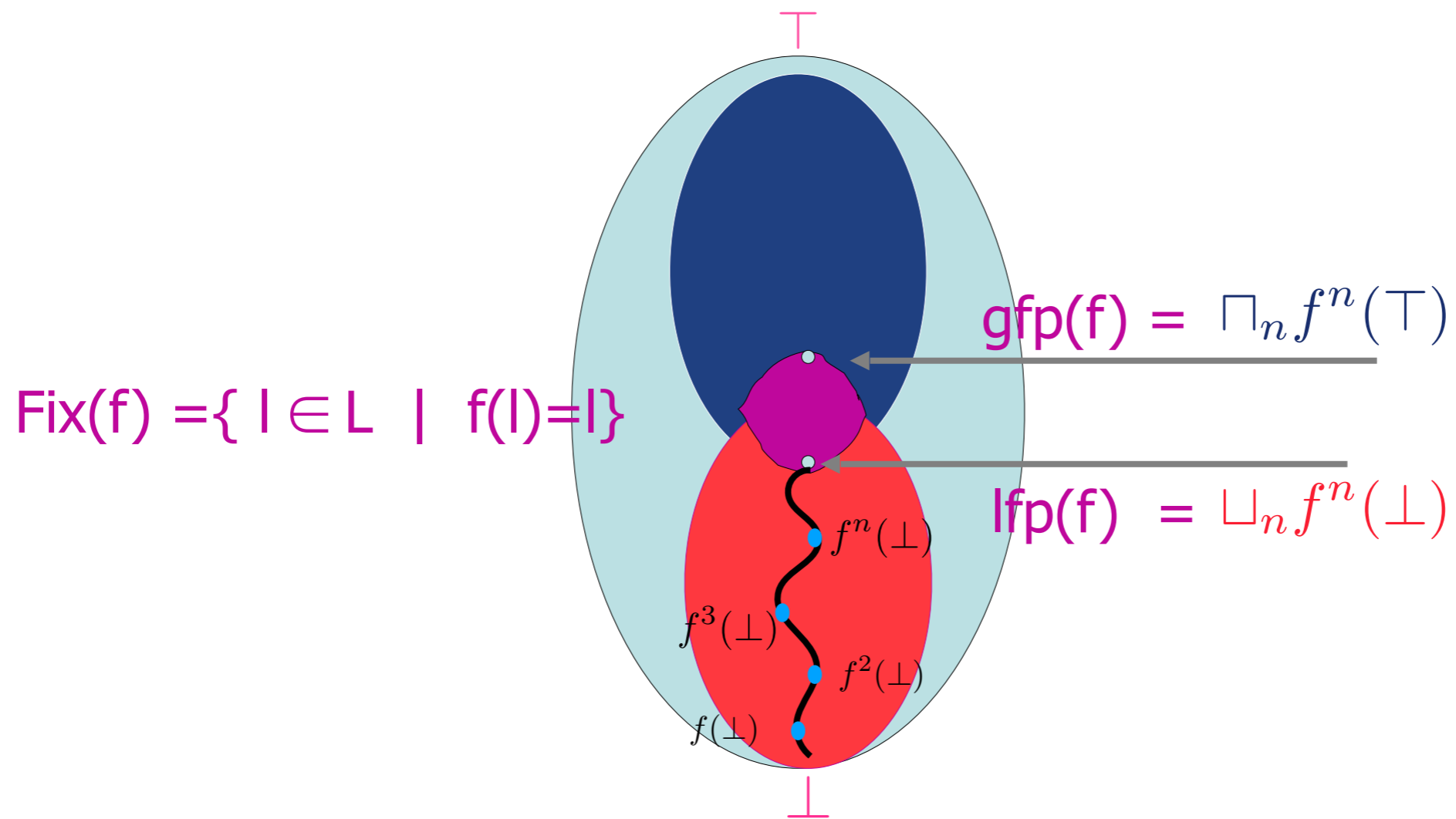
$$f(\text{fix}(f)) = \text{fix}(f)$$

2.  $\text{fix}(f)$  e' il minimo punto fisso di  $f$

$$\forall d \in D. f(d) \sqsubseteq d \Rightarrow \text{fix}(f) \sqsubseteq d$$

se  $d$  e' un pre-punto fisso allora  $\text{fix}(f)$  e' piu' piccolo di  $d$

# Kleene's Theorem



# Teorema di Kleene: 1

prova.

$$1. \quad f(\text{fix}(f)) = \text{fix}(f)$$

$$\begin{aligned} f(\text{fix}(f)) &= f\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)\right) \quad \text{per def di } \text{fix} \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f(f^n(\perp)) \quad \text{per continuita'} \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^{n+1}(\perp) \quad \text{per def di } f^n \\ &= \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp) \quad \text{per indipendenza dei prefissi dei limiti} \\ &= \text{fix}(f) \quad \text{per def di } \text{fix} \end{aligned}$$



# Teorema di Kleene: 2

prova.      2.  $\forall d \in D. f(d) \sqsubseteq d \Rightarrow \text{fix}(f) \sqsubseteq d$

dimostriamo che ogni pre-punto fisso è un limite superiore della catena

$$\{f^n(\perp)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

per definizione  $\text{fix}(f)$  è il lub della stessa catena e perciò più piccolo di ogni altro upper bound

# Teorema di Kleene: 2

$$2. \quad \forall d \in D. f(d) \sqsubseteq d \Rightarrow \text{fix}(f) \sqsubseteq d$$

prendiamo  $d \in D$  tale che  $f(d) \sqsubseteq d$

proviamo  $\forall n \in \mathbb{N}. f^n(\perp) \sqsubseteq d$  ( $d$  e' un upper bound)

$P(n) \triangleq f^n(\perp) \sqsubseteq d$  per induzione matematica

$$P(0) \triangleq f^0(\perp) \sqsubseteq d \quad f^0(\perp) = \perp \sqsubseteq d$$

$\forall n \in \mathbb{N}. P(n) \Rightarrow P(n+1)$  prendiamo un generico  $n$   
assumiamo  $P(n) \triangleq f^n(\perp) \sqsubseteq d$

vogliamo provare  $P(n+1) \triangleq f^{n+1}(\perp) \sqsubseteq d$

$$f^{n+1}(\perp) \stackrel{\text{(per def)}}{=} f(f^n(\perp)) \stackrel{\text{(monot.)} \downarrow}{\sqsubseteq} f(d) \stackrel{\text{(pre-punto fisso)}}{\sqsubseteq} d$$

# Esempio

$$n = 2 \cdot n$$

$$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$$

$$\perp = 0$$

$\text{OPC}_\perp$

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 \cdot n \\ f(\infty) &= \infty \end{aligned}$$

monotona? ok  
continua? ok

$$f^0(0) = 0$$

$$f^1(0) = f(0) = 2 \cdot 0 = 0$$

punto fisso raggiunto !

# Esempio

$$n = n + 1$$

$$(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \leq)$$

$$\perp = 0$$

$\text{OPC}_\perp$

$$\begin{aligned} f(n) &= n + 1 \\ f(\infty) &= \infty \end{aligned}$$

monotona? ok  
continua? ok

$$f^0(0) = 0$$

$$f^1(0) = f(0) = 0 + 1 = 1$$

$$f^2(0) = f(f^1(0)) = f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f^3(0) = f(f^2(0)) = f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(0) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} n = \infty \quad \text{punto fisso}$$

# Esempio

$$X = X \cap \{1\}$$

$$(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$$

$$\perp = \emptyset$$

$\text{OPC}_\perp$

$$f(X) = X \cap \{1\}$$

monotona? ok  
continua? ok

$$f^0(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^1(\emptyset) = f(\emptyset) = \emptyset \cap \{1\} = \emptyset$$

punto fisso raggiunto!

# Esempio

$$X = \mathbb{N} \setminus X$$

$$(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$$

$$\perp = \emptyset$$

$\text{OPC}_\perp$

$$f(X) = \mathbb{N} \setminus X$$

monotona? NO

piu' grande  $X$  piu' piccolo  $f(X)$

$$f^0(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^1(\emptyset) = f(\emptyset) = \mathbb{N} \setminus \emptyset = \mathbb{N}$$

$$f^2(\emptyset) = f(f^1(\emptyset)) = f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \emptyset$$

non una catena!

# Esempio

$$X = X \cup \{1\}$$

$$(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$$

$$\perp = \emptyset$$

$\text{OPC}_\perp$

$$f(X) = X \cup \{1\}$$

monotona? ok  
continua? ok

$$f^0(\emptyset) = \emptyset$$

$$f^1(\emptyset) = f(\emptyset) = \emptyset \cup \{1\} = \{1\}$$

$$f^2(\emptyset) = f(f^1(\emptyset)) = f(\{1\}) = \{1\} \cup \{1\} = \{1\}$$

punto fisso raggiunto!

# Esercizio (da consegnare)

Sia  $D$  un OPC

sia  $\{d_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  una catena in  $D$

sia  $\{k_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  una catena infinita in  $(\mathbb{N}, \leq)$

1. Proviamo che  $\{d_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$  e' una catena in  $D$

2. Provare o confutare  $\bigsqcup_{j \in \mathbb{N}} d_{k_j} = \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} d_i$