Linguaggi di Programmazione

Roberta Gori

CCS: processi guardati

CCS
processi guardati

CCS semantica operazionale

Act) $$\frac{}{\mu.p \xrightarrow{\mu} p}$$

Res) $$\frac{p \xrightarrow{\mu} q \quad \mu \notin \{\alpha, \overline{\alpha}\}}{p\backslash\alpha \xrightarrow{\mu} q\backslash\alpha}$$

Rel) $$\frac{p \xrightarrow{\mu} q}{p[\phi] \xrightarrow{\phi(\mu)} q[\phi]}$$

SumL) $$\frac{p_1 \xrightarrow{\mu} q}{p_1 + p_2 \xrightarrow{\mu} q}$$

SumR) $$\frac{p_2 \xrightarrow{\mu} q}{p_1 + p_2 \xrightarrow{\mu} q}$$

ParL) $$\frac{p_1 \xrightarrow{\mu} q_1}{p_1|p_2 \xrightarrow{\mu} q_1|p_2}$$

Com) $$\frac{p_1 \xrightarrow{\lambda} q_1 \quad p_2 \xrightarrow{\overline{\lambda}} q_2}{p_1|p_2 \xrightarrow{\tau} q_1|q_2}$$

ParR) $$\frac{p_2 \xrightarrow{\mu} q_2}{p_1|p_2 \xrightarrow{\mu} p_1|q_2}$$

Rec) $$\frac{p[^{\mathbf{rec}\ x.\ p}/_{x}] \xrightarrow{\mu} q}{\mathbf{rec}\ x.\ p \xrightarrow{\mu} q}$$

CCS: processi guardati

la forma di ricorsione permessa è molto generale

ci sono processi con un numero infinito di transizioni in uscita

assumiamo $p \xrightarrow{\mu} q$ prendiamo $P \triangleq \mathbf{rec}\ x.\ p|x \qquad P \triangleq p|P$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "\mu"'] \arrow[dr, "\mu"] \arrow[drr, "\mu"] & & & \\
q|P & p|q|P & p|p|q|P & \cdots
\end{tikzcd}$$

Tali processi sono chiamati infinitamente ramificati e li vogliamo evitare….

CCS: processi guardati

I processi guardati garantiscono che le variabili di processo siano dopo un prefisso (la ricorsione è guardata da qualche azione)

Sia X un insieme di variabili di processo

$G(p, X)$ sse
un nome in X occorre libero in p allora e' prefisso da un azione

$$G(\mathbf{nil}, X) \triangleq \mathbf{true} \qquad G(p[\phi], X) \triangleq G(p, X)$$

$$G(x, X) \triangleq x \notin X \qquad G(p + q, X) \triangleq G(p, X) \wedge G(q, X)$$

$$G(\mu.p, X) \triangleq G(p, \emptyset) \qquad G(p|q, X) \triangleq G(p, X) \wedge G(q, X)$$

$$G(p \backslash \alpha, X) \triangleq G(p, X) \qquad G(\mathbf{rec}\ x.\ p, X) \triangleq G(p, X \cup \{x\})$$

un processo chiuso p è guardato se è vero $G(p, \emptyset)$

Esercizio: guardato?

$R \triangleq \mathbf{rec}\ x.\ \alpha.x + \beta$ $\qquad$ $G(R, \emptyset)?$

$$\begin{aligned} G(\mathbf{rec}\ x.\ \alpha.x + \beta, \emptyset) &= G(\alpha.x + \beta, \{x\}) \\ &= G(\alpha.x, \{x\}) \wedge G(\beta, \{x\}) \\ &= G(x, \emptyset) \wedge G(\mathbf{nil}, \{x\}) \\ &= x \notin \emptyset \wedge \mathbf{true} \\ &= \mathbf{true} \end{aligned}$$

Esercizio: guardato?

$$T \triangleq \mathbf{rec}\ x.\ (\alpha|x) + \beta \qquad\qquad G(T, \emptyset)?$$

$$G(\mathbf{rec}\ x.\ (\alpha|x) + \beta, \emptyset) = G((\alpha|x) + \beta, \{x\})$$

$$= G(\alpha|x, \{x\}) \wedge G(\beta, \{x\})$$

$$= G(\alpha, \{x\}) \wedge G(x, \{x\}) \wedge G(\mathbf{nil}, \{x\})$$

$$= G(\mathbf{nil}, \emptyset) \wedge x \notin \{x\} \wedge \mathbf{true}$$

$$= \mathbf{true} \wedge \mathbf{false}$$

$$= \mathbf{false}$$

Esercizio: guardato?

$$U \triangleq \mathbf{rec}\ x.\ \alpha|\beta.x \qquad G(U,\emptyset)?$$

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{rec}\ x.\ \alpha|\beta.x,\emptyset) &= G(\alpha|\beta.x,\{x\}) \\
&= G(\alpha,\{x\}) \wedge G(\beta.x,\{x\}) \\
&= G(\mathbf{nil},\emptyset) \wedge G(x,\emptyset) \\
&= \mathbf{true} \wedge x \notin \emptyset \\
&= \mathbf{true}
\end{aligned}
$$

Esercizio: guardato?

$\mathbf{rec}\ x.\ x$	✗	no
$\mathbf{rec}\ x.\ \alpha.\mathbf{rec}\ y.\ x$	✓	guardato
$\mathbf{rec}\ x.\ \alpha.\mathbf{rec}\ y.\ x + y$	✗	no
$\mathbf{rec}\ x.\ \alpha.\mathbf{rec}\ y.\ x \vert y$	✗	no
$\mathbf{rec}\ x.\ \alpha.\mathbf{rec}\ y.\ x \vert \beta.y$	✓	guardato

Proprieta’ dei processi guardati

Variabili guardate

TH. $G(p, X \cup \{x\}) \Rightarrow G(p, X)$

TH. $G(p, X) \wedge x \notin \mathsf{fv}(p) \Rightarrow G(p, X \cup \{x\})$

prova per induzione strutturale su p (omessa)

Le sostituzioni preservano la guardedness

TH. $G(p, X) \wedge \bigwedge_{i \in [1,n]} G(p_i, X) \Rightarrow G(p[^{p_1}/_{x_1}, \cdots, ^{p_n}/_{x_n}], X)$

prova per induzione strutturale su p (omessa)

Le transizioni preservano la guardedness

TH. $G(p, X) \wedge p \xrightarrow{\mu} q \Rightarrow G(q, \emptyset)$

prova per induzione su $p \xrightarrow{\mu} q$ (omessa)

I processi guardati hanno un insieme finito di transizioni

TH. $G(p, \emptyset) \Rightarrow \forall \mu.\ \{q \mid p \xrightarrow{\mu} q\}$ e' un insieme finito

proviamo una proprieta' piu' forte

TH. $X = \{x_1, ..., x_n\}$ $\sigma = [^{p_1}/_{x_1}, \cdots, ^{p_n}/_{x_n}]$

$$G(p, X) \wedge \bigwedge_{i \in [1,n]} G(p_i, X) \Rightarrow \{q \mid \exists \mu.\ p\sigma \xrightarrow{\mu} q\}$$

e' un insieme finito

prova: per induzione strutturale su p

mostriamo solo alcuni casi (e omettiamo alcuni dettagli)

TH. $X = \{x_1, ..., x_n\}$ $\quad \sigma = [{}^{p_1}/_{x_1}, \cdots, {}^{p_n}/_{x_n}]$

$$G(p, X) \wedge \bigwedge_{i \in [1,n]} G(p_i, X) \Rightarrow \{q \mid \exists \mu.\ p\sigma \xrightarrow{\mu} q\}$$

e' un insieme finito

prova: per induzione strutturale su p

$p = \mathbf{nil}$ $\quad \mathbf{nil}\sigma = \mathbf{nil}$ $\quad \{q \mid \exists \mu.\ \mathbf{nil} \xrightarrow{\mu} q\} = \emptyset$

$p = x$ $\quad x \in X$ $\quad G(x, X) = \mathbf{false}$

$x \notin X$ $\quad x\sigma = x$ $\quad \{q \mid \exists \mu.\ x \xrightarrow{\mu} q\} = \emptyset$

$p = \mu'.p'$ $\quad \{q \mid \exists \mu.\ p\sigma \xrightarrow{\mu} q\} = \{p'\sigma\}$

TH. $X = \{x_1, ..., x_n\}$ $\sigma = [^{p_1}/_{x_1}, \cdots, ^{p_n}/_{x_n}]$ (continua)

$$G(p, X) \wedge \bigwedge_{i \in [1,n]} G(p_i, X) \Rightarrow \{q \mid \exists \mu.\ p\sigma \xrightarrow{\mu} q\}$$

e' un insieme finito

prova: per induzione strutturale su p

$p = p' \backslash \alpha$ $\quad p\sigma = p'\sigma \backslash \alpha$ $\quad G(p, X) = G(p', X)$

$$\{q \mid \exists \mu.\ p\sigma \xrightarrow{\mu} q\} = \{q' \backslash \alpha \mid \exists \mu \notin \{\alpha, \overline{\alpha}\}. p'\sigma \xrightarrow{\mu} q'\}$$

finito, per ip. ind.

$p = p'_0 + p'_1$ $\quad p\sigma = p'_0\sigma + p'_1\sigma$ $\quad G(p, X) = G(p'_0, X) \wedge G(p'_1, X)$

$$\{q \mid \exists \mu.\ p\sigma \xrightarrow{\mu} q\} = \{q'_0 \mid \exists \mu.\ p'_0\sigma \xrightarrow{\mu} q'_0\} \cup \{q'_1 \mid \exists \mu.\ p'_1\sigma \xrightarrow{\mu} q'_1\}$$

finito, per ip. ind.

TH. $X = \{x_1, ..., x_n\} \qquad \sigma = [{}^{p_1}/_{x_1}, \cdots, {}^{p_n}/_{x_n}]$ (continua)

$$G(p, X) \wedge \bigwedge_{i \in [1,n]} G(p_i, X) \Rightarrow \{q \mid \exists \mu.\ p\sigma \xrightarrow{\mu} q\}$$

e' un insieme finito

prova per induzione strutturale su p

$p = \mathbf{rec}\ x.p'$ senza perdere generalita' $x \notin X \cup \bigcup_{i \in [1,n]} \mathsf{fv}(p_i)$

$$p\sigma = \mathbf{rec}\ x.\ p'\sigma$$

$$G(p, X) = G(p', X \cup \{x\})$$

$$\{q \mid \exists \mu.\ p\sigma \xrightarrow{\mu} q\} = \{q' \mid \exists \mu.\ p'\sigma[{}^{\mathbf{rec}\ x.\ p'\sigma}/_x] \xrightarrow{\mu} q'\}$$

finito, per ip. ind.