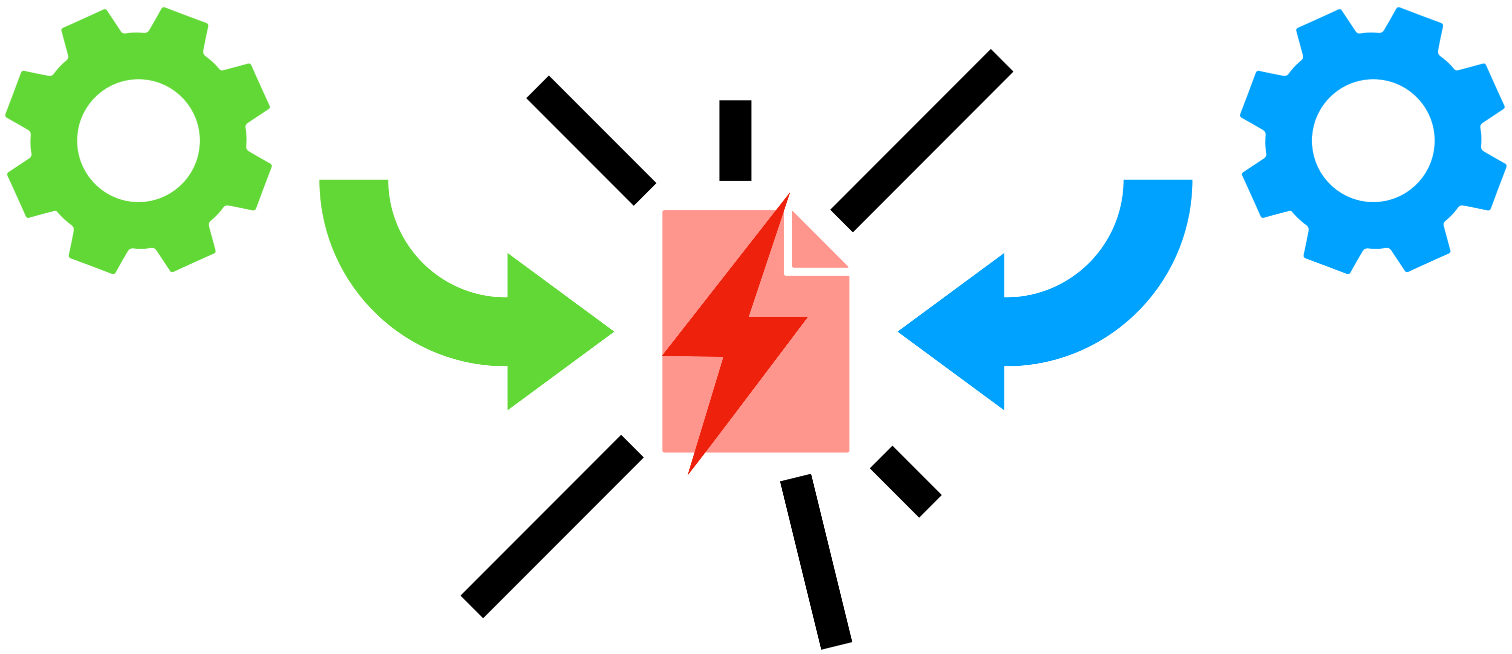
Linguaggi di Programmazione



Roberta Gori

Esercitazione #3

Ricorsione ben fondata

[Ex. 1] Definire usando la ricorsione ben fondata una funzione vars tale che data un' espressione aritmetica a ritorna l'insieme degli identificatori che appaiono nell'espressione aritmetica a. Poi provare per induzione sulle regole che

$$\forall a \in Aexp, \forall \sigma \in \Sigma, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$\langle a, \sigma \rangle \to n$ implica $(\forall y \in vars(a).\, \sigma(y) = \sigma'(y)) \Rightarrow \langle a, \sigma' \rangle \to n\,).$

se due memorie coincidono su tutte le variabili
che appaiono in un'espressione, allora
valutando l'espressione nelle due memorie
dà lo stesso risultato

[Ex. 2] Definire usando la ricorsione ben fondata una funzione vars tale che data una comando a ritorna l'insieme degli identificatori che appaiono a sinistra degli assegnamenti.
Poi provare per induzione sulle regole che

$$\langle c, \sigma \rangle \rightarrow \sigma' \qquad \text{implica} \qquad \forall x \notin vars(c).\ \sigma(x) = \sigma'(x).$$

se una variabile non appare in un'assegnamento allora il suo valore iniziale viene conservato nello store finale

Funzioni monotone e continue

$[\mathbf{Ex.\ 3}]$ Consideriamo l' $\mathrm{OPC}_\perp\,(\wp(\mathbb{N}), \subseteq)$. Proviamo che per ogni set $S \subseteq \mathbb{N}$:

1. la funzione $f_S : \wp(\mathbb{N}) \to \wp(\mathbb{N})$ tale che $f_S(X) = X \cap S$ e' continua
2. la funzione $g_S : \wp(\mathbb{N}) \to \wp(\mathbb{N})$ tale che $g_S(X) = X \cup S$ e' continua

[**Ex. 4**] Provare che ogni funzione che preserva il limite e' monotona.

OPC

[Ex. 5] Sia $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\} \cup \{\infty\}$ e $\sqsubseteq \subseteq (D \times D)$ tale che

- per ogni $n, m \in D \cap \mathbb{N}$, definiamo $n \sqsubseteq m$ se n divide m;
- per ogni $x \in D$, definiamo $x \sqsubseteq \infty$.

E' $(D, \sqsubseteq)$ un OPC $_\perp$?

Punti fissi

[**Ex. 6**] Definiamo due funzioni $f_i : D_i \to D_i$ su due OPC D_i per $i \in \{1, 2\}$ (non necessariamente con bottom) tali che:

1. f_1 è continua, ha punti fissi ma non minimo punto fisso;

2. f_2 è continua e non ha punti fissi.